Ferdinand P. Beer ▪ E. Russell Johnston, Jr. ▪ Elliot R. Eisenberg

MECÁNICA VECTORIAL *para* INGENIEROS

Estática

Octava edición



Mc Graw Hill

Octava edición

MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS

Estática

FERDINAND P. BEER
Lehigh University (finado)

E. RUSSELL JOHNSTON, JR.
University of Connecticut

ELLIOT R. EISENBERG
The Pennsylvania State University

Con la colaboración de
David F. Mazurek
U.S. Coast Guard Academy

Revisión técnica:
Ing. Javier León Cárdenas
Jefe de Ingeniería Mecánica
Universidad La Salle, campus Ciudad de México

McGraw Hill

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA
LISBOA • MADRID • NUEVA YORK • SAN JUAN • SANTIAGO
AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI
SAN FRANCISCO • SINGAPUR • SAN LUIS • SIDNEY • TORONTO

Director Higher Education: Miguel Ángel Toledo Castellanos
Director editorial: Ricardo A. del Bosque Alayón
Editor sponsor: Pablo Eduardo Roig Vázquez
Editora de desarrollo: Lorena Campa Rojas
Supervisor de producción: Zeferino García García

Traducción: Jesús Elmer Murrieta Murrieta

MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS
ESTÁTICA
Octava edición

McGraw-Hill Interamericana

*A Subsidiary of **The McGraw-Hill** Companies, Inc.*
Corporativo Punta Santa Fe
Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A
Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe
Delegación Álvaro Obregón
C.P. 01376, México, D.F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

Créditos de las fotografías de portada: Portada frontal: ©*Thompson/CORBIS*; Contraportada: Superior: ©*Richard Cummins/CORBIS*; Central: ©*Ron Watts/CORBIS*; Inferior: ©*Mark Tomalty/Masterfile.*

Fotografía de la portada: A menudo, los ingenieros se enfrentan a las necesidades en conflicto de una sociedad que exige, por un lado, la expansión de la infraestructura básica de transporte, comunicaciones y generación y transmisión de energía y, por otro, el mantenimiento de áreas verdes intactas. Este conflicto entre las construcciones y los paisajes naturales puede resolverse en parte mediante una ubicación adecuada y un énfasis especial en la estética, además de las especificaciones técnicas y los costos necesarios en cualquier diseño. Para el distribuidor entre la autopista North Dallas y la carretera Presidente George Bush que se muestra en la fotografía, se logró un sentido de armonía y balance con el entorno a través del cuidadoso dimensionamiento y diseño de los carriles de tráfico y de los pilares que los sostienen. El camino, que consiste en múltiples trabes y travesaños de acero bajo una plancha de concreto, se sostiene por medio de pilares con cabeza de martillo y vigas en voladizo que se proyectan desde los pilares.

La sección de créditos de este libro comienza en la página 603 y es considerada como una extensión de la página legal.

ISBN-13: 978-970-6103-9
ISBN-10: 970-10-6103-9
(ISBN: 970-10-4469-X edición anterior)

Traducido de la octava edición en inglés de la obra VECTOR MECHANICS FOR ENGINEERS. STATICS.
 ISBN-10: 0-07-297687-X;
ISBN-13: 978-0-07-297687-8

1234567890 09865432107

Impreso en China *Printed in China*
Impreso por CTPS *Printed by CTPS*

The McGraw-Hill Companies

MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS

Estática

Acerca de los autores

Los autores de esta obra con frecuencia son cuestionados acerca de cómo fue que, estando uno en Lehigh y otro en la University of Connecticut, empezaron a escribir sus libros juntos y cómo logran seguir colaborando en las revisiones subsecuentes.

La respuesta a estas preguntas es sencilla. Russ Johnston inició su carrera académica en el departamento de ingeniería civil y mecánica de Lehigh University y allí conoció a Ferd Beer, quien había comenzado a trabajar en ese departamento dos años antes y estaba a cargo de los cursos de mecánica.

Ferd se sintió muy complacido al descubrir que el joven contratado para impartir cursos de ingeniería estructural a nivel de posgrado no sólo estaba dispuesto, sino también ansioso por ayudarlo a reorganizar los cursos de mecánica. Ambos creían que dichos cursos deberían impartirse a partir de unos cuantos principios básicos, y que los distintos conceptos involucrados serían mejor comprendidos y recordados por los estudiantes si se les presentaban en forma gráfica. Juntos escribieron apuntes para las clases de estática y dinámica, a los cuales posteriormente agregaron problemas que supusieron resultarían interesantes para los futuros ingenieros, y poco después produjeron el manuscrito de la primera edición de *Mecánica para ingenieros*.

Al publicarse la segunda edición de *Mecánica para ingenieros* y la primera de *Mecánica vectorial para ingenieros*, Russ Johnston estaba en el Worcester Polytechnic Institute y para las ediciones subsecuentes en la University de Connecticut. Mientras tanto, Ferd y Russ habían asumido funciones administrativas en sus respectivos departamentos y se dedicaban a la investigación, la consultoría, y a asesorar estudiantes de posgrado —Ferd en el área de procesos estocásticos y vibraciones aleatorias y Russ en la de estabilidad elástica y en diseño y análisis estructurales—. Sin embargo, su interés por mejorar la enseñanza de los cursos básicos de mecánica no había disminuido y continuaron impartiéndolos mientras revisaban sus libros y comenzaban a escribir el manuscrito de la primera edición de *Mecánica de materiales*.

La colaboración entre estos dos autores ha abarcado muchos años y muchas revisiones exitosas de todos sus libros, y las contribuciones de Ferd y Russ a la educación en ingeniería los han hecho acreedores de numerosas distinciones y reconocimientos. Recibieron el Western Electric Fund Award por parte de sus respectivas secciones regionales de la American Society for Engineering Education por su excelencia en la instrucción de estudiantes de ingeniería y, además, el Distinguished Educator Award de la división de mecánica de esa misma asociación. A partir de 2001, el reconocimiento denominado New Mechanics Educator Award de la división de mecánica ha sido nombrado Beer and Johnston en honor a estos autores.

Ferdinand P. Beer. Nacido en Francia y educado en Francia y Suiza, obtuvo una maestría en La Sorbona y un doctorado en ciencias en el área de mecánica teórica en la Universidad de Ginebra. Emigró a Estados Unidos después de servir en el ejército francés durante la primera parte de la Segunda Guerra Mundial, e impartió clases por cuatro años en el Williams College en el programa conjunto de ingeniería y artes Williams-MIT. Después de su servicio en el Williams College, Ferd ingresó al profesorado de Lehigh University donde enseñó durante 37 años. Ocupó varios puestos, incluyendo el de profesor distinguido de la universidad y director del departamento de mecánica e ingeniería mecánica. En 1995 recibió un grado honorario de Doctor en Ingeniería por la Lehigh University.

E. Russell Johnston, Jr. Nacido en Filadelfia, Russ posee un título de ingeniero civil de la University of Delaware y un doctorado en ciencias en el área de ingeniería estructural del Massachusetts Institute of Technology. Impartió clases en Lehigh University y en Worcester Polytechnic Institute antes de ingresar al profesorado de la University of Connecticut, donde ocupó el puesto de director del departmento de ingeniería civil y enseñó durante 26 años. En 1991 recibió el Outstanding Civil Engineer Award, sección Connecticut, que otorga la American Society of Civil Engineers.

Elliot R. Eisenberg. Posee una licenciatura y una maestría en ingeniería, ambas de la Cornell University. Elliot ha enfocado sus actividades en el servicio profesional y la enseñanza; en 1992 su trabajo fue reconocido por la American Society of Mechanical Engineers al distinguirlo con la medalla Ben C. Sparks por sus contribuciones a la ingeniería mecánica y a la educación en tecnología de la ingeniería mecánica, así como por sus servicios en la American Society for Engineering Education. Elliot impartió clases durante 32 años, incluyendo 29 en Penn State donde se le han otorgado premios por enseñanza y asesoría.

David F. Mazurek. Posee una licenciatura en ingeniería oceánica y una maestría en ingeniería civil del Florida Institute of Technology, además de un doctorado en ingeniería civil de la University of Connecticut. Fue empleado por la Electric Boat Division of General Dynamics Corporation e impartió clases en Lafayette College antes de pertenecer a la U. S. Coast Guard Academy, en donde ha estado desde 1990. Ha prestado sus servicios en American Railway Engineering y Maintenance of Way Association's Committee 15—Steel Structures durante los últimos 14 años. Su interés profesional incluye la ingeniería de puentes, torres esbeltas, ciencia forense estructural y diseño resistente a explosiones.

Contenido

3
CUERPOS RÍGIDOS: SISTEMAS EQUIVALENTES DE FUERZA

4
EQUILIBRIO DE CUERPOS RÍGIDOS

7
FUERZAS EN VIGAS Y CABLES
355

8
FRICCIÓN
413

9
FUERZAS DISTRIBUIDAS: MOMENTOS DE INERCIA
473

Prefacio

OBJETIVOS

El objetivo principal de un primer curso de mecánica debe ser desarrollar en el estudiante de ingeniería la capacidad de analizar cualquier problema en forma lógica y sencilla, y la de aplicar para su solución unos cuantos principios básicos perfectamente comprendidos. Se espera que este texto, diseñado para un primer curso de estática impartido en el segundo año de estudios, y el siguiente, *Mecánica vectorial para ingenieros: Dinámica*, permitirán que el profesor alcance este objetivo.

ENFOQUE GENERAL

En la parte inicial del texto se introduce el análisis vectorial, el cual se utiliza en la presentación y exposición de los principios fundamentales de la mecánica. Los métodos vectoriales se usan también para resolver diversos problemas, especialmente en tres dimensiones, donde estas técnicas permiten obtener la solución de un modo más conciso y simple. Sin embargo, el énfasis del libro se mantiene en el correcto aprendizaje de los principios de la mecánica y su aplicación para resolver problemas de ingeniería, por lo que el análisis vectorial se presenta, primordialmente, como una herramienta práctica.[†]

Se introducen aplicaciones prácticas desde una etapa inicial. Una de las características del enfoque usado en estos tomos es que la mecánica de *partículas* se ha separado en forma clara de la mecánica de *cuerpos rígidos*. Este enfoque hace posible considerar aplicaciones prácticas simples en una etapa inicial y posponer la introducción de los conceptos más avanzados. Por ejemplo:

- En *Estática*, la estática de partículas se estudia primero (capítulo 2), después de haber presentado las reglas para la suma y resta de vectores, y el principio de equilibrio de una partícula se aplica inmediatamente a situaciones prácticas que involucran sólo

[†]En un libro relacionado, *Mecánica para ingenieros: Estática*, cuarta edición, el uso del álgebra vectorial se limita a la suma y resta de vectores.

fuerzas concurrentes. La estática de cuerpos rígidos se considera en los capítulos 3 y 4. En el capítulo 3 se introducen los productos escalar y vectorial de dos vectores y se utilizan para definir el momento de una fuerza con respecto a un punto y a un eje. La presentación de estos nuevos conceptos es seguida por la exposición rigurosa y completa de los sistemas de fuerzas equivalentes que conducen, en el capítulo 4, a muchas aplicaciones prácticas que involucran el equilibrio de cuerpos rígidos bajo la acción de sistemas generales de fuerzas.

- En *Dinámica* se observa la misma división. Se introducen los conceptos básicos de fuerza, masa y aceleración, de trabajo y energía, y de impulso y momentum, y se aplican en primera instancia a la resolución de problemas que sólo involucran partículas. De esta forma, los estudiantes pueden familiarizarse por sí mismos con los tres métodos básicos utilizados en dinámica, y aprender sus respectivas ventajas antes de enfrentar las dificultades asociadas con el movimiento de cuerpos rígidos.

Los conceptos nuevos se presentan en términos simples. Como este texto está diseñado para un primer curso sobre estática, los conceptos nuevos se presentan en términos simples y cada paso se explica en forma detallada. Por otro lado, este enfoque alcanza una madurez definitiva al analizar los aspectos más relevantes de los problemas considerados, y al ampliar los métodos de aplicabilidad general. Por ejemplo, los conceptos de restricciones parciales y de indeterminación estática se introducen al principio del texto para ser usados en todo el libro.

Los principios fundamentales se ubican en el contexto de aplicaciones simples. Se enfatiza el hecho de que la mecánica es, esencialmente, una ciencia *deductiva* que se basa en algunos principios fundamentales. Las derivaciones se presentan siguiendo su secuencia lógica y con todo el rigor requerido a este nivel. Sin embargo, en virtud de que el proceso de aprendizaje es primordialmente *inductivo*, las aplicaciones más simples se consideran primero. Por ejemplo:

- La estática de partículas antecede a la estática de cuerpos rígidos, y los problemas que involucran fuerzas internas se posponen hasta el capítulo 6.
- En el capítulo 4 se consideran primero los problemas de equilibrio que involucran sólo a fuerzas coplanares, y se resuelven por medio del álgebra ordinaria, mientras que los problemas que involucran fuerzas tridimensionales, los cuales requieren el uso completo del álgebra vectorial, se exponen en la segunda parte de dicho capítulo.

Se emplean diagramas de cuerpo libre para resolver problemas de equilibrio y expresar la equivalencia de sistemas de fuerzas. Los diagramas de cuerpo libre se introducen al principio y se enfatiza su importancia a lo largo de todo el texto. No sólo se emplean para resolver problemas de equilibrio sino también para expresar la equivalencia de dos sistemas de fuerzas o, de modo más general, de dos sistemas de vectores. La ventaja de este enfoque se vuelve evidente en el estudio de la dinámica de cuerpos rígidos, donde se

utiliza para resolver problemas tridimensionales y bidimensionales. Se pudo lograr una comprensión más intuitiva y completa de los principios fundamentales de la dinámica al poner mayor énfasis en las "ecuaciones de diagramas de cuerpo libre" en lugar de en las ecuaciones algebraicas estándar de movimiento. Este enfoque, introducido en 1962 en la primera edición de *Mecánica vectorial para ingenieros*, ha obtenido hasta la fecha una amplia aceptación entre los profesores de mecánica en Estados Unidos. Por tanto, para la resolución de todos los problemas resueltos de este libro, se prefiere su utilización en lugar del método de equilibrio dinámico y de las ecuaciones de movimiento.

Se utilizan presentaciones en distintos tonos para distinguir los vectores. El color se ha usado no sólo para mejorar la calidad de las ilustraciones, sino también para ayudar a los estudiantes a distinguir entre los diversos tipos de vectores que pueden encontrar. En virtud de que no había intención de establecer un código de color para el texto, en un capítulo dado se utiliza el mismo color para representar el mismo tipo de vector. Por ejemplo, a lo largo del tomo de *Estática*, el rojo se utiliza en forma exclusiva para representar fuerzas y pares, mientras que los vectores de posición se muestran en azul y las dimensiones en negro. Esto vuelve más fácil para los estudiantes identificar las fuerzas que actúan sobre una partícula o cuerpo rígido dados y comprender los problemas resueltos y otros ejemplos proporcionados en el libro.

Se mantiene, en forma consistente, un cuidadoso balance entre las unidades SI y unidades de uso común en Estados Unidos. Debido a la tendencia que existe en la actualidad en el gobierno y la industria estadounidenses de adoptar el Sistema Internacional de Unidades (unidades métricas SI), las unidades SI que se usan con mayor frecuencia en mecánica se introducen en el capítulo 1 y se emplean en todo el libro. Aproximadamente la mitad de los problemas resueltos y 60 por ciento de los problemas de tarea están planteados en este sistema de unidades, mientras que el resto se proporciona en las unidades de uso común en Estados Unidos. Los autores creen que este enfoque es el que se adecuará mejor a las necesidades de los estudiantes, quienes, como ingenieros, tendrán que dominar los dos sistemas de unidades.

También se debe reconocer que el uso de ambos sistemas de unidades significa más que aplicar factores de conversión. Como el sistema de unidades SI es absoluto basado en el tiempo, la longitud y la masa, mientras que el sistema inglés es un sistema gravitacional basado en el tiempo, la longitud y la fuerza, se requieren diferentes enfoques para la solución de muchos problemas. Por ejemplo, cuando se usan las unidades SI, por lo general, un cuerpo se especifica mediante su masa expresada en kilogramos; en la mayor parte de los problemas de estática será necesario determinar el peso del cuerpo en newtons, para lo cual se requiere un cálculo adicional. Por otro lado, cuando se aplican las unidades de uso común en Estados Unidos, un cuerpo se especifica mediante su peso en libras y, en problemas de dinámica, se requerirá un cálculo adicional para determinar su masa en slugs (o $\text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$). Por tanto, los autores creen que los problemas que se les asignen a los estudiantes deben incluir ambos sistemas de unidades.

En las secciones opcionales se tratan temas avanzados o especializados. En el libro se incluye un gran número de secciones opcionales identificadas mediante asteriscos y, por tanto, se distinguen fácilmente de aquellas que constituyen la parte fundamental de un curso básico de estática. Estas secciones pueden omitirse sin perjudicar la comprensión del resto del texto.

Entre los temas cubiertos en las secciones adicionales se encuentran la reducción de un sistema de fuerzas a una llave de torsión, aplicaciones a hidrostática, diagramas de fuerza cortante y momento flector, equilibrio de cables, productos de inercia y círculo de Mohr, la determinación de los ejes principales y momentos de inercia de un cuerpo en forma arbitraria, y el método del trabajo virtual. Las secciones sobre vigas son especialmente útiles cuando el curso de estática es seguido inmediatamente por un curso de mecánica de materiales, mientras que las partes que tratan acerca de las propiedades de inercia de cuerpos tridimensionales fueron pensadas primordialmente para los estudiantes que después estudiarán, en dinámica, el movimiento tridimensional de cuerpos rígidos.

El material presentado en el libro y la mayor parte de los problemas no requieren conocimiento matemático previo superior al álgebra, la trigonometría y el cálculo elemental; todos los conocimientos de álgebra elemental necesarios para comprender el texto se presentan con detalle en los capítulos 2 y 3. En general, se pone mayor énfasis en la comprensión adecuada de los conceptos matemáticos básicos incluidos que en la manipulación de fórmulas matemáticas. Al respecto, se debe mencionar que la determinación de los centroides de áreas compuestas precede al cálculo de centroides por integración, lo cual posibilita establecer firmemente el concepto de momento de un área antes de introducir el uso de integrales.

ORGANIZACIÓN DE LOS CAPÍTULOS Y CARACTERÍSTICAS PEDAGÓGICAS

Introducción del capítulo. Cada capítulo comienza con una introducción que establece el propósito y los objetivos del mismo, y en donde se describe en términos sencillos el material que será cubierto y sus aplicaciones en la resolución de problemas de ingeniería. Los lineamientos del capítulo proporcionan a los estudiantes una visión previa de los tópicos que éste incluye.

Lecciones en el capítulo. El cuerpo del texto está dividido en unidades, cada una de las cuales consiste en una o más secciones de teoría, uno o varios problemas resueltos, y una gran cantidad de problemas de tarea. Cada unidad corresponde a un tema bien definido que, por lo general, puede ser cubierto en una lección. Sin embargo, en ciertos casos el profesor encontrará que es deseable dedicar más de una lección a un tópico en particular.

Problemas resueltos. Los problemas resueltos se plantean de manera muy similar a la que usarán los estudiantes cuando resuelvan los problemas que se les asignen. Por tanto, estos problemas cumplen el doble propósito de ampliar el texto y demostrar la forma de trabajo clara y ordenada que los estudiantes deben cultivar en sus propias soluciones.

Resolución de problemas en forma independiente. Entre los problemas resueltos y los de tarea, para cada lección se incluye una sección titulada *Resolución de problemas en forma independiente*. El propósito de estas secciones es ayudar a los estudiantes a organizar mentalmente la teoría ya cubierta en el texto y los métodos de resolución de los problemas resueltos, de manera que puedan resolver con mayor éxito los problemas de tarea. Además, en estas secciones también se incluyen sugerencias y estrategias específicas que les permitirán enfrentar de manera más eficiente cualquier problema que se les asigne.

Series de problemas de tarea. La mayoría de los problemas son de naturaleza práctica y deben llamar la atención del estudiante de ingeniería. Sin embargo, están diseñados para ilustrar el material presentado en el texto y para ayudar a los estudiantes a comprender los principios de la mecánica. Los problemas se han agrupado de acuerdo con las partes del material que ilustran y se presentan en orden de dificultad creciente. Los problemas que requieren atención especial están señalados con asteriscos. Al final del texto se proporcionan las respuestas correspondientes a un 70 por ciento de los problemas propuestos; y aquellos para los cuales no se da respuesta se indican en el libro escribiendo su número en cursivas.

Repaso y resumen del capítulo. Cada capítulo finaliza con un repaso y un resumen del material cubierto en el mismo. Las notas al margen se utilizan para ayudar al estudiante a organizar su trabajo de revisión, además se han incluido referencias cruzadas para ayudarlos a encontrar las partes de material que requieren atención especial.

Problemas de repaso. Al final de cada capítulo se incluye un grupo de problemas de repaso. Estos problemas proporcionan a los estudiantes una oportunidad adicional de aplicar los conceptos más importantes presentados en el capítulo.

Problemas de computadora. Cada capítulo incluye un grupo de problemas diseñados para ser resueltos mediante programas de computadora. Muchos de estos problemas son importantes para el proceso de diseño. En estática, por ejemplo, pueden implicar el análisis de una estructura para diferentes configuraciones y cargas o la determinación de las posiciones de equilibrio de un mecanismo que puede requerir un método iterativo de solución. El desarrollo del algoritmo necesario para resolver un problema de mecánica dado beneficiará a los estudiantes en dos formas diferentes: 1) les ayudará a lograr una mejor comprensión de los principios de la mecánica involucrados; 2) les proporcionará la oportunidad de aplicar sus habilidades con la computadora para encontrar la solución de un problema relevante de ingeniería.

MATERIALES DE APOYO

Esta obra cuenta con interesantes complementos que fortalecen los procesos de enseñanza-aprendizaje, así como la evaluación de éstos, mismos que se otorgan a profesores que adoptan este texto para sus cursos. Para obtener más información y conocer la política de entrega de estos materiales, contacte a su representante McGraw-Hill.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer la colaboración de David Mazurek en esta octava edición de *Mecánica vectorial para ingenieros*, y especialmente por el crucial papel que desempeñó en hacer posible la revisión de los problemas de extensión.

Un agradecimiento especial a los colegas que han verificado cuidadosamente las soluciones y respuestas para todos los problemas de esta edición: Yohannes Ketema de la University of Minnesota; Amy Mazurek del Williams Memorial Institute; David Oglesby de University of Missouri-Rolla; y Daniel W. Yannitell de Louisiana State University.

Es un placer reconocer el trabajo de Dennis Ormond y Michael Haughey, de Fine Line Illustrations of Farmingdale, Nueva York, por las artísticas ilustraciones que contribuyen en gran medida a la efectividad del texto.

Los autores agradecen a las diferentes empresas que proporcionaron fotografías para esta edición. También desean reconocer el esfuerzo determinado y la paciencia de Sabina Dowell, quien seleccionó las fotografías.

Un agradecimiento adicional para los miembros de la organización McGraw-Hill por su apoyo y dedicación en preparar esta nueva edición. En particular se reconocen las contribuciones del editor responsable Michael Hackett, de la editora de desarrollo Katie White, y del gerente de proyecto Kay Brimeyer.

Por último, los autores expresan su gratitud por los numerosos comentarios y sugerencias proporcionados por los usuarios de las ediciones anteriores de *Mecánica vectorial para ingenieros*.

E. Russell Johnston, Jr.
Elliot R. Eisenberg

Agradecemos en especial la valiosa contribución de los siguientes asesores técnicos para la presente edición en español:

Cosme Gómez, *Universidad de las Américas, Puebla*
Cuauhtémoc González Palacios, *Universidad Autónoma del Estado de México, campus Toluca*
Felipe Hidalgo Cavazos, *ITESM, campus Monterrey*
Fidel Alejandro Osorio Jaramillo, *Universidad Autónoma del Estado de México, campus Toluca*
Francisco Javier Calleros Ávila, *Universidad de Guadalajara*
Guillermo Cerpa, *Universidad de Guadalajara*
Guillermo Francisco Cueto Rodríguez, Ignacio Ramírez Vargas, *Instituto Tecnológico de Pachuca, ITESM, campus Hidalgo y Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo*
Javier Lau, *Universidad de Guadalajara*
José de Jesús Villalobos, *Universidad Autónoma de Nuevo León*
José Luis Hernández, *ITESM, campus Monterrey*
José Nicolás Ponciano Guzmán, *Instituto Tecnológico de Morelia e ITESM, campus Morelia*
Oscar Guerrero, *ITESM*
Pedro Ortiz Ojeda, *Universidad Autónoma de Chiapas*
Pedro Ponce, *ITESM, campus Ciudad de México*
Rafael Valencia Castillo, *Universidad Autónoma del Estado de México, campus Toluca*
Raúl Crespo, *ITESM, campus Ciudad de México*
Vicente Cepeda Salazar, *ITESM, campus Toluca*
Víctor Bustos Peter, *ITESM, campus Toluca*

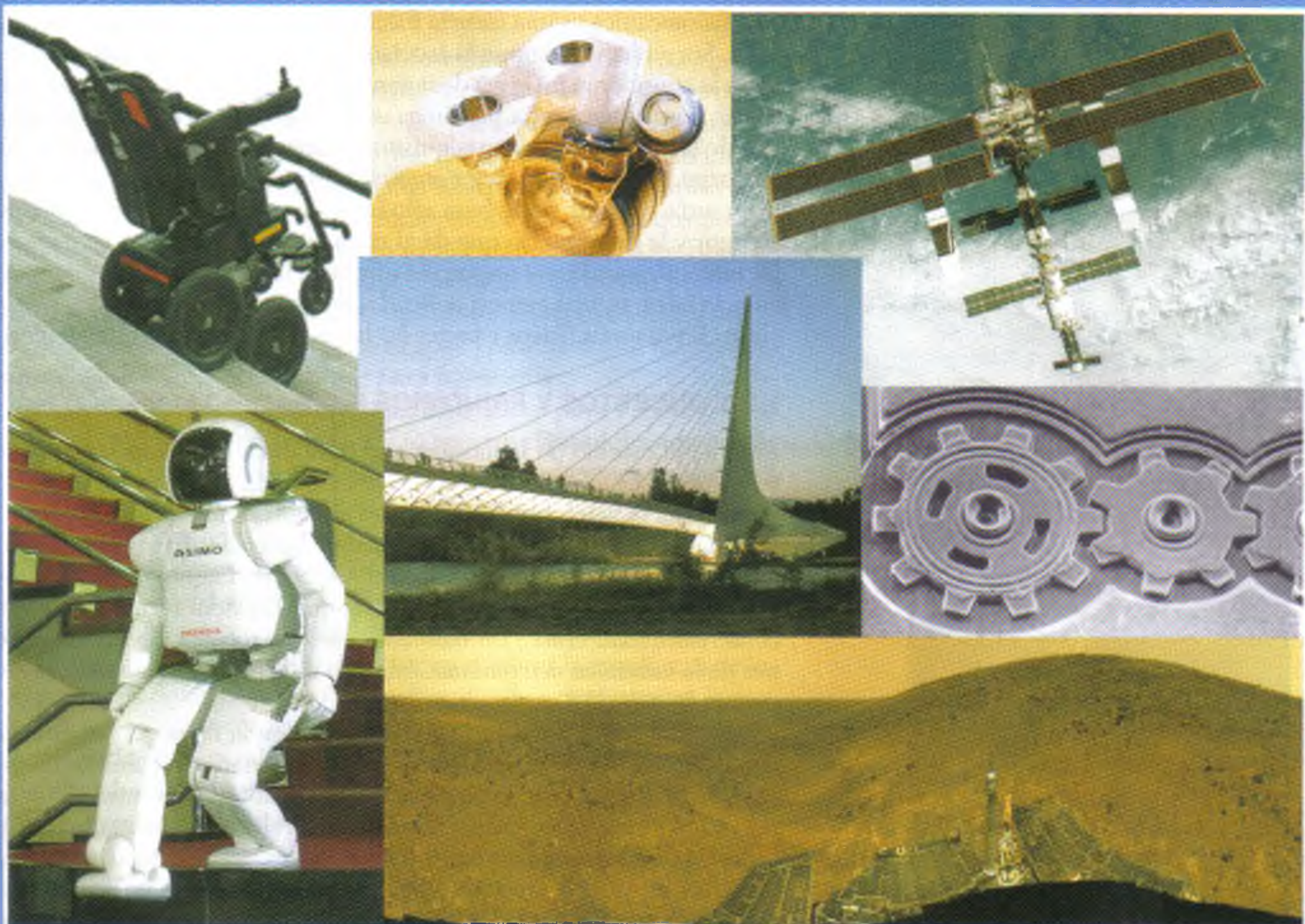
Lista de símbolos

a	Constante; radio; distancia
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$	Reacciones en apoyos y uniones
$A, B, C, \ldots$	Puntos
A	Área
b	Ancho; distancia
c	Constante
C	Centroide
d	Distancia
e	Base de logaritmos naturales
$\mathbf{F}$	Fuerza; fuerza de fricción
g	Aceleración de la gravedad
G	Centro de gravedad; constante de gravitación
h	Altura; flecha de un cable
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	Vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados
$I, I_x, \ldots$	Momentos de inercia
$\bar{I}$	Momento de inercia centroidal
$I_{xy}, \ldots$	Productos de inercia
J	Momento polar de inercia
k	Constante de un resorte
k_x, k_y, k_O	Radios de giro
$\bar{k}$	Radios de giro centroidal
l	Longitud
L	Longitud; claro
m	Masa
$\mathbf{M}$	Momento par
$\mathbf{M}_O$	Momento con respecto al punto O
$\mathbf{M}_O^R$	Momento resultante con respecto al punto O
M	Magnitud de un par o de un momento; masa de la Tierra
M_{OL}	Momento con respecto al eje OL
$\mathbf{N}$	Componente normal de una reacción
O	Origen de coordenadas
p	Presión
$\mathbf{P}$	Fuerza; vector
$\mathbf{Q}$	Fuerza; vector
$\mathbf{r}$	Vector de posición
r	Radio; distancia; coordenada polar

$\mathbf{R}$	Fuerza resultante; vector resultante; reacción
R	Radio de la Tierra
$\mathbf{s}$	Vector de posición
s	Longitud de arco; longitud de un cable
$\mathbf{S}$	Fuerza; vector
t	Espesor
$\mathbf{T}$	Fuerza
T	Tensión
U	Trabajo
$\mathbf{V}$	Producto vectorial; fuerza constante
V	Volumen; energía potencial; cortante
w	Carga por unidad de longitud
$\mathbf{W}$, W	Peso; carga
x, y, z	Coordenadas rectangulares; distancias
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$	Coordenadas rectangulares del centroide o centro de gravedad
α, β, γ	Ángulos
γ	Peso específico
δ	Elongación
$\delta\mathbf{r}$	Desplazamiento virtual
δU	Trabajo virtual
$\boldsymbol{\lambda}$	Vector unitario a lo largo de una línea
η	Eficiencia
θ	Coordenada angular; ángulo; coordenada polar
μ	Coeficiente de fricción
ρ	Densidad
ϕ	Ángulo de fricción; ángulo

CAPÍTULO 1

Introducción



A finales del siglo XVII, Sir Isaac Newton estableció los principios fundamentales de la mecánica, los cuales constituyen la base de gran parte de la ingeniería moderna. El diseño y análisis de casi todos los instrumentos y sistemas requieren del conocimiento de estos principios.

INTRODUCCIÓN

1.1. ¿QUÉ ES LA MECÁNICA?

La mecánica se puede definir como la ciencia que describe y predice las condiciones de reposo o movimiento de los cuerpos bajo la acción de fuerzas. Se divide en tres partes: la mecánica de *cuerpos rígidos*, la mecánica de *cuerpos deformables* y la mecánica de *fluidos*.

La mecánica de cuerpos rígidos se subdivide en *estática* y *dinámica*; la primera estudia los cuerpos en reposo y la segunda los cuerpos en movimiento. En esta parte del estudio de la mecánica se supone que los cuerpos son perfectamente rígidos. Sin embargo, las estructuras y las máquinas reales nunca lo son y se deforman bajo las cargas a las que están sometidas. Estas deformaciones casi siempre son pequeñas y no afectan de manera apreciable las condiciones de equilibrio o de movimiento de la estructura en consideración. Pero son importantes cuando se tiene en cuenta la resistencia de la estructura a las fallas y se estudian en la mecánica de materiales, que es una parte de la mecánica de cuerpos deformables. La tercera parte de la mecánica, la de fluidos, se subdivide en el estudio de los *fluidos incompresibles* y el de los *fluidos compresibles*. La *hidráulica* es una subdivisión importante en el estudio de los fluidos incompresibles y trata problemas relativos a los líquidos.

La mecánica es una ciencia física puesto que estudia fenómenos físicos. Sin embargo, algunos la asocian con las matemáticas, mientras que otros la consideran un tema de ingeniería. Ambos puntos de vista se justifican parcialmente. La mecánica es la base de la mayoría de las ciencias de la ingeniería y es un requisito indispensable para estudiarlas. Sin embargo, no tiene el carácter *empírico* propio de algunas ciencias de la ingeniería, es decir, no se basa sólo en la experiencia u observación; por su rigor y la importancia que da al razonamiento deductivo se parece a las matemáticas. Pero tampoco es una ciencia *abstracta*, ni siquiera una ciencia *pura*; es una ciencia *aplicada*. Su propósito es explicar y predecir los fenómenos físicos y poner las bases para aplicarlas en ingeniería.



Fotografía 1.1 Sir Isaac Newton

1.2. CONCEPTOS Y PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

Aunque el estudio de la mecánica se remonta a los tiempos de Aristóteles (384-322 a.C.) y de Arquímedes (287-212 a.C.), se tuvo que esperar hasta Newton (1642-1727) para encontrar una formulación satisfactoria de sus principios fundamentales, los cuales fueron expresados después en forma modificada por d'Alembert, Lagrange y Hamilton. Su validez permaneció incólume hasta que Einstein formuló su *teoría de la relatividad* (1905). Si bien ahora se han reconocido las limitaciones de la *mecánica newtoniana*, ésta aún es la base de las actuales ciencias de la ingeniería.

Los conceptos básicos que se emplean en la mecánia son *espacio*, *tiempo*, *masa* y *fuerza*. Estos conceptos no pueden ser definidos en forma exacta; deben aceptarse sobre las bases de nuestra intuición y experiencia y emplearse como un marco de referencia mental en el estudio de la mecánica.

El concepto de *espacio* se asocia con la noción de posición de un punto *P*. La posición de éste puede definirse por tres longitudes medidas desde cierto punto de referencia u *origen*, en tres direcciones dadas. Estas longitudes se reconocen como *coordenadas* de *P*.

Para definir un evento, no es suficiente con indicar su posición en el espacio sino que debe darse también el *tiempo* del evento.

El concepto de *masa* tiene la función de caracterizar y comparar los cuerpos con base en ciertos experimentos mecánicos fundamenta-

les. Por ejemplo, dos cuerpos que tengan la misma masa serían atraídos por la Tierra de igual forma; también presentarán la misma resistencia a un cambio en su movimiento traslacional.

Una *fuerza* representa la acción de un cuerpo sobre otro y puede ejercerse por contacto real o a distancia, como en el caso de las fuerzas gravitacionales y magnéticas. Una fuerza se caracteriza por su *punto de aplicación*, *magnitud* y *dirección* y se representa con un *vector* (sección 2.3).

En la mecánica newtoniana, espacio, tiempo y masa son conceptos absolutos e independientes entre sí (esto no es así en la *mecánica relativista*, donde el tiempo de un evento depende de su posición y la masa de un cuerpo varía con su velocidad). Por otra parte, el concepto de fuerza no es independiente de los otros tres. En realidad, uno de los principios fundamentales de la mecánica newtoniana, que se enuncian más adelante, indica que la fuerza resultante que actúa sobre un cuerpo se relaciona con la masa de éste y con la forma en que varía su velocidad en el tiempo.

Se estudiarán las condiciones de reposo o movimiento de partículas y cuerpos rígidos a partir de los cuatro principios básicos que se han expuesto. Por *partícula* se entiende una pequeñísima cantidad de materia que ocupa un punto en el espacio. Un *cuerpo rígido* es la combinación de un gran número de partículas que ocupan posiciones fijas entre sí. El estudio de la mecánica de las partículas es un requisito previo al de los cuerpos rígidos. Además. los resultados obtenidos para una partícula pueden usarse directamente en muchos problemas que tratan de las condiciones de reposo o movimiento de cuerpos reales.

El estudio de la mecánica elemental descansa sobre seis principios fundamentales basados en la evidencia experimental.

La ley del paralelogramo para la adición de fuerzas. Establece que dos fuerzas que actúan sobre una partícula pueden ser sustituidas por una sola fuerza llamada *resultante*, que se obtiene al trazar la diagonal del paralelogramo que tiene los lados iguales a las fuerzas dadas (sección 2.2).

El principio de transmisibilidad. Establece que las condiciones de equilibrio o de movimiento de un cuerpo rígido permanecerán inalteradas si una fuerza que actúa en un punto del cuerpo rígido se sustituye por una fuerza de la misma magnitud y la misma dirección, pero que actúe en un punto diferente, siempre que las dos fuerzas tengan la misma línea de acción (sección 3.3).

Las tres leyes fundamentales de Newton. Fueron formuladas por Sir Isaac Newton a finales del siglo XVII y pueden enunciarse como sigue:

PRIMERA LEY. Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es cero, la partícula permanecerá en reposo (si originalmente estaba en reposo) o se moverá con velocidad constante en línea recta (si originalmente estaba en movimiento) (sección 2.10).

SEGUNDA LEY. Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula no es cero, la partícula tendrá una aceleración proporcional a la magnitud de la resultante y en la dirección de ésta.

Como se verá en la sección 12.2 esta ley puede expresarse así

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{1.1}$$

donde **F**, m y **a** representan, respectivamente, la fuerza resultante que actúa sobre la partícula, la masa de ésta y la aceleración de la misma, expresadas en un sistema congruente de unidades.

TERCERA LEY. Las fuerzas de acción y reacción de cuerpos en contacto tienen la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos (sección 6.1).

La ley de gravitación de Newton. Establece que dos partículas de masa M y m se atraen mutuamente con fuerzas iguales y opuestas **F** y $-$**F** (figura 1.1), de magnitud F dada por la fórmula

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \tag{1.2}$$

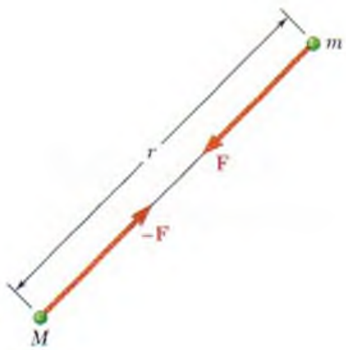


Figura 1.1

donde r = la distancia entre las dos partículas
G = la constante universal llamada *constante de gravitación*

La ley de gravitación de Newton introduce la idea de una acción ejercida a distancia y extiende el alcance de aplicación de la tercera ley: la acción **F** y la reacción $-$**F** en la figura 1.1 son iguales y opuestas y tienen la misma línea de acción.

Un caso de gran importancia es el de la atracción que la Tierra ejerce sobre una partícula situada en su superficie. La fuerza **F** ejercida por la Tierra sobre la partícula se define como el *peso* **W** de la partícula. Tomando M igual a la masa de la Tierra, m igual a la masa de la partícula, y r igual al radio R de la Tierra e introduciendo la constante

$$g = \frac{GM}{R^2} \tag{1.3}$$

la magnitud W del peso de una partícula de masa m puede expresarse como[†]

$$W = mg \tag{1.4}$$



Fotografía 1.2 Cuando están en la órbita terrestre, se dice que las personas y los objetos *no tienen peso*, aun cuando la fuerza gravitacional que actúa sobre ellos es aproximadamente 90% de la que se experimenta en la superficie de la Tierra. Esta aparente contradicción se resolverá en el capítulo 12, cuando se aplica la segunda ley de Newton al movimiento de partículas.

El valor de R en la fórmula (1.3) depende de la elevación del punto considerado; también depende de su latitud, puesto que la Tierra no es realmente esférica. Así que el valor de g varía con la posición del punto en cuestión. Mientras el punto permanezca sobre la superficie de la Tierra, en la mayoría de los cálculos de ingeniería es suficientemente preciso suponer que g es igual a 9.81 m/s^2 o 32.2 ft/s^2.

Los principios que se acaban de enunciar se irán explicando en el curso del estudio de la mecánica conforme sea necesario. El estudio de la estática de partículas se realiza en el capítulo 2 y se basa sólo en la ley del paralelogramo para la adición y en la primera ley de Newton. El principio de transmisibilidad se expondrá en el capítulo 3, al comenzar el estudio de la estática de cuerpos rígidos, y la tercera ley de Newton se expone en el capítulo 6, cuando se analicen las fuerzas ejercidas entre los diferentes elementos que forman una estructura. En el estudio de la dinámica se introducirán la segunda ley de Newton y la ley de gravitación. Allí se mostrará que la primera ley de Newton es un caso particular de la segunda ley (sección 12.2), y que el principio de transmisibilidad podría derivarse de los otros principios y por lo mis-

[†]Una definición más precisa del peso **W** debe tomar en cuenta la rotación de la Tierra.

mo quedar eliminado (sección 16.5). Por ahora, las primera y tercera leyes de Newton, la ley del paralelogramo para la adición y el principio de transmisibilidad proporcionarán las bases necesarias y suficientes para el estudio completo de la estática de partículas, de cuerpos rígidos y de sistemas de cuerpos rígidos.

Como se dijo antes, los seis principios fundamentales enunciados antes se basan en la evidencia experimental. A excepción de la primera ley de Newton y el principio de transmisibilidad, todos son principios independientes y no se pueden obtener matemáticamente de los demás ni de cualquier otro principio físico elemental. En ellos descansa la mayor parte de la intrincada estructura de la mecánica newtoniana. La aplicación de estos principios fundamentales ha permitido resolver, por más de dos siglos, un gran número de problemas relacionados con las condiciones de reposo y movimiento de cuerpos rígidos, cuerpos deformables y fluidos. Muchas de las soluciones obtenidas pueden comprobarse mediante experimentos que proporcionan una verificación ulterior de los principios en que se basaron. Fue sólo hasta el siglo pasado que se encontró que la mecánica de Newton tiene deficiencias en el estudio del movimiento de los átomos y en el de ciertos planetas, y que debe complementarse con la teoría de la relatividad. Pero en la escala humana o en la escala de la ingeniería, donde las velocidades son mucho más pequeñas que la velocidad de la luz, la mecánica de Newton aún no ha sido refutada.

1.3. SISTEMAS DE UNIDADES

Con los cuatro conceptos fundamentales introducidos en la sección anterior se asocian las llamadas *unidades cinéticas*, es decir, las unidades de *longitud*, *tiempo*, *masa* y *fuerza*. Estas unidades no pueden escogerse de manera independiente si la ecuación (1.1) ha de satisfacerse. Tres de ellas pueden definirse en forma arbitraria; se les llama *unidades básicas*. La cuarta unidad, en cambio, debe escogerse de acuerdo con la ecuación (1.1) y se le identifica como *unidad derivada*. Se dice que las unidades cinéticas así seleccionadas forman un *sistema congruente de unidades*.

Sistema Internacional de Unidades (Unidades del SI).[1] En este sistema, que será de uso universal cuando Estados Unidos complete su conversión, las unidades básicas son las de longitud, masa y tiempo, y se llaman, respectivamente, *metro* (m), *kilogramo* (kg) y *segundo* (s). Las tres están definidas de manera arbitraria. El segundo, que de manera original se eligió para representar 1/86 400 del día solar medio, se define ahora como la duración de 9 192 631 770 ciclos de la radiación emitida en la transición entre dos niveles del estado fundamental del átomo de cesio-133. El metro, definido en forma original como la diezmillonésima parte de la distancia del ecuador a un polo, se define ahora como 1 650 763.73 longitudes de onda de la luz naranja-roja correspondiente a cierta transición en un átomo de criptón-86. El kilogramo, que es aproximadamente igual a la masa de 0.001 m^3 de agua, se define como la masa de un patrón de platino-iridio que se conserva en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas en Sèvres, cerca de París, Francia. La unidad de fuerza es una unidad derivada y se llama *newton* (N). Se le define como la fuerza que proporciona una

[1]SI significa *Système International d'Unités* (francés).

aceleración de 1 m/s^2 a una masa de un kilogramo (figura 1.2). A partir de la ecuación (1.1) se escribe

$$1\ \text{N} = (1\ \text{kg})(1\ \text{m/s}^2) = 1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 \tag{1.5}$$

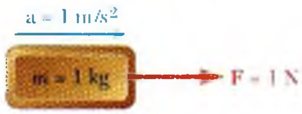


Figura 1.2

Se dice que las unidades del SI forman un sistema *absoluto* de unidades; esto significa que las tres unidades básicas seleccionadas son independientes del lugar en donde se utilicen las medidas. El metro, el kilogramo y el segundo se pueden usar en cualquier lugar de la Tierra; incluso pueden usarse en otro planeta y siempre tendrán el mismo significado.

El *peso* de un cuerpo, o la *fuerza de gravedad* ejercida sobre él, debe expresarse en newtons, como cualquier otra fuerza. De la ecuación (1.4) se obtiene que el peso de un cuerpo de masa 1 kg (figura 1.3) es

$$\begin{aligned} W &= mg \\ &= (1\ \text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2) \\ &= 9.81\ \text{N} \end{aligned}$$

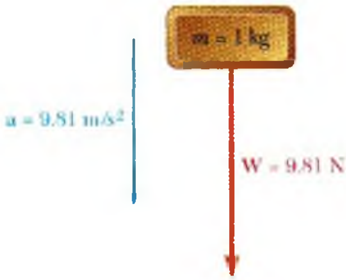


Figura 1.3

Los múltiplos y submúltiplos de las unidades fundamentales del SI se pueden obtener con el uso de los prefijos que se definen en la tabla 1.1. Los múltiplos y submúltiplos de las unidades de longitud, masa y fuerza de mayor uso en ingeniería son, respectivamente, el *kilómetro* (km) y el *milímetro* (mm); el *megagramo*[†] (Mg) y el *gramo* (g); y el *kilonewton* (kN). De acuerdo con la tabla 1.1, se tiene

$$1\ \text{km} = 1\,000\ \text{m} \qquad 1\ \text{mm} = 0.001\ \text{m}$$
$$1\ \text{Mg} = 1\,000\ \text{kg} \qquad 1\ \text{g} = 0.001\ \text{kg}$$
$$1\ \text{kN} = 1\,000\ \text{N}$$

La conversión de estas unidades a metros, kilogramos y newtons, respectivamente, puede realizarse con sólo recorrer el punto decimal tres lugares a la derecha o a la izquierda. Por ejemplo, para convertir 3.82 km en metros, se recorre el punto decimal tres lugares a la derecha:

$$3.82\ \text{km} = 3\,820\ \text{m}$$

En forma semejante, 47.2 mm se convierten en metros recorriendo el punto decimal tres lugares a la izquierda:

$$47.2\ \text{mm} = 0.0472\ \text{m}$$

Con el uso de la notación científica, se puede escribir

$$3.82\ \text{km} = 3.82 \times 10^3\ \text{m}$$
$$47.2\ \text{mm} = 47.2 \times 10^{-3}\ \text{m}$$

Los múltiplos de la unidad de tiempo son el *minuto* (min) y la *hora* (h). Puesto que 1 min = 60 s y 1 h = 60 min = 3 600 s, estos múltiplos no pueden convertirse tan fácilmente como los otros.

[†]También conocida como *tonelada métrica*.

Tabla 1.1. Prefijos del SI

Factor multiplicativo	Prefijo	Símbolo
$1\ 000\ 000\ 000\ 000 = 10^{12}$	tera	T
$1\ 000\ 000\ 000 = 10^{9}$	giga	G
$1\ 000\ 000 = 10^{6}$	mega	M
$1\ 000 = 10^{3}$	kilo	k
$100 = 10^{2}$	hecto[†]	h
$10 = 10^{1}$	deca[†]	da
$0.1 = 10^{-1}$	deci[†]	d
$0.01 = 10^{-2}$	centi[†]	c
$0.001 = 10^{-3}$	mili	m
$0.000\ 001 = 10^{-6}$	micro	μ
$0.000\ 000\ 001 = 10^{-9}$	nano	n
$0.000\ 000\ 000\ 001 = 10^{-12}$	pico	p
$0.000\ 000\ 000\ 000\ 001 = 10^{-15}$	femto	f
$0.000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 001 = 10^{-18}$	ato	a

[†]Debe evitarse el uso de estos prefijos, excepto en las medidas de áreas y volúmenes y para el uso no técnico del centímetro, como en las medidas referentes a la ropa y al cuerpo.

Con el uso del múltiplo o submúltiplo adecuado de cierta unidad, se puede evitar la escritura de números muy grandes o muy pequeños. Por ejemplo, por lo general se escribe 427.2 km en lugar de 427 200 m, y 2.16 mm en lugar de 0.002 16 m.[†]

Unidades de área y volumen. La unidad de área es el *metro cuadrado* (m^2), que representa el área de un cuadrado de 1 m de lado; la unidad de volumen es el *metro cúbico* (m^3), que es igual al volumen de un cubo de 1 m de lado. Para evitar valores numéricos excesivamente pequeños o demasiado grandes en el cálculo de áreas y volúmenes, se usan sistemas de subunidades que se obtienen elevando, respectivamente, al cuadrado y al cubo no sólo el milímetro sino también dos submúltiplos intermedios del metro, llamados *decímetro* (dm) y *centímetro* (cm). Entonces, por definición,

$$1 \text{ dm} = 0.1 \text{ m} = 10^{-1} \text{ m}$$
$$1 \text{ cm} = 0.01 \text{ m} = 10^{-2} \text{ m}$$
$$1 \text{ mm} = 0.001 \text{ m} = 10^{-3} \text{ m}$$

los submúltiplos de la unidad de área son

$$1 \text{ dm}^2 = (1 \text{ dm})^2 = (10^{-1} \text{ m})^2 = 10^{-2} \text{ m}^2$$
$$1 \text{ cm}^2 = (1 \text{ cm})^2 = (10^{-2} \text{ m})^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$$
$$1 \text{ mm}^2 = (1 \text{ mm})^2 = (10^{-3} \text{ m})^2 = 10^{-6} \text{ m}^2$$

y los submúltiplos de la unidad de volumen son

$$1 \text{ dm}^3 = (1 \text{ dm})^3 = (10^{-1} \text{ m})^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$$
$$1 \text{ cm}^3 = (1 \text{ cm})^3 = (10^{-2} \text{ m})^3 = 10^{-6} \text{ m}^3$$
$$1 \text{ mm}^3 = (1 \text{ mm})^3 = (10^{-3} \text{ m})^3 = 10^{-9} \text{ m}^3$$

[†]Debe observarse que cuando se usan más de cuatro dígitos a ambos lados del punto decimal para expresar una cantidad en unidades del SI (como en 427 200 m o en 0.002 16 m) deben usarse espacios, no comas, para separar los dígitos en grupos de tres. Esto es con el fin de evitar confusiones con la coma, que se usa en muchos países en lugar del punto decimal.

Debe notarse que cuando se mide el volumen de un líquido, el decímetro cúbico (dm^3) se conoce en forma usual como un *litro* (L).

En la tabla 1.2 se muestran otras unidades derivadas del SI, que se usan para medir el momento de una fuerza, el trabajo de una fuerza, etc. Aunque estas unidades se introducirán en capítulos posteriores conforme se vayan necesitando, es necesario describir una regla importante en esta fase: cuando se obtiene una unidad derivada con la división de una unidad básica entre otra unidad básica, debe usarse un prefijo en el numerador de la unidad derivada pero no en su denominador. Por ejemplo, la constante k de un resorte que se elonga 20 mm bajo una carga de 100 N se expresará como

$$k = \frac{100\text{ N}}{20\text{ mm}} = \frac{100\text{ N}}{0.020\text{ m}} = 5\,000\text{ N/m} \qquad \text{o} \qquad k = 5\text{ kN/m}$$

pero nunca como $k = 5$ N/mm.

Unidades de uso común en Estados Unidos. La mayoría de los ingenieros practicantes estadounidenses todavía utiliza un sistema en el que las unidades básicas son las unidades de longitud, fuerza y tiempo. Estas unidades son, respectivamente, el *pie* (ft), la *libra* (lb) y el *segundo* (s). El segundo es idéntico a la correspondiente unidad del SI. El pie se define como 0.3048 m. La libra se define como el *peso* de un patrón de platino, llamado *libra estándar*, que está en el National Institute

Tabla 1.2. Principales unidades del SI usadas en mecánica

Cantidad	Unidad	Símbolo	Fórmula
Aceleración	Metro por segundo al cuadrado	. . .	m/s^2
Ángulo	Radián	rad	†
Aceleración angular	Radián por segundo al cuadrado	. . .	rad/s^2
Velocidad angular	Radián por segundo	. . .	rad/s
Área	Metro cuadrado	. . .	m^2
Densidad	Kilogramo por metro cúbico	. . .	kg/m^3
Energía	Joule	J	$N \cdot m$
Fuerza	Newton	N	$kg \cdot m/s^2$
Frecuencia	Hertz	Hz	s^{-1}
Impulso	Newton-segundo	. . .	$kg \cdot m/s$
Longitud	Metro	m	‡
Masa	Kilogramo	kg	‡
Momento de una fuerza	Newton-metro	. . .	$N \cdot m$
Potencia	Watt	W	J/s
Presión	Pascal	Pa	N/m^2
Esfuerzo	Pascal	Pa	N/m^2
Tiempo	Segundo	s	‡
Velocidad	Metro por segundo	. . .	m/s
Volumen			
Sólidos	Metro cúbico	. . .	m^3
Líquidos	Litro	L	$10^{-3}\ m^3$
Trabajo	Joule	J	$N \cdot m$

†Unidad suplementaria (1 revolución = 2π rad = 360°).
‡Unidad básica.

of Standards and Technology en las afueras de Washington, su masa es de 0.453 592 43 kg. Como el peso de un cuerpo depende de la atracción gravitacional de la Tierra, la cual varía con la ubicación, se especifica que la libra estándar debe estar localizada al nivel del mar y a una latitud de 45° para definir en forma apropiada una fuerza de una libra. Es claro que las unidades de uso común en Estados Unidos no forman un sistema de unidades absoluto. Por su dependencia de la atracción gravitacional de la Tierra constituyen un sistema de unidades *gravitacional*.

Aun cuando la libra estándar se emplea también como unidad de masa en transacciones comerciales en Estados Unidos, no puede usarse así en cálculos de ingeniería, debido a que no sería consistente con las unidades básicas definidas en el apartado anterior. De hecho, cuando una fuerza de 1 lb actúa sobre la libra estándar, es decir, cuando está sujeta a la gravedad, recibe la aceleración de la gravedad, $g = 32.2$ ft/s^2 (figura 1.4), ésta no es la unidad de aceleración que se requiere según la ecuación (1.1). La unidad de masa consistente con el pie, la libra y el segundo es la masa que recibe una aceleración de 1 ft/s^2 al aplicársele una fuerza de 1 lb (figura 1.5). Esta unidad, algunas veces llamada *slug*, puede derivarse de la ecuación $F = ma$ después de sustituir 1 lb y 1 ft/s^2 para F y a, respectivamente. Se escribe

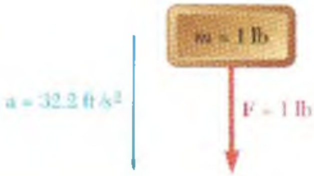


Figura 1.4

$$F = ma \qquad 1 \text{ lb} = (1 \text{ slug})(1 \text{ ft/s}^2)$$

y se obtiene

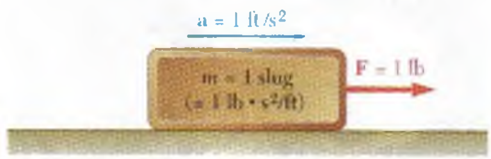


Figura 1.5

$$1 \text{ slug} = \frac{1 \text{ lb}}{1 \text{ ft/s}^2} = 1 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft} \tag{1.6}$$

Comparando las figuras 1.4 y 1.5 se concluye que el *slug* es una masa 32.2 veces mayor que la masa de la libra estándar.

El hecho de que en el sistema de uso común en Estados Unidos, los cuerpos se caractericen por su peso en libras en lugar de por su masa en *slugs*, será ventajoso en el estudio de la estática, en donde se tratará en forma continua con pesos u otras fuerzas, y sólo en ocasiones con masas. Sin embargo, en el estudio de la dinámica, donde intervienen fuerzas, masas y aceleraciones, la masa m de un cuerpo se expresará en *slugs* cuando su peso W esté dado en libras. Recordando la ecuación (1.4) se escribe


Fotografía 1.3 La unidad de masa es la única unidad básica que aún se define con un patrón físico. En la actualidad se trabaja para reemplazar este patrón por uno basado en un fenómeno natural inalterable.

$$m = \frac{W}{g} \tag{1.7}$$

donde g es la aceleración de la gravedad ($g = 32.2$ ft/s^2).

Otras inidades de uso común en Estados Unidos que se presentan en forma frecuente en problemas de ingeniería son la *milla* (mi), igual a 5 280 ft; la *pulgada* (in.), igual a $\frac{1}{12}$ ft; y la *kilolibra* (kip), igual a una fuerza de 1 000 lb. La *tonelada* se usa con frecuencia para representar una masa de 2 000 lb pero, al igual que la libra, debe convertirse a *slugs* en los cálculos de ingeniería.

La conversión en pies, libras y segundos de cantidades expresadas en otras unidades de uso común en Estados Unidos, en forma general es más complicada y requiere mayor atención que la operación correspondiente en las unidades del SI. Por ejemplo, si se da la magnitud de

una velocidad como $v = 30$ mi/h, se convierte en ft/s de la siguiente manera. Primero se escribe

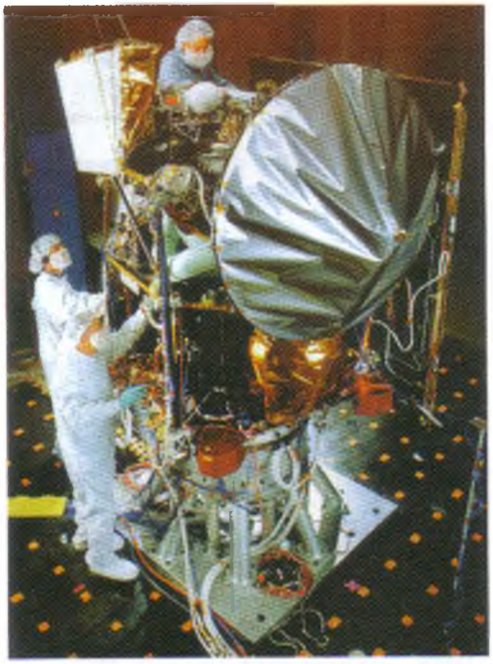
$$v = 30\frac{\text{mi}}{\text{h}}$$

Puesto que se quieren convertir millas en pies, se debe multiplicar el miembro derecho de la ecuación por una expresión que contenga millas en el denominador y pies en el numerador. Pero, como no se quiere cambiar el valor del miembro derecho, la expresión implicada debe tener un valor igual a uno; el cociente (5 280 ft)/(1 mi) es una expresión de este tipo. Haciendo una operación semejante para transformar la unidad hora en segundos, se escribe

$$v = \left(30\frac{\text{mi}}{\text{h}}\right)\left(\frac{5\ 280\ \text{ft}}{1\ \text{mi}}\right)\left(\frac{1\ \text{h}}{3\ 600\ \text{s}}\right)$$

Realizando los cálculos numéricos y cancelando las unidades que aparecen tanto en el numerador como en el denominador, se obtiene

$$v = 44\ \frac{\text{ft}}{\text{s}} = 44\ \text{ft/s}$$



Fotografía 1.4 No se puede exagerar la importancia de incluir unidades en todos los cálculos. Se encontró que el satélite climatológico para Marte, con un costo de 125 millones de dólares, falló al ingresar a la órbita alrededor de Marte porque el principal contratista había proporcionado el equipo de navegación con datos operativos basados en unidades de uso común en Estados Unidos, en lugar de las especificaciones del SI.

1.4. CONVERSIÓN DE UN SISTEMA DE UNIDADES A OTRO

Existen muchas situaciones en las que un ingeniero necesita convertir en unidades del SI un resultado numérico obtenido en unidades de uso común en Estados Unidos o viceversa. Como la unidad de tiempo es la misma en ambos sistemas, sólo se necesita convertir dos unidades cinéticas básicas y, puesto que todas las otras unidades cinéticas pueden derivarse de estas unidades básicas, sólo se requiere recordar dos factores de conversión.

Unidades de longitud. Por definición, la unidad de longitud de uso común en Estados Unidos es

$$1\ \text{ft} = 0.3048\ \text{m} \tag{1.8}$$

De aquí se tiene que

$$1\ \text{mi} = 5\ 280\ \text{ft} = 5\ 280(0.3048\ \text{m}) = 1\ 609\ \text{m}$$

o bien

$$1\ \text{mi} = 1.609\ \text{km} \tag{1.9}$$

También

$$1\ \text{in.} = \tfrac{1}{12}\ \text{ft} = \tfrac{1}{12}(0.3048\ \text{m}) = 0.0254\ \text{m}$$

o bien

$$1\ \text{in.} = 25.4\ \text{mm} \tag{1.10}$$

Unidades de fuerza. Recordando que la unidad de fuerza de uso común en Estados Unidos (la libra) se define como el peso de una libra estándar (de masa 0.4536 kg) al nivel del mar y a una latitud de 45° (donde $g = 9.807\ \text{m/s}^2$) y usando la ecuación (1.4), se escribe

$$W = mg$$
$$1 \text{ lb} = (0.4536 \text{ kg})(9.807 \text{ m/s}^2) = 4.448 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

o, recordando la ecuación (1.5),

$$1 \text{ lb} = 4.448 \text{ N} \tag{1.11}$$

Unidades de masa. La unidad de masa de uso común en Estados Unidos (el *slug*) es una unidad derivada. Así, con el uso de las ecuaciones (1.6), (1.8) y (1.11), se puede escribir

$$1 \text{ slug} = 1 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft} = \frac{1 \text{ lb}}{1 \text{ ft/s}^2} = \frac{4.448 \text{ N}}{0.3048 \text{ m/s}^2} = 14.59 \text{ N} \cdot \text{s}^2/\text{m}$$

y por medio de la ecuación (1.5),

$$1 \text{ slug} = 1 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft} = 14.59 \text{ kg} \tag{1.12}$$

Aunque no puede usarse como unidad consistente de masa, recordando que la masa de la libra estándar es, por definición,

$$1 \text{ libra masa} = 0.4536 \text{ kg} \tag{1.13}$$

Esta constante se puede usar para determinar la *masa* en unidades del SI (kilogramos) de un cuerpo que esté caracterizado por su *peso* en unidades de uso común en Estados Unidos (libras).

Para convertir una unidad derivada de uso común en Estados Unidos en unidades del SI, simplemente se multiplica o se divide por los factores de conversión apropiados. Por ejemplo, para convertir el momento de una fuerza que ha sido encontrada como $M = 47 \text{ lb} \cdot \text{in.}$ en unidades del SI, se usan las fórmulas (1.10) y (1.11) y se escribe

$$\begin{aligned} M = 47 \text{ lb} \cdot \text{in.} &= 47(4.448 \text{ N})(25.4 \text{ mm}) \\ &= 5\,310 \text{ N} \cdot \text{mm} = 5.31 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Los factores de conversión dados en esta sección se pueden usar también para convertir un resultado numérico obtenido en las unidades del SI a unidades de uso común en Estados Unidos. Por ejemplo, si el momento de una fuerza se encontró como $M = 40 \text{ N} \cdot \text{m}$, con el procedimiento usado en el último párrafo de la sección 1.3, se escribe

$$M = 40 \text{ N} \cdot \text{m} = (40 \text{ N} \cdot \text{m})\left(\frac{1 \text{ lb}}{4.448 \text{ N}}\right)\left(\frac{1 \text{ ft}}{0.3048 \text{ m}}\right)$$

Al realizar los cálculos numéricos y cancelar las unidades que aparecen tanto en el numerador como en el denominador, se obtiene

$$M = 29.5 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

Las unidades de uso común en Estados Unidos que se emplean con mayor frecuencia en la mecánica, y sus equivalentes en las unidades del SI, se enlistan en la tabla 1.3.

1.5. MÉTODO PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Un problema en mecánica debe abordarse de la misma manera en que se plantearía un problema real de ingeniería. Si se toma como base la experiencia y la intuición propias, será más fácil entender y formular el problema. Sin embargo, una vez que el problema se ha establecido en forma clara, no hay sitio para suposiciones particulares. *La solución se debe basar en los seis principios fundamentales establecidos en la sección 1.2 o*

Tabla 1.3. Unidades de uso común en Estados Unidos y sus equivalencias en unidades del SI

Cantidad	Unidad de uso común en EU	Equivalente del SI
Aceleración	ft/s^2	$0.3048\ m/s^2$
	$in./s^2$	$0.0254\ m/s^2$
Área	ft^2	$0.0929\ m^2$
	$in.^2$	$645.2\ mm^2$
Energía	ft · lb	1.356 J
Fuerza	kip	4.448 kN
	lb	4.448 N
	oz	0.2780 N
Impulso	lb · s	4.448 N · s
Longitud	ft	0.3048 m
	in.	25.40 mm
	mi	1.609 km
Masa	oz masa	28.35 g
	lb masa	0.4536 kg
	slug	14.59 kg
	ton	907.2 kg
Momento de una fuerza	lb · ft	1.356 N · m
	lb · in.	0.1130 N · m
Momento de inercia		
de un área	$in.^4$	$0.4162 \times 10^6\ mm^4$
de una masa	$lb \cdot ft \cdot s^2$	$1.356\ kg \cdot m^2$
Cantidad de movimiento	lb · s	4.448 kg · m/s
Potencia	ft · lb/s	1.356 W
	hp	745.7 W
Presión o esfuerzo	lb/ft^2	47.88 Pa
	$lb/in.^2$ (psi)	6.895 kPa
Velocidad	ft/s	0.3048 m/s
	in./s	0.0254 m/s
	mi/h (mph)	0.4470 m/s
	mi/h (mph)	1.609 km/h
Volumen	ft^3	$0.02832\ m^3$
	$in.^3$	$16.39\ cm^3$
Líquidos	gal	3.785 L
	qt	0.9464 L
Trabajo	ft · lb	1.356 J

en los teoremas derivados de éstos. Cada paso debe estar justificado con estas bases. Deben seguirse reglas estrictas que conduzcan a la solución de una manera casi automática, sin dejar lugar para la intuición o "sentimientos" particulares. Después de obtener una respuesta, ésta debe verificarse. Aquí, de nuevo, se puede utilizar el sentido común y la experiencia personal. Si el resultado obtenido no es completamente satisfactorio, debe verificarse en forma cuidadosa la formulación del problema, la validez del método utilizado para su solución y la exactitud de los cálculos.

El *planteamiento* de un problema debe ser claro y preciso y contener los datos proporcionados, así como indicar la información que se requiere. Debe incluirse un dibujo claro que muestre todas las cantidades involucradas, así como un diagrama para cada uno de los cuerpos que participan, que indique en forma clara las fuerzas que actúan sobre ellos. A estos diagramas se les conoce como *diagramas de cuerpo libre* y se describirán en detalle en las secciones 2.11 y 4.2.

Los *principios fundamentales* de la mecánica que se enlistan en la sección 1.2 *se emplean para escribir ecuaciones* que expresen las con-

diciones de reposo o movimiento de los cuerpos considerados. Cada ecuación debe estar relacionada en forma clara con uno de los diagramas de cuerpo libre. Después se procederá a resolver el problema, observando en forma estricta las reglas usuales de álgebra y con el registro minucioso de los diferentes pasos dados.

Después de haber obtenido la respuesta, ésta debe *comprobarse con todo cuidado*. Con frecuencia se pueden detectar errores en el *razonamiento* mediante la verificación de las unidades. Por ejemplo, para determinar el momento de una fuerza de 50 N sobre un punto a 0.60 m de su línea de acción, se escribiría (sección 3.12)

$$M = Fd = (50 \text{ N})(0.60 \text{ m}) = 30 \text{ N} \cdot \text{m}$$

La unidad N · m que se obtiene al multiplicar newtons por metros es la unidad correcta para el momento de una fuerza; si se hubiera obtenido alguna otra unidad, se sabría que se cometió un error.

Los errores de *cálculo* por lo general se encontrarán al sustituir los valores numéricos en una ecuación que no haya sido usada y verificar si la ecuación es correcta. No es posible exagerar la importancia de los cálculos correctos en ingeniería.

1.6. EXACTITUD NUMÉRICA

La exactitud en la solución de un problema depende de dos factores: 1) la exactitud de los datos proporcionados y 2) la de los cálculos desarrollados.

La solución no puede ser más exacta que el menos exacto de estos dos factores; por ejemplo, si se sabe que la carga de un puente es de 75 000 lb con un posible error de 100 lb, el error relativo que mide el grado de precisión del dato es

$$\frac{100 \text{ lb}}{75\,000 \text{ lb}} = 0.0013 = 0.13 \text{ por ciento}$$

Entonces, al calcular la reacción en uno de los soportes del puente no tendría sentido anotarla como 14 322 lb. La exactitud de la solución no puede ser mayor de 0.13 por ciento, sin importar con qué exactitud se realicen los cálculos, y el error posible en la respuesta puede ser tan grande como (0.13/100)(14 322 lb) ≈ 20 lb. La respuesta debería escribirse como 14 320 ± 20 lb.

En los problemas de ingeniería los datos rara vez se conocen con una exactitud mayor a 0.2 por ciento, por lo que casi nunca se justifica escribir las respuestas a dichos problemas con una exactitud mayor a 0.2 por ciento. Un criterio práctico es utilizar 4 cifras para registrar números que inicien con un "1" y 3 cifras en todos los otros casos. A menos que se indique otra cosa, los datos proporcionados en un problema deben asumirse como conocidos con un grado de exactitud comparable. Por ejemplo, una fuerza de 40 lb se debería leer 40.0 lb, y una fuerza de 15 lb se debería leer 15.00 lb.

Los ingenieros y estudiantes de ingeniería comúnmente usan las calculadoras electrónicas de bolsillo. La exactitud y velocidad de éstas facilita los cálculos numéricos en la solución de muchos problemas. Sin embargo, los estudiantes no deben registrar más cifras significativas de las que se pueden justificar, sólo porque éstas se pueden obtener fácilmente. Como se mencionó con anterioridad, una exactitud mayor que 0.2 por ciento rara vez es necesaria o significativa en la solución de problemas prácticos de ingeniería.

CAPÍTULO 2

Estática de partículas



Muchos problemas de ingeniería pueden resolverse tomando en cuenta el *equilibrio* de una *partícula*. En este capítulo se aprenderá que, si el bolardo se considera como una partícula, será posible determinar la relación entre las tensiones de las cuerdas.

ESTÁTICA DE PARTÍCULAS

2.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se estudiará el efecto de las fuerzas que actúan sobre las partículas. Primero se aprenderá a sustituir dos o más fuerzas que actúan sobre una partícula por una sola fuerza que tenga el mismo efecto que ellas. Esta fuerza equivalente sola es la *resultante* de las fuerzas varias que actúan sobre la partícula. Después se derivarán las relaciones que existen entre las distintas fuerzas que actúan sobre una partícula en un estado de *equilibrio* y se usarán para determinar algunas de las fuerzas que actúan sobre dicha partícula.

El uso de la palabra *partícula* no significa que este capítulo se limite al estudio de pequeños corpúsculos. Quiere decir que el tamaño y la forma de los cuerpos en consideración no afectará en la solución de los problemas tratados en este capítulo, y que todas las fuerzas ejercidas sobre un cuerpo dado se supondrán aplicadas en un mismo punto. Puesto que tal suposición se verifica en muchas aplicaciones prácticas, se podrán resolver un buen número de problemas de ingeniería.

La primera parte de este capítulo está dedicada al estudio de las fuerzas obtenidas en un mismo plano y la segunda al análisis de las fuerzas en el espacio tridimensional.

FUERZAS EN UN PLANO

2.2. FUERZA SOBRE UNA PARTÍCULA. RESULTANTE DE DOS FUERZAS

Una fuerza representa la acción de un cuerpo sobre otro y se caracteriza por su *punto de aplicación*, *magnitud o módulo* y *dirección*. Pero las fuerzas sobre una partícula tienen el mismo punto de aplicación. Por tanto, cada fuerza considerada en este capítulo estará completamente definida por su magnitud o módulo y dirección.

La magnitud o módulo de una fuerza se caracteriza por cierto número de unidades. Como se indicó en el capítulo 1, las unidades del SI usadas por los ingenieros para medir la magnitud de una fuerza son el newton (N) y su múltiplo el kilonewton (kN), igual a 1 000 N, mientras que las unidades del sistema de uso común en Estados Unidos, empleadas con el mismo fin, son la libra (lb) y su múltiplo la kilolibra (kip), igual a 1 000 lb. La dirección de una fuerza se define por la *línea de acción* y el *sentido* de la fuerza. La línea de acción es la línea recta infinita a lo largo de la cual actúa la fuerza; se caracteriza por el ángulo que forma con algún eje fijo (figura 2.1).



Figura 2.1

La fuerza en sí se representa por un segmento de esa línea; mediante el uso de una escala apropiada, puede escogerse la longitud de este segmento para representar la magnitud de la fuerza. Finalmente, el sentido de la fuerza debe indicarse por una punta de flecha. En la definición de una fuerza es importante indicar su sentido. Dos fuerzas como las mostradas en las figuras 2.1*a* y *b*, que tienen la misma magnitud y la misma línea de acción pero diferente sentido, tendrán efectos opuestos sobre una partícula.

La evidencia experimental muestra que dos fuerzas **P** y **Q** que actúan sobre una partícula *A* (figura 2.2*a*) pueden sustituirse por una sola fuerza **R** que produce el mismo efecto sobre la partícula (figura 2.2*c*). A esta fuerza se le llama *resultante* de las fuerzas **P** y **Q** y puede obtenerse, como se muestra en la figura 2.2*b*, construyendo un paralelogramo con **P** y **Q** como lados. *La diagonal que pasa por A representa la resultante.* Esto se conoce como la *ley del paralelogramo* para la adición de dos fuerzas, y se basa en la evidencia experimental; no puede probarse ni derivarse de manera matemática.

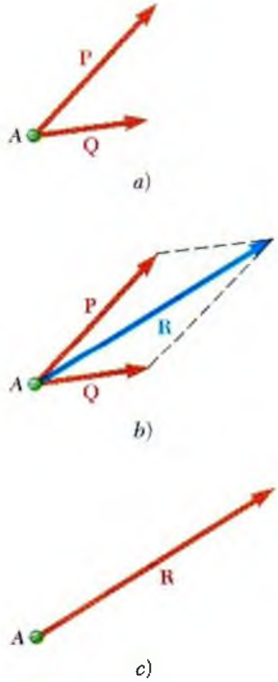


Figura 2.2

2.3. VECTORES

En apariencia las fuerzas no obedecen las reglas de la adición definidas en la aritmética o en el álgebra ordinaria. Por ejemplo, dos fuerzas que actúan formando un ángulo recto, una de 4 lb y otra de 3 lb, suman una fuerza de 5 lb y *no* una de 7 lb. La fuerzas no son las únicas cantidades que siguen la ley del paralelogramo para la adición. Como se verá más adelante, los *desplazamientos*, *velocidades*, *aceleraciones* y *momentos* son otros ejemplos de cantidades físicas que poseen magnitud y dirección y que se suman siguiendo la ley del paralelogramo. Estas cantidades pueden representarse matemáticamente por *vectores*, mientras que aquellas cantidades físicas que no tienen dirección, como *volumen*, *masa* o *energía* se representan por números ordinarios o *escalares*.

Los vectores se definen como *expresiones matemáticas que poseen magnitud, dirección y sentido, los cuales se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo.* Los vectores se representan por flechas en las ilustraciones y se distinguen de las cantidades escalares en este texto mediante el uso de negritas (**P**). En la escritura a mano, un vector puede caracterizarse dibujando una pequeña flecha arriba de la letra usada para representarlo ($\vec{P}$) o subrayando la letra ($\underline{P}$). La magnitud de un vector determina la longitud de la flecha correspondiente. En este libro se usarán letras cursivas para representar la magnitud de un vector. Así, la magnitud del vector **P** se representa como *P*.

Un vector con el que se representa una fuerza que actúa sobre una partícula tiene un punto de aplicación bien definido, a saber, la partícula misma. A tal vector se le llama vector *fijo* o *ligado*, y no puede cambiarse su posición sin modificar las condiciones del problema. Sin embargo, otras cantidades físicas, como los pares (véase capítulo 3), se pueden representar por vectores que pueden moverse libremente en el espacio; a estos vectores se les conoce como *libres*. Existen otras cantidades físicas, como las fuerzas sobre un cuerpo rígido (véase capítulo 3), que están representadas por vectores que pueden moverse o res-

balar a lo largo de su línea de acción; a éstos se les conoce como vectores *deslizantes*.[1]

Dos vectores de la misma magnitud, dirección y sentido se dice que son *iguales*, tengan o no el mismo punto de aplicación (figura 2.4); los vectores iguales pueden representarse por la misma letra.

El *vector negativo* de un vector **P** se define como aquel que tiene la misma magnitud que **P** y una dirección opuesta a la de **P** (figura 2.5); el negativo del vector **P** se representa por −**P**. A los vectores **P** y −**P** se les llama vectores *iguales y opuestos*. Se tiene

$$\mathbf{P} + (-\mathbf{P}) = 0$$



Figura 2.4



Figura 2.5

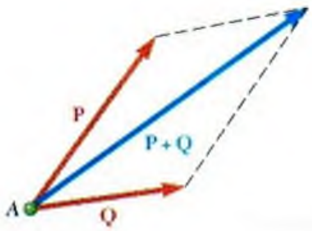


Figura 2.6

2.4. ADICIÓN O SUMA DE VECTORES

En la sección anterior se vio que, por definición, los vectores se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo. Así, la suma de dos vectores **P** y **Q** se obtiene uniendo los dos vectores al mismo punto *A* y construyendo un paralelogramo que tenga por lados a **P** y a **Q** (figura 2.6). La diagonal que pasa por *A* representa la suma vectorial de **P** y **Q**, y se representa por **P** + **Q**. El hecho de que el signo + se use para representar tanto la suma vectorial como la escalar no debe causar ninguna confusión, si las cantidades vectoriales y escalares siempre se distinguen con cuidado. De esta manera, se debe notar que la magnitud del vector **P** + **Q** *no* es, en general, igual a la suma $P + Q$ de las magnitudes de los vectores **P** y **Q**.

Puesto que el paralelogramo construido con los vectores **P** y **Q** no depende del orden en que **P** y **Q** se seleccionen, se concluye que la adición de dos vectores es *conmutativa*, y se escribe

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{Q} + \mathbf{P} \tag{2.1}$$

A partir de la ley del paralelogramo se puede obtener otro método para determinar la suma de dos vectores. Este método llamado

[1]Algunas expresiones tienen magnitud y dirección pero no se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo. Aunque tales expresiones se pueden representar por medio de flechas, *no* se pueden considerar vectores.

Un grupo de expresiones de este tipo son las rotaciones finitas de un cuerpo rígido. Coloque un libro cerrado enfrente de usted sobre una mesa de manera que se encuentre en la forma habitual, con la portada hacia arriba y el lomo hacia la izquierda. Ahora rote el libro 180° con respecto a un eje paralelo al lomo (figura 2.3*a*); esta rotación puede ser representada por una flecha orientada, como se muestra en la figura, cuya longitud es igual a 180 unidades. Tomando el libro tal y como se encuentra en su nueva posición, rótelo

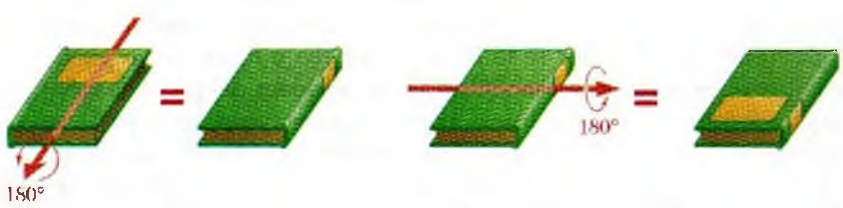


Figura 2.3 Rotaciones finitas de un cuerpo rígido

regla del triángulo se obtiene como sigue: considérese la figura 2.6, donde la suma de los vectores **P** y **Q** ha sido determinada por la ley del paralelogramo. Puesto que el lado del paralelogramo opuesto a **Q** es igual a **Q** en magnitud y dirección, se podría dibujar sólo la mitad del paralelogramo (figura 2.7*a*). De esta manera, la suma de los dos vectores puede encontrarse *colocando* **P** *y* **Q** *de punta a cola y uniendo la cola de* **P** *con la punta de* **Q**. En la figura 2.7*b* se considera la otra mitad del paralelogramo y se obtiene el mismo resultado. Esto confirma el hecho de que la suma vectorial es conmutativa.

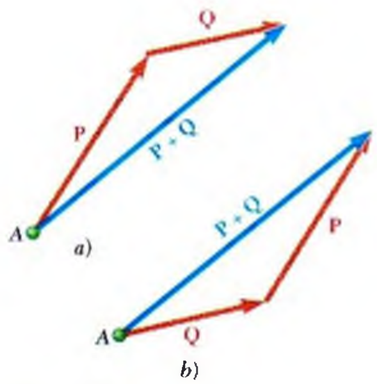


Figura 2.7

La *resta* de un vector se define como la adición del vector negativo correspondiente. De manera que el vector **P** − **Q** que representa la diferencia de los vectores **P** y **Q** se obtiene agregándole a **P** el vector negativo −**Q** (figura 2.8). Se escribe

$$\mathbf{P} - \mathbf{Q} = \mathbf{P} + (-\mathbf{Q}) \tag{2.2}$$

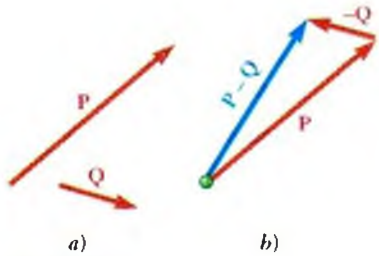


Figura 2.8

Aquí se debe observar otra vez que aunque se usa el mismo signo para representar tanto la sustracción vectorial como la escalar, se evitarán confusiones si se tiene cuidado en distinguir entre cantidades vectoriales y escalares.

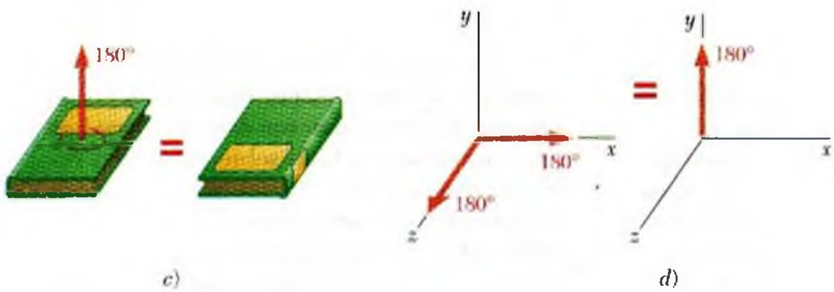
Ahora se considerará la *suma de tres o más vectores*. La suma de tres vectores **P**, **Q** y **S** se obtendrá *por definición*, sumando primero los vectores **P** y **Q** y agregando el vector **S** al vector **P** + **Q**. De manera que

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{S} \tag{2.3}$$

En forma semejante, la suma de cuatro vectores se obtiene agregando el cuarto vector a la suma de los tres primeros. Por consiguiente, la suma de cualquier número de vectores se puede obtener al aplicar en forma repetida la ley del paralelogramo a pares sucesivos de vectores, hasta que todos los vectores sean sustituidos por uno solo.

---

ahora 180° alrededor de un eje horizontal perpendicular al lomo (figura 2.3*b*); esta segunda rotación puede ser representada por medio de una flecha cuya longitud es igual a 180 unidades, orientada como se muestra en la figura. Sin embargo, el libro podría haberse colocado en esta posición final aplicando una sola rotación de 180° con respecto a un eje vertical (figura 2.3*c*). Se concluye que la suma de las dos rotaciones de 180° representadas por flechas rígidas, respectivamente, a lo largo de los ejes *z* y *x*, es una rotación de 180° representada por una flecha dirigida a lo largo del eje *y* (figura 2.3*d*). Es obvio que las rotaciones finitas de un cuerpo rígido *no* obedecen la ley del paralelogramo para la adición; por tanto, éstas *no pueden* ser representadas por medio de vectores.





Fotografía 2.1 Como se ha mostrado, puede usarse la ley del paralelogramo o bien la regla del triángulo para determinar la fuerza resultante ejercida por los dos cables largos que cuelgan del gancho.

Si los vectores dados son *coplanares*, es decir, si están contenidos en el mismo plano, su suma puede obtenerse fácilmente en forma gráfica. En ese caso, se prefiere la aplicación repetida de la regla del triángulo en vez de la ley del paralelogramo. En la figura 2.9 la suma de los tres vectores **P**, **Q** y **S** se obtuvo de esta forma: la regla del triángulo se aplicó primero para obtener la suma **P** + **Q** de los vectores **P** y **Q**; y volvió a aplicarse para obtener la suma de los vectores **P** + **Q** y **S**. Sin embargo, la determinación del vector **P** + **Q** pudo haberse omitido; obteniéndose directamente la suma de los tres vectores, como se muestra en la figura 2.10, *acomodando los vectores en la forma de cola a punta y conectando la cola del primer vector con la punta del último.* Ésta se conoce como la *regla del polígono* para la adición de vectores.

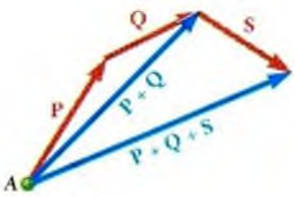


Figura 2.9

Se observa que el resultado obtenido permanecerá sin cambio si, como se muestra en la figura 2.11, los vectores **Q** y **S** se hubieran reemplazado por la suma de **Q** + **S**. Entonces se puede escribir

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{S} = \mathbf{P} + (\mathbf{Q} + \mathbf{S}) \tag{2.4}$$

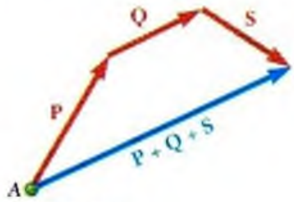


Figura 2.10

esta ecuación expresa el hecho de que la adición de vectores es *asociativa*. Es importante recordar que ya se demostró que la suma vectorial de dos vectores es también conmutativa, por lo que se escribe

$$\begin{aligned}\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} &= (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{S} = \mathbf{S} + (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) \\ &= \mathbf{S} + (\mathbf{Q} + \mathbf{P}) = \mathbf{S} + \mathbf{Q} + \mathbf{P}\end{aligned} \tag{2.5}$$

Esta expresión, junto con otras que pudieran obtenerse en la misma forma, muestra que el orden en que se sumen varios vectores no importa (figura 2.12).

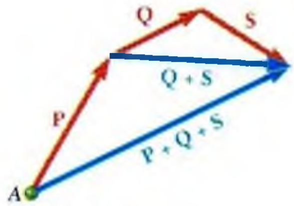


Figura 2.11

Producto de un escalar y un vector. Como es conveniente representar la suma **P** + **P** como 2**P**, a la suma **P** + **P** + **P** como 3**P**, y en general a la suma de *n* vectores **P** iguales como el producto *n***P**, se definirá el producto *n***P** de un entero positivo *n* y un vector **P**, como un vector que tiene la misma dirección que **P** y magnitud *nP* (léase *n* veces *P*). Al ampliar esta definición para incluir a todos los escalares y si recordamos la definición de un vector negativo dada en la sección 2.3, se define el producto *k***P** de un escalar *k* y un vector **P** como un vector que tiene la misma dirección y sentido que **P** (si *k* es positivo), o la misma dirección pero sentido opuesto al de **P** (si *k* es negativo) y una magnitud igual al producto de *P* y el valor absoluto de *k* (figura 2.13).

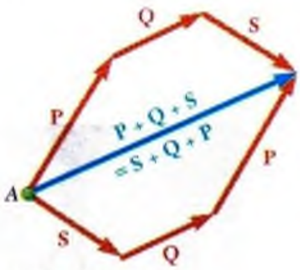


Figura 2.12

2.5. RESULTANTE DE VARIAS FUERZAS CONCURRENTES

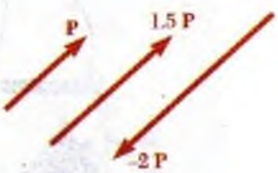


Figura 2.13

Considérese una partícula *A* sujeta a varias fuerzas coplanares, es decir, a varias fuerzas contenidas en el mismo plano (figura 2.14*a*). Como todas estas fuerzas pasan por *A*, se dice que son *concurrentes*. Los vectores que representan las fuerzas que actúan sobre *A* pueden sumarse con la regla del polígono (figura 2.14*b*). Puesto que el uso de la regla del polígono es equivalente a la aplicación repetida de la ley del paralelogramo, el vector **R** obtenido representa la resultante de las fuerzas concurrentes que intervienen, es decir, la fuerza que produce el mismo efecto sobre la partícula *A* que las fuerzas dadas. Como se in-

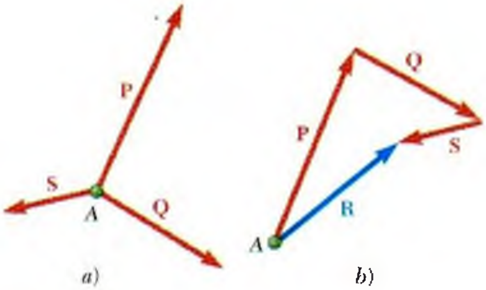


Figura 2.14

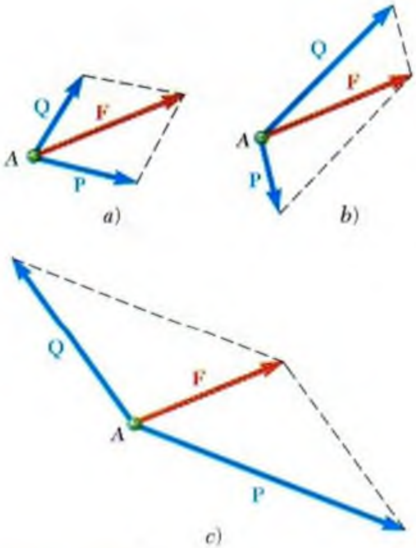


Figura 2.15

dicó antes, no importa el orden en el que se sumen los vectores **P**, **Q** y **S** que representan las fuerzas sobre la partícula.

2.6. DESCOMPOSICIÓN DE UNA FUERZA EN SUS COMPONENTES

Se ha visto que dos o más fuerzas que actúan sobre una partícula pueden sustituirse por una sola fuerza que produce el mismo efecto sobre la partícula. De la misma manera, una sola fuerza **F** que actúa sobre una partícula puede reemplazarse por dos o más fuerzas que produzcan juntas el mismo efecto sobre la partícula. A estas fuerzas se les llama *componentes* de la fuerza original **F**, y al proceso de sustituirlas en lugar de **F** se le llama *descomposición de la fuerza* **F** *en sus componentes.*

En este sentido, para cada fuerza **F** existe un número infinito de conjuntos de componentes. Los conjuntos de *dos componentes* **P** *y* **Q** son los más importantes en cuanto a aplicaciones prácticas se refiere. Pero aun en este caso, el número de formas en las que una fuerza **F** puede descomponerse en sus componentes es ilimitado (figura 2.15). Dos casos son de especial interés:

1. *Una de las dos componentes,* **P**, *se conoce.* La segunda componente, **Q**, se obtiene aplicando la regla del triángulo y uniendo la punta de **P** a la punta de **F** (figura 2.16); la magnitud, la dirección y el sentido de **Q** se determinan gráficamente o por trigonometría. Una vez que **Q** se ha determinado, ambas componentes **P** y **Q** deben aplicarse en *A*.

2. *Se conoce la línea de acción de cada una de las componentes.* La magnitud y el sentido de las componentes se obtiene al aplicar la ley del paralelogramo y trazando líneas, por la punta de **F**, paralelas a las líneas de acción dadas (figura 2.17). De esta forma se obtienen dos componentes bien definidas **P** y **Q**, que pueden determinarse gráficamente o por trigonometría aplicando la ley de los senos.

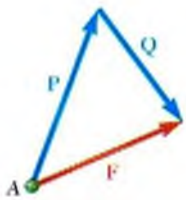


Figura 2.16

Pueden encontrarse muchos otros casos; por ejemplo, cuando la dirección de una de las componentes se conoce y se busca que la magnitud de la otra sea lo más pequeña posible (véase problema resuelto 2.2). En todos los casos se traza un triángulo o un paralelogramo adecuado que satisfaga las condiciones.

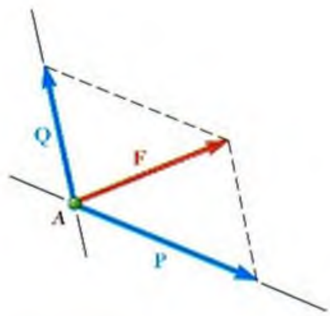
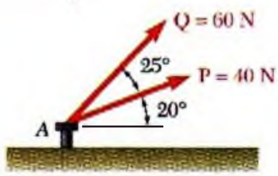
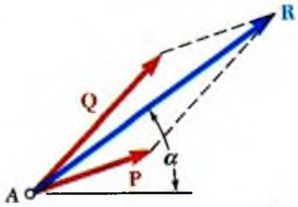


Figura 2.17



PROBLEMA RESUELTO 2.1

Las dos fuerzas **P** y **Q** actúan sobre el perno *A*. Determínese su resultante.



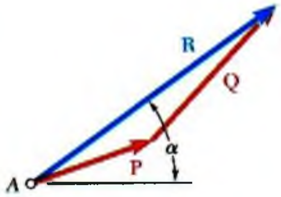
SOLUCIÓN

Solución gráfica. Dibuje a escala un paralelogramo con lados iguales a **P** y **Q**. La magnitud y la dirección de la resultante se miden y se encuentra que son

$$R = 98 \text{ N} \qquad \alpha = 35° \qquad \mathbf{R} = 98 \text{ N} \measuredangle 35° \blacktriangleleft$$

También puede usarse la regla del triángulo. Las fuerzas **P** y **Q** se dibujan de punta a cola y otra vez se obtienen la magnitud y la dirección de la resultante por medición directa.

$$R = 98 \text{ N} \qquad \alpha = 35° \qquad \mathbf{R} = 98 \text{ N} \measuredangle 35° \blacktriangleleft$$

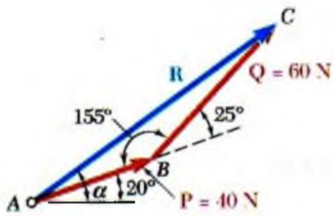


Solución trigonométrica. Se usa otra vez la regla del triángulo; los dos lados y el ángulo de la resultante se conocen. Se aplica la ley de los cosenos.

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos B$$
$$R^2 = (40 \text{ N})^2 + (60 \text{ N})^2 - 2(40 \text{ N})(60 \text{ N}) \cos 155°$$
$$R = 97.73 \text{ N}$$

Ahora con la aplicación de la ley de los senos, se escribe

$$\frac{\operatorname{sen} A}{Q} = \frac{\operatorname{sen} B}{R} \qquad \frac{\operatorname{sen} A}{6 \text{ N}} = \frac{\operatorname{sen} 155°}{97.73 \text{ N}} \tag{1}$$



Al resolver la ecuación (1) para el seno de *A*, se tiene

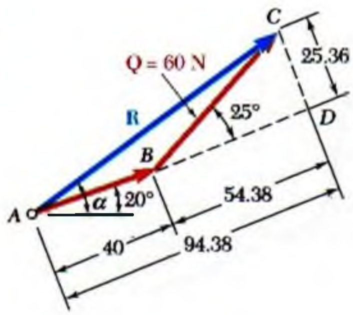
$$\operatorname{sen} A = \frac{(60 \text{ N}) \operatorname{sen} 155°}{97.73 \text{ N}}$$

Con la calculadora se obtiene primero el cociente, luego su arco seno y el resultado es

$$A = 15.04° \qquad \alpha = 20° + A = 35.04°$$

Con el uso de tres cifras significativas para escribir el reultado (véase sección 1.6):

$$\mathbf{R} = 97.7 \text{ N} \measuredangle 35.0° \blacktriangleleft$$



Solución trigonométrica alternativa. Se construye el triángulo rectángulo *BCD* y se calcula

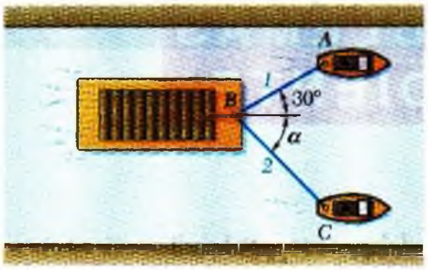
$$CD = (60 \text{ N}) \operatorname{sen} 25° = 25.36 \text{ N}$$
$$BD = (60 \text{ N}) \cos 25° = 54.38 \text{ N}$$

Al usar entonces el triángulo *ACD*, se obtiene

$$\tan A = \frac{25.36 \text{ N}}{94.38 \text{ N}} \qquad A = 15.04°$$

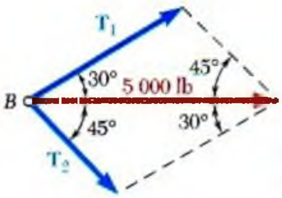
$$R = \frac{25.36}{\operatorname{sen} A} \qquad R = 97.73 \text{ N}$$

Otra vez, $\alpha = 20° + A = 35.04° \qquad \mathbf{R} = 97.7 \text{ N} \measuredangle 35.0° \blacktriangleleft$



PROBLEMA RESUELTO 2.2

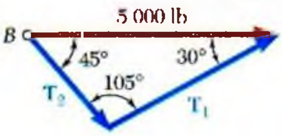
Un lanchón es arrastrado por dos remolcadores. Si la resultante de las fuerzas ejercidas por los remolcadores es una fuerza de 5 000 lb dirigida a lo largo del eje del lanchón, determine: *a*) la tensión en cada una de las cuerdas, sabiendo que $\alpha = 45°$, y *b*) el valor de α tal que la tensión en la cuerda 2 sea mínima.



SOLUCIÓN

a*) Tensión para $\alpha = 45°$. *Solución gráfica. Se emplea la ley del paralelogramo; la diagonal (resultante) se sabe que es igual a 5 000 lb y que está dirigida hacia la derecha; los lados se dibujan paralelos a las cuerdas. Si el dibujo se hace a escala puede medirse

$$T_1 = 3\ 700 \text{ lb} \qquad T_2 = 2\ 600 \text{ lb} \quad ◀$$

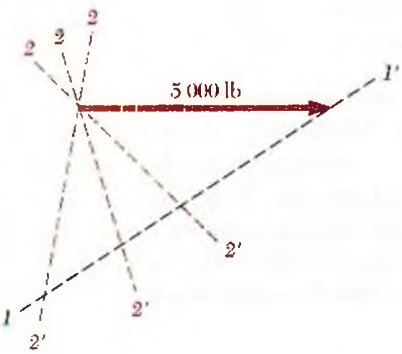


Solución trigonométrica. Puede usarse la regla del triángulo. Obsérvese que el triángulo mostrado representa la mitad del paralelogramo que se presenta antes. Si se emplea la ley de los senos, se escribe

$$\frac{T_1}{\text{sen } 45°} = \frac{T_2}{\text{sen } 30°} = \frac{5\ 000 \text{ lb}}{\text{sen } 105°}$$

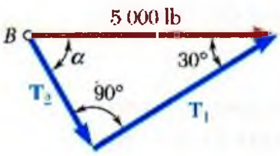
Con la calculadora, primero se calcula y se almacena el valor del último cociente. Al multiplicar este valor sucesivamente por sen 45° y sen 30°, se obtiene

$$T_1 = 3\ 660 \text{ lb} \qquad T_2 = 2\ 590 \text{ lb} \quad ◀$$



***b*) Valor de α para T_2 mínima.** Para determinar el valor de α tal que la tensión de la cuerda 2 sea mínima se usa otra vez la regla del triángulo. En el esquema mostrado, la línea *1-1'* es la dirección de $\mathbf{T}_1$. Las líneas 2-2' indican varias direcciones posibles de $\mathbf{T}_2$. Observe que el mínimo valor de T_2 ocurre cuando $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ son perpendiculares. El valor mínimo de T_2 es

$$T_2 = (5\ 000 \text{ lb}) \text{ sen } 30° = 2\ 500 \text{ lb}$$



Los valores correspondientes de T_1 y α son

$$T_1 = (5\ 000 \text{ lb}) \cos 30° = 4\ 330 \text{ lb}$$

$$\alpha = 90° - 30° \qquad \alpha = 60° \quad ◀$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Las secciones anteriores estuvieron dedicadas a la *ley del paralelogramo* para la adición de vectores.

Ahora se pedirá la resolución de problemas en forma independiente. Mientras que algunos problemas serán similares a los problemas resueltos otros no lo serán. Lo que tienen en común todos los problemas resueltos y los problemas propuestos correspondientes a esta sección es que se pueden resolver con la aplicación directa de la ley del paralelogramo.

La solución de un problema propuesto debe basarse en los siguientes pasos:

1. Identificar cuáles de las fuerzas son aplicadas y cuál es la resultante. En muchas ocasiones es útil escribir la ecuación vectorial que muestra la forma en que las fuerzas están relacionadas entre sí. Por ejemplo, en el problema resuelto 2.1 se tendría

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}$$

Es deseable tener presente esta relación al momento de formular la siguiente parte de la solución.

2. Dibujar un paralelogramo con las fuerzas aplicadas como dos lados adyacentes y la resultante como la diagonal que parte del origen de los dos vectores (figura 2.2). Se puede usar la *regla del triángulo,* alternativamente, con las fuerzas aplicadas dibujadas con la unión de la parte terminal de uno de los vectores a la parte inicial del otro y dibujando la fuerza resultante extendiéndose desde la parte inicial del primer vector hasta la parte terminal del segundo vector (figura 2.7).

3. Señalar todas las dimensiones. Con el uso de uno de los triángulos del paralelogramo, o el triángulo construido de acuerdo con la regla del triángulo, se deben señalar todas las dimensiones —ya sean lados o ángulos— y determinar las dimensiones desconocidas ya sea en forma gráfica o por trigonometría. Si se usa trigonometría, debe recordarse que la ley de los cosenos se debe aplicar primero si dos lados y el ángulo que éstos forman son conocidos [problema resuelto 2.1], y la ley de los senos debe aplicarse primero si uno de los lados y todos los ángulos son conocidos [problema resuelto 2.2].

Como es claro en las figuras de la sección 2.6, las dos componentes de una fuerza deben ser perpendiculares. Por tanto, cuando se requiera descomponer una fuerza en dos componentes, es esencial alinear los dos lados adyacentes del paralelogramo con las líneas de acción especificadas de las componentes.

Si se tiene un estudio previo de mecánica, se podría estar tentado a ignorar las técnicas de solución de esta sección en favor de descomponer las fuerzas en sus componentes rectangulares. A pesar de que este último método es importante y será considerado en la siguiente sección, el uso de la ley del paralelogramo simplifica la solución de muchos problemas y debe dominarse en estos momentos.

Problemas[†]

2.1 Dos fuerzas **P** y **Q** se aplican en el punto *A* del gancho que se muestra en la figura. Si $P = 15$ lb y $Q = 25$ lb, determine en forma gráfica la magnitud y la dirección de su resultante empleando *a*) la ley del paralelogramo, *b*) la regla del triángulo.

2.2 Dos fuerzas **P** y **Q** se aplican en el punto *A* del gancho que se muestra en la figura. Si $P = 45$ lb y $Q = 15$ lb, determine gráficamente la magnitud y la dirección de su resultante empleando *a*) la ley del paralelogramo, *b*) la regla del triángulo.

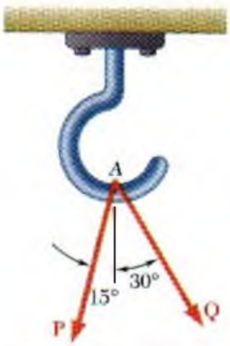


Figura P2.1 y P2.2

2.3 Dos fuerzas son aplicadas a una armella sujeta a una viga. Determine en forma gráfica la magnitud y la dirección de su resultante usando *a*) la ley del paralelogramo, *b*) la regla del triángulo.

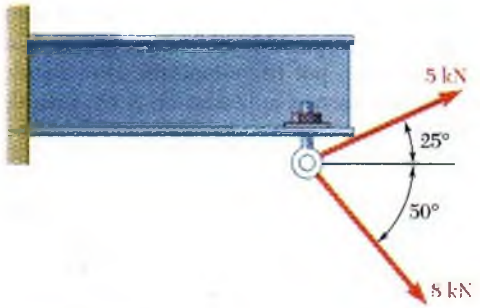


Figura *P2.3*

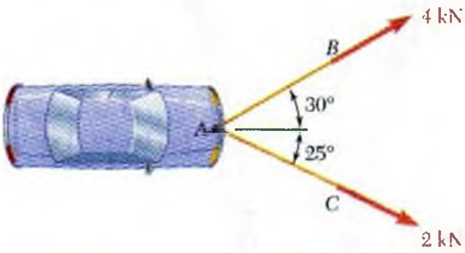


Figura P2.4

2.4 Un automóvil descompuesto es jalado por medio de cuerdas sujetas a las dos fuerzas que se muestran en la figura. Determine en forma gráfica la magnitud y la dirección de su resultante usando *a*) la ley del paralelogramo, *b*) la regla del triángulo.

2.5 La fuerza de 200 N se descompone en componentes a lo largo de las líneas *a-a'* y *b-b'*. *a*) Determine por trigonometría el ángulo α sabiendo que la componente a lo largo de *a-a'* es de 150 N. *b*) ¿Cuál es el valor correspondiente de la componente a lo largo de *b-b'*?

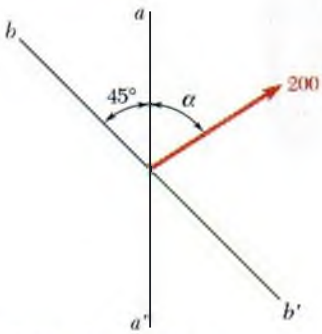


Figura P2.5 y P2.6

2.6 La fuerza de 200 N se descompone en componentes a lo largo de las líneas *a-a'* y *b-b'*. *a*) Determine por trigonometría el ángulo α sabiendo que la componente a lo largo de *b-b'* es de 120 N. *b*) ¿Cuál es el valor correspondiente de la componente a lo largo de *a-a'*?

2.7 Se aplican dos fuerzas en el gancho de apoyo que se muestra en la figura. Sabiendo que la magnitud de **P** es de 600 N, determine por trigonometría *a*) el ángulo α requerido si la resultante **R** de las dos fuerzas aplicadas en el gancho es vertical, y *b*) la magnitud correspondiente de **R**.

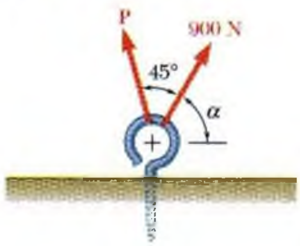


Figura P2.7

[†]Las respuestas para todos los problemas cuyo número está en un tipo de letra recta (como **2.1**) se proporcionan al final del libro. Las respuestas para los problemas cuyo número está en letra cursiva (como ***2.3***) no se proporcionan.

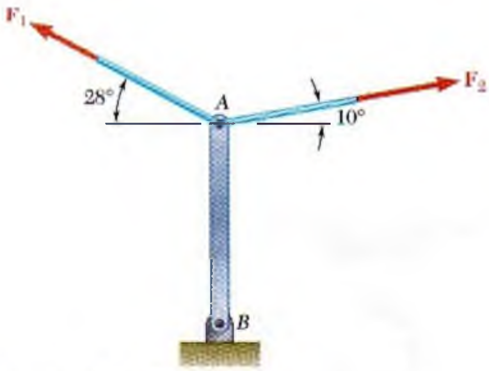


Figura P2.8 y *P2.9*

2.8 Dos varillas de control están unidas en A a la palanca AB. Aplique trigonometría y, sabiendo que la fuerza en la varilla de la izquierda es $F_1 = 30$ lb, determine *a*) la fuerza F_2 requerida en la varilla derecha si la resultante **R** de las fuerzas ejercidas por las varillas sobre la palanca es vertical, *b*) la magnitud correspondiente de **R**.

2.9 Dos varillas de control están unidas en A a la palanca AB. Aplique trigonometría y, sabiendo que la fuerza en la varilla de la derecha es $F_2 = 20$ lb, determine *a*) la fuerza F_1 requerida en la varilla izquierda si la resultante **R** de las fuerzas ejercidas por las varillas sobre la palanca es vertical, *b*) la magnitud correspondiente de **R**.

2.10 Una banda elástica para hacer ejercicio está sujeta y se estira como indica la figura 2.10. Si la tensión en las porciones BC y DE es igual a 80 y 60 N, respectivamente, determine, por trigonometría, *a*) el ángulo α requerido si la resultante **R** de las dos fuerzas ejercidas en la mano en el punto A es vertical, *b*) la magnitud correspondiente de **R**.

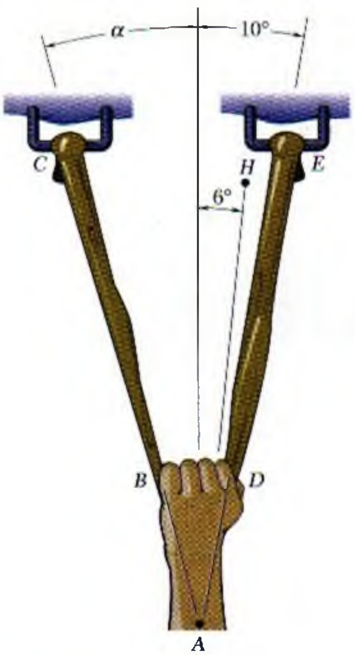


Figura P2.10

2.11 Dos cables sujetan un anuncio en el punto A para mantenerlo estable mientras es bajado a su posición definitiva. Sabiendo que $\alpha = 25°$, determine, por trigonometría, *a*) la magnitud requerida de la fuerza **P** si la resultante **R** de las dos fuerzas aplicadas en A es vertical, *b*) la magnitud correspondiente de **R**.

2.12 Dos cables sujetan un anuncio en el punto A para mantenerlo estable mientras es bajado a su posición definitiva. Sabiendo que la magnitud de **P** es de 70 lb, determine, por trigonometría, *a*) el ángulo α requerido si la resultante **R** de las dos fuerzas aplicadas en A es vertical, *b*) la magnitud correspondiente de **R**.

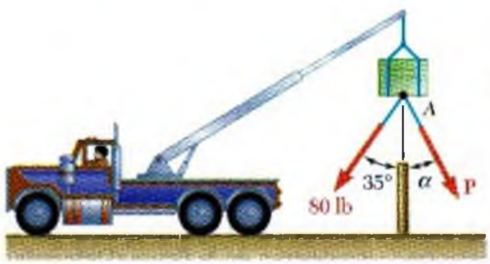


Figura P2.11 y *P2.12*

2.13 Como indica la figura P2.11, dos cables sujetan un anuncio en el punto A para mantenerlo estable mientras es bajado a su posición definitiva. Determine, por trigonometría, *a*) la magnitud y la dirección de la fuerza mínima **P** cuya resultante **R** de las dos fuerzas aplicadas en A es vertical, *b*) la magnitud correspondiente de **R**.

2.14 Una banda elástica para hacer ejercicio está sujeta y se estira como indica la figura P2.10. Si la tensión en la porción DE de la banda es igual a 70 N, determine, por trigonometría, *a*) la magnitud y la dirección de la fuerza mínima presente en la porción BC para la que la resultante **R** de las dos fuerzas ejercidas sobre la mano en el punto A se dirige a lo largo de una línea que une los puntos A y H, *b*) la magnitud correspondiente de **R**.

2.15 Resuelva el problema 2.1 empleando trigonometría.

2.16 Resuelva el problema 2.2 empleando trigonometría.

2.17 Resuelva el problema 2.3 empleando trigonometría.

2.18 Para el gancho del problema 2.7 determine, por trigonometría, la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas aplicadas en el gancho, si se sabe que $P = 500$ N y $\alpha = 60°$.

2.19 Dos elementos estructurales A y B están remachados al apoyo que se muestra en la figura. Si ambos elementos están en compresión, y la fuerza presente en el elemento A es de 30 kN y la del elemento B es de 20 kN determine, por trigonometría, la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas aplicadas al apoyo mediante los elementos A y B.

2.20 Dos elementos estructurales A y B están remachados al apoyo que se muestra en la figura. Si ambos elementos están en compresión y la fuerza presente en el elemento A es de 20 kN y la del elemento B es de 30 kN determine, por trigonometría, la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas aplicadas al apoyo mediante los elementos A y B.

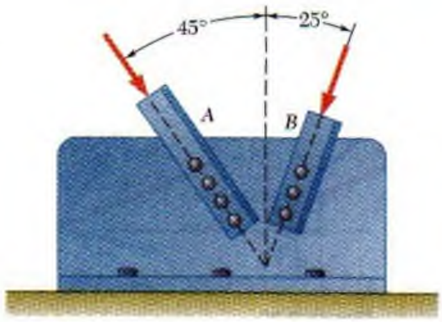


Figura P2.19 y *P2.20*

2.7. COMPONENTES RECTANGULARES DE UNA FUERZA. VECTORES UNITARIOS[†]

En muchos problemas será conveniente descomponer una fuerza en sus dos componentes perpendiculares entre sí. En la figura 2.18, la fuerza **F** se ha descompuesto en una componente $\mathbf{F}_x$ a lo largo del eje x y una componente $\mathbf{F}_y$ a lo largo del eje y. El paralelogramo trazado para obtener las dos componentes es un *rectángulo*, y las fuerzas $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$ se llaman *componentes rectangulares*.

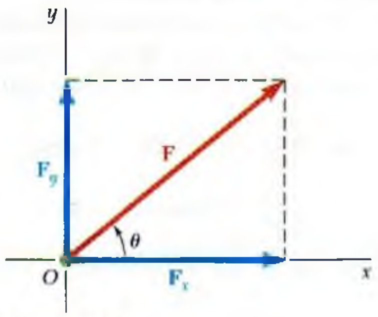


Figura 2.18

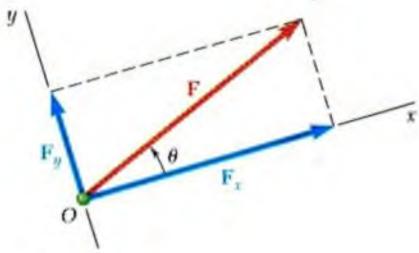


Figura 2.19

Los ejes x y y suelen elegirse a lo largo de las direcciones horizontal y vertical, respectivamente, como se muestra en la figura 2.18; sin embargo, pueden seleccionarse en cualesquiera otras dos direcciones perpendiculares, tal como indica la figura 2.19. Para determinar las componentes rectangulares de una fuerza debe pensarse que las líneas de construcción mostradas en las figuras 2.18 y 2.19 son *paralelas* a los ejes x y y en lugar de *perpendiculares* a ellos. Esta práctica ayudará a evitar errores en la determinación de componentes *oblicuas*, como se vio en la sección 2.6.

[†]Las propiedades establecidas en las secciones 2.7 y 2.8 se pueden extender fácilmente a las componentes rectangulares de cualquier otra cantidad vectorial.

En este punto se introducirán dos vectores de magnitud unitaria dirigidos a lo largo de los ejes positivos x y y. A estos vectores se les llama *vectores unitarios* y se representan por $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$, respectivamente (figura 2.20). Al recordar la definición del producto de un escalar y un vector dada en la sección 2.4, se observa que las componentes rectangulares $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$ de una fuerza $\mathbf{F}$ pueden obtenerse con la multiplicación de sus respectivos vectores unitarios $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ por escalares apropiados (figura 2.21). Se escribe

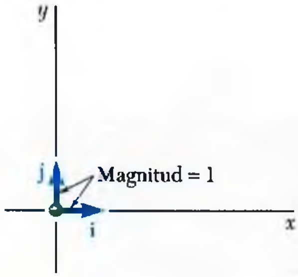


Figura 2.20

$$\mathbf{F}_x = F_x\mathbf{i} \qquad \mathbf{F}_y = F_y\mathbf{j} \tag{2.6}$$

y

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} \tag{2.7}$$

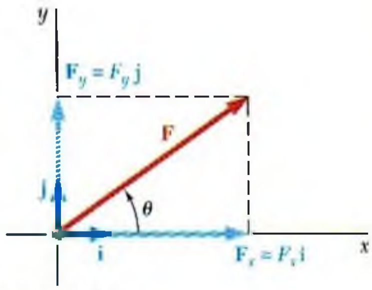


Figura 2.21

Mientras que los escalares F_x y F_y pueden ser positivos o negativos, dependiendo del sentido de $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$, sus valores absolutos son respectivamente iguales a las magnitudes de las componentes de las fuerzas $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$. Los escalares F_x y F_y se llaman *componentes escalares* de la fuerza $\mathbf{F}$, mientras que las componentes reales de la fuerza $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$ son las *componentes vectoriales* de $\mathbf{F}$. Sin embargo, cuando no existe alguna posibilidad de confusión, a los vectores y a las componentes escalares de $\mathbf{F}$ puede llamárseles simplemente *componentes* de $\mathbf{F}$. Se observa que la componente escalar F_x es positiva cuando la componente vectorial $\mathbf{F}_x$ tiene el mismo sentido que el vector unitario $\mathbf{i}$ (es decir, el mismo sentido que el eje x positivo) y es negativa cuando $\mathbf{F}_x$ tiene el sentido opuesto. Una conclusión semejante puede obtenerse observando el signo de la componente escalar F_y.

Si se representa con F la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}$ y con θ el ángulo entre $\mathbf{F}$ y el eje x, medido en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj desde el eje x positivo (figura 2.21), se pueden expresar las componentes escalares de $\mathbf{F}$ como sigue:

$$F_x = F\cos\theta \qquad F_y = F\,\text{sen}\,\theta \tag{2.8}$$

Se observa que las relaciones obtenidas se satisfacen para cualquier valor del ángluo θ entre 0 y 360° y que éstas definen tanto los signos como los valores absolutos de las componentes escalares F_x y F_y.

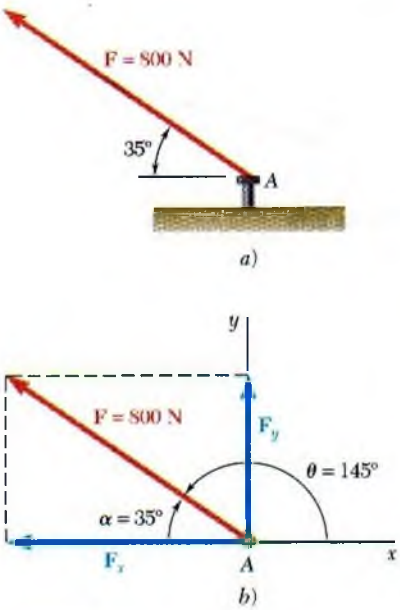


Figura 2.22

Ejemplo 1. Una fuerza de 800 N se ejerce sobre un perno A como se muestra en la figura 2.22*a*. Determínese las componentes horizontal y vertical de la fuerza.

Para obtener el signo correcto de las componentes escalares F_x y F_y, el valor $180° - 35° = 145°$ debe sustituirse por θ en las ecuaciones (2.8). Sin embargo, es más práctico determinar por inspección los signos de F_x y F_y (figura 2.22*b*) y usar las funciones trigonométricas del ángulo $\alpha = 35°$. Por consiguiente se puede escribir

$$F_x = -F\cos\alpha = -(800\text{ N})\cos 35° = -655\text{ N}$$
$$F_y = +F\,\text{sen}\,\alpha = +(800\text{ N})\,\text{sen}\,35° = +459\text{ N}$$

Las componentes vectoriales de $\mathbf{F}$ son entonces

$$\mathbf{F}_x = -(655\text{ N})\mathbf{i} \qquad \mathbf{F}_y = +(459\text{ N})\mathbf{j}$$

y $\mathbf{F}$ se puede escribir en la forma

$$\mathbf{F} = -(655\text{ N})\mathbf{i} + (459\text{ N})\mathbf{j}$$

Ejemplo 2. Un hombre jala una cuerda atada a un edificio con una fuerza de 300 N, como se muestra en la figura 2.23*a*. ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida por la cuerda en el punto *A*?

A partir de la figura 2.23*b* se ve que

$$F_x = +(300\text{ N})\cos\alpha \qquad F_y = -(300\text{ N})\text{ sen }\alpha$$

Observando que $AB = 10$ m, a partir de la figura 2.23*a* se encuentra que

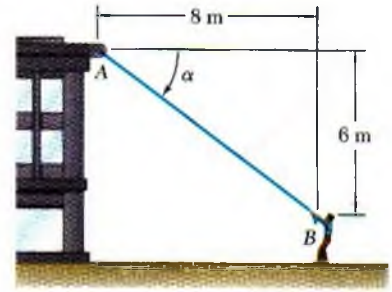
$$\cos\alpha = \frac{8\text{ m}}{AB} = \frac{8\text{ m}}{10\text{ m}} = \frac{4}{5} \qquad \text{sen }\alpha = \frac{6\text{ m}}{AB} = \frac{6\text{ m}}{10\text{ m}} = \frac{3}{5}$$

Entonces se obtiene

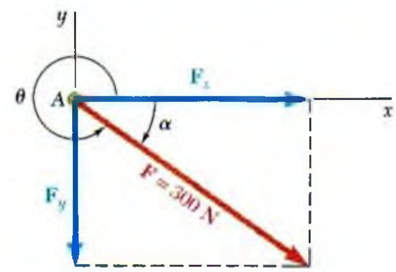
$$F_x = +(300\text{ N})\tfrac{4}{5} = +240\text{ N} \qquad F_y = -(300\text{ N})\tfrac{3}{5} = -180\text{ N}$$

y se escribe

$$\mathbf{F} = (240\text{ N})\mathbf{i} - (180\text{ N})\mathbf{j}$$



a)



b)

Figura 2.23

Si una fuerza **F** se define por sus componentes rectangulares F_x y F_y (véase figura 2.21), el ángulo θ que define su dirección puede obtenerse escribiendo

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} \tag{2.9}$$

La magnitud F de la fuerza se obtiene con el teorema de Pitágoras y escribiendo

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \tag{2.10}$$

o bien resolviendo para F una de las fórmulas de las ecuaciones (2.8).

Ejemplo 3. Una fuerza $\mathbf{F} = (700\text{ lb})\mathbf{i} + (1\,500\text{ lb})\mathbf{j}$ se aplica a un perno A. Determínese la magnitud de la fuerza y el ángulo θ que forma con la horizontal.

Primero se dibuja un diagrama que muestra las dos componentes rectangulares de la fuerza y el ángulo θ (figura 2.24). A partir de la ecuación (2.9), se escribe

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{1\,500\text{ lb}}{700\text{ lb}}$$

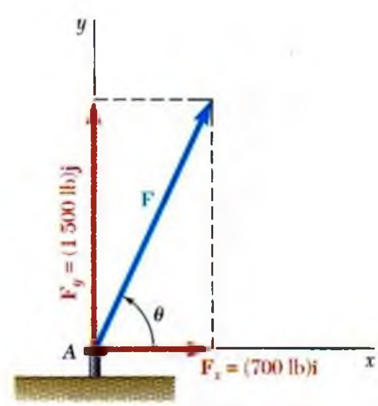


Figura 2.24

Con la calculadora,[1] se hace la división de 1 500 lb entre 700 lb; se calcula el arco tangente de este cociente y se obtiene $\theta = 65.0°$. Al resolver la segunda de las ecuaciones (2.8) para F, se tiene

$$F = \frac{F_y}{\text{sen }\theta} = \frac{1\,500\text{ lb}}{\text{sen }65.0°} = 1\,655\text{ lb}$$

El último cálculo se facilita si el valor de F_y se almacena en la memoria desde que se introduce, de manera que pueda ser llamado para dividirse entre sen θ.

[1] Se supone que la calculadora que se está utilizando tiene teclas para el cálculo de funciones trigonométricas y de funciones trigonométricas inversas. Algunas calculadoras también tienen teclas para convertir directamente de coordenadas rectangulares a coordenadas polares y viceversa. Este tipo de calculadoras eliminan la necesidad de calcular funciones trigonométricas en los ejemplos 1, 2 y 3 y en problemas del mismo tipo.

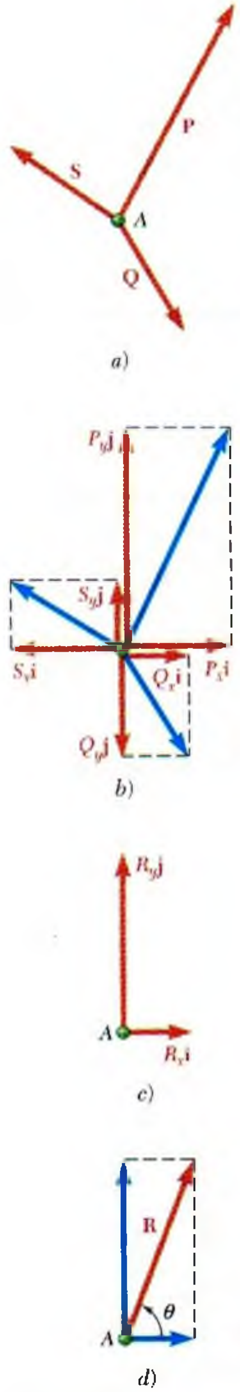


Figura 2.25

2.8. ADICIÓN DE FUERZAS SUMANDO SUS COMPONENTES *X* Y *Y*

En la sección 2.2 se estudió que las fuerzas deben sumarse de acuerdo con la ley del paralelogramo. A partir de esta ley se derivaron en las secciones 2.4 y 2.5 otros dos métodos más directos aplicables a la solución *gráfica* de los problemas: la regla del triángulo para la suma de dos fuerzas y la regla del polígono para la adición de tres o más fuerzas. También se vio que el triángulo de fuerzas usado para definir la resultante de dos fuerzas podría usarse para obtener una solución *trigonométrica*.

Cuando se van a sumar tres o más fuerzas, no puede obtenerse una solución trigonométrica práctica del polígono de fuerzas que define a la fuerza resultante. En este caso puede obtenerse una solución *analítica* del problema si se descompone cada fuerza en sus elementos rectangulares. Considere, por ejemplo, las tres fuerzas **P**, **Q** y **S** que actúan sobre una partícula *A* (figura 2.25*a*). Su resultante **R** está definida por la relación

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} \qquad (2.11)$$

Si se descompone cada fuerza en sus componentes rectangulares, se escribe

$$\begin{aligned} R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} &= P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + S_x\mathbf{i} + S_y\mathbf{j} \\ &= (P_x + Q_x + S_x)\mathbf{i} + (P_y + Q_y + S_y)\mathbf{j} \end{aligned}$$

de donde se tiene que

$$R_x = P_x + Q_x + S_x \qquad R_y = P_y + Q_y + S_y \qquad (2.12)$$

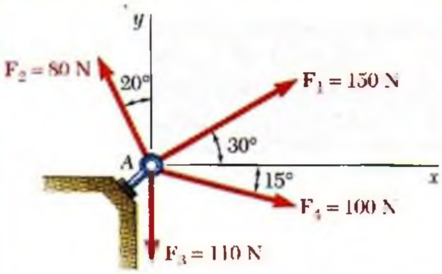
o, en forma breve,

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad (2.13)$$

Por tanto, se puede concluir que *las componentes escalares R_x y R_y de la resultante* **R** *de varias fuerzas que actúan sobre una partícula se obtienen separando de manera algebraica las correspondientes componentes escalares de las fuerzas dadas.*[†]

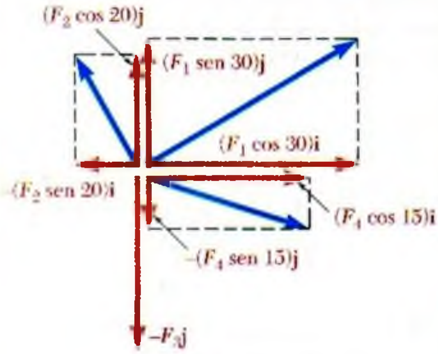
En la práctica, la determinación de la resultante **R** se realiza en tres etapas, como se ilustra en la figura 2.25. Primero, las fuerzas mostradas en la figura 2.25*a* se descomponen en sus componentes *x* y *y* (figura 2.25*b*). Con la suma de estas componentes *x* y *y* de **R** (figura 2.25*c*). Finalmente, la resultante $\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j}$ se determina aplicando la ley del paralelogramo (figura 2.25*d*). El procedimiento que se acaba de describir se realiza con más eficiencia si los cálculos se tabulan. Aunque éste es el único método analítico práctico para la adición de tres o más fuerzas, con frecuencia también se le prefiere sobre la solución trigonométrica en el caso de la suma de dos fuerzas.

[†]Obviamente, este resultado se puede aplicar también a la adición de otras cantidades vectoriales, aceleraciones o cantidades de movimiento.



PROBLEMA RESUELTO 2.3

Cuatro fuerzas actúan sobre un perno A como se muestra en la figura. Determine la resultante de las fuerzas sobre el perno.



SOLUCIÓN

Las componentes x y y de cada fuerza se determinan por trigonometría, como se muestra en la figura y se escriben en la tabla. De acuerdo con la convención adoptada en la sección 2.7, un número escalar que representa la componente de una fuerza es positivo si la componente tiene el mismo sentido que el correspondiente eje de coordenadas. Entonces, las componentes x que actúan a la derecha y las componentes y que actúan hacia arriba se representan por números positivos.

Fuerza	Magnitud, N	Componente x, N	Componente y, N
$\mathbf{F}_1$	150	+129.9	+75.0
$\mathbf{F}_2$	80	−27.4	+75.2
$\mathbf{F}_3$	110	0	−110.0
$\mathbf{F}_4$	100	+96.6	−25.9
		$R_x = +199.1$	$R_y = +14.3$

En estas condiciones la resultante **R** de las cuatro fuerzas es

$$\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} \qquad \mathbf{R} = (199.1 \text{ N})\mathbf{i} + (14.3 \text{ N})\mathbf{j} \quad \blacktriangleleft$$

La magnitud y la dirección de la resultante ya puede determinarse. Del triángulo mostrado en la figura, se tiene



$$\tan \alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{14.3 \text{ N}}{199.1 \text{ N}} \qquad \alpha = 4.1°$$

$$R = \frac{14.3 \text{ N}}{\text{sen } \alpha} = 199.6 \text{ N} \qquad \mathbf{R} = 199.6 \text{ N} \measuredangle 4.1° \quad \blacktriangleleft$$

El último cálculo puede facilitarse con el uso de calculadora, si el valor de R_y se almacena en la memoria al introducirse, de manera que pueda ser llamado para dividirse entre sen α. (Véase también la nota al pie de la página 29.)

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Como se vio en la lección anterior, la resultante de dos fuerzas puede ser determinada gráficamente o a partir de un triángulo oblicuo, con el uso de la trigonometría.

A. *Cuando están involucradas tres o más fuerzas,* la determinación de su resultante **R** se lleva a cabo de manera más sencilla descomponiendo primero cada una de las fuerzas en sus *componentes rectangulares.* Se pueden encontrar dos casos, que dependen de la forma en que esté definida cada una de las fuerzas dadas:

***Caso 1. La fuerza* F *está definida por medio de su magnitud* F *y el ángulo* α *que forma con el eje de las* x.** Las componentes x y y de la fuerza se pueden obtener, respectivamente, al multiplicar F por cos α y por sen α [ejemplo 1].

Caso 2. La fuerza* F *se define por medio de su magnitud* F *y las coordenadas de dos puntos* A *y* B *que se encuentran a lo largo de su línea de acción (figura 2.23). Por medio de la trigonometría, primero se puede determinar el ángulo α que **F** forma con el eje x. Sin embargo, las componentes de **F** también se pueden obtener directamente a partir de las proporciones entre las diversas dimensiones involucradas, sin determinar realmente α [ejemplo 2].

B. *Componentes rectangulares de la resultante.* Las componentes R_x y R_y de la resultante se pueden obtener con la suma algebraica de las componentes correspondientes de las fuerzas dadas [problema resuelto 2.3].

La resultante se puede expresar en *forma vectorial* con los vectores unitarios **i** y **j**, los cuales están dirigidos, respectivamente, a lo largo de los ejes x y y:

$$\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j}$$

De manera alternativa, se pueden determinar la *magnitud y la dirección* de la resultante resolviendo para R y para el ángulo que **R** forma con el eje x, el triángulo rectángulo de lados R_x y R_y.

En los ejemplos y en el problema resuelto de esta lección, los ejes x y y fueron, respectivamente, horizontal y vertical. Sin embargo, se debe recordar que, para algunos problemas, será más eficiente rotar los ejes para alinearlos con una o más fuerzas aplicadas.

Problemas

2.21 Determine las componentes x y y de cada una de las fuerzas que se muestran en la figura.

2.22 Determine las componentes x y y de cada una de las fuerzas que se muestran en la figura.

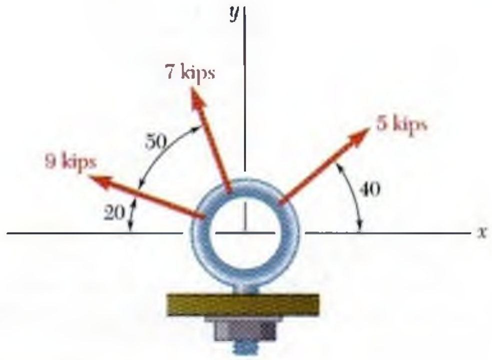


Figura P2.22

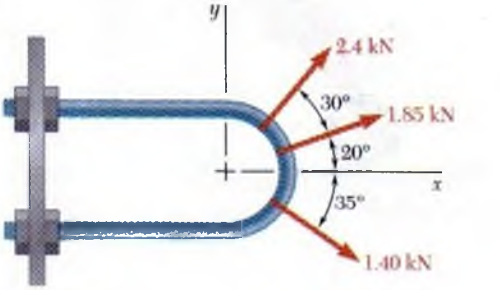


Figura P2.21

***2.23* y 2.24** Determine las componentes x y y de cada una de las fuerzas que se muestran en la figura.

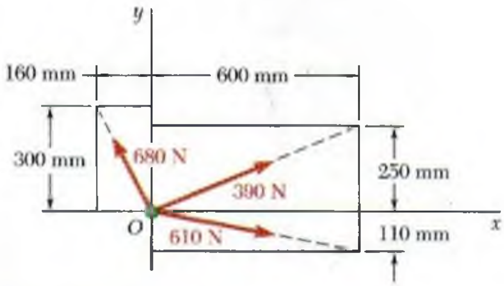


Figura *P2.23*

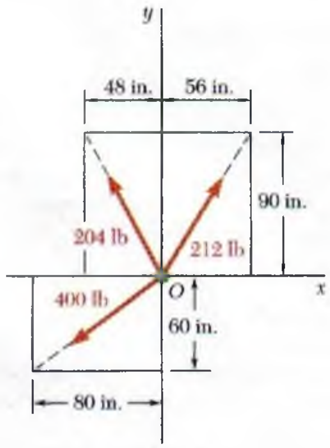


Figura P2.24

2.25 El elemento BD ejerce sobre el miembro ABC una fuerza **P** dirigida a lo largo de la línea BD. Si **P** debe tener una componente vertical de 960 N, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P**. *b*) su componente horizontal.

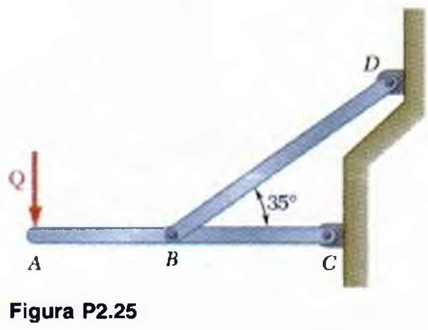


Figura P2.25



Figura P2.26

2.26 Mientras vacía una carretilla, una jardinera ejerce sobre cada mango AB una fuerza **P** dirigida a lo largo de la línea CD. Si **P** debe tener una componente horizontal de 30 lb, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P**, *b*) su componente vertical.

2.27 Sobre el codo BCD, la varilla de activador AB ejerce una fuerza **P** dirigida a lo largo de la línea AB. Si **P** debe tener una componente de 100 N perpendicular al brazo BC del codo, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P**, *b*) su componente a lo largo de la línea BC.

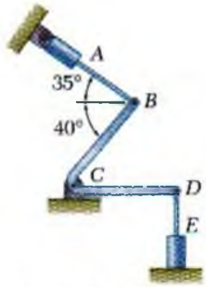


Figura *P2.27*

2.28 El elemento CB de la prensa de banco mostrada en la figura ejerce, sobre el bloque B, una fuerza **P** dirigida a lo largo de la línea CB. Si la componente horizontal de **P** debe tener una magnitud de 260 lb, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P**, *b*) su componente vertical.

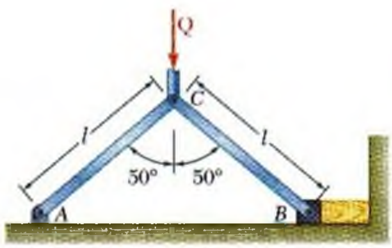


Figura P2.28



Figura P2.29 y *P2.30*

2.29 Se utiliza una garrocha para abrir una ventana como se muestra en la figura. Si la garrocha ejerce sobre la ventana una fuerza **P** dirigida a lo largo de la garrocha, y la magnitud de la componente vertical de **P** es de 45 N, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P**, *b*) su componente horizontal.

2.30 Se utiliza una garrocha para abrir una ventana como se muestra en la figura. Si la garrocha ejerce sobre la ventana una fuerza **P** dirigida a lo largo de la garrocha, y la magnitud de la componente horizontal de **P** es de 18 N, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P**, *b*) su componente vertical.

2.31 Determine la resultante de las tres fuerzas del problema 2.21.

2.32 Determine la resultante de las tres fuerzas del problema 2.22.

2.33 Determine la resultante de las tres fuerzas del problema 2.24.

2.34 Determine la resultante de las tres fuerzas del problema 2.23.

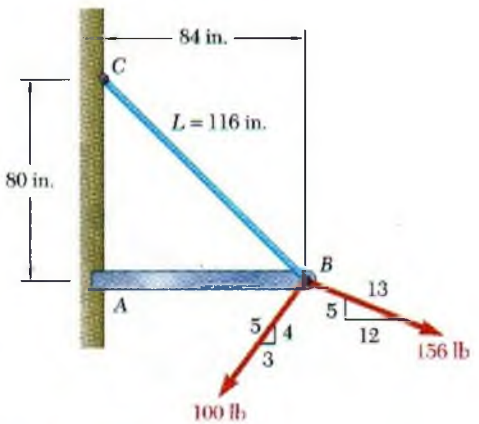


Figura P2.35

2.35 Si la tensión en el cable BC es de 145 lb, determine la resultante de las tres fuerzas ejercidas en el punto B de la viga AB.

2.36 Un collarín que puede deslizarse sobre una varilla vertical se somete a las tres fuerzas mostradas en la figura. Determine *a*) el valor del ángulo α para el que la resultante de las tres fuerzas es horizontal, *b*) la magnitud correspondiente de la resultante.

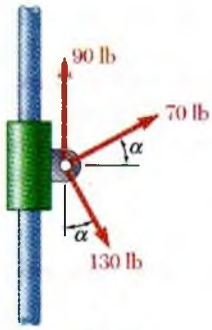


Figura *P2.36*

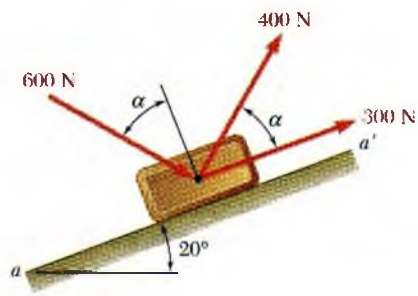


Figura P2.37

2.37 Si $\alpha = 65°$, determine la resultante de las tres fuerzas que se muestran en la figura.

2.38 Si $\alpha = 50°$, determine la resultante de las tres fuerzas que se muestran en la figura.

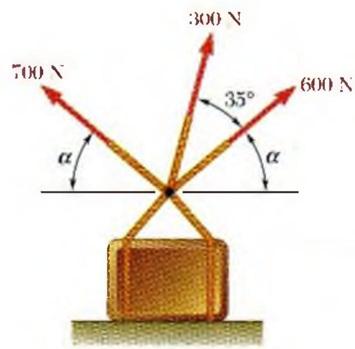


Figura P2.38

2.39 Para la viga del problema 2.35, determine *a*) la tensión requerida en el cable *BC* si la resultante de las tres fuerzas ejercidas en el punto *B* debe ser vertical, *b*) la magnitud correspondiente de la resultante.

2.40 Para las tres fuerzas del problema 2.38, determine *a*) el valor requerido de α si la resultante debe ser vertical, *b*) la magnitud correspondiente de la resultante.

2.41 Para el bloque del problema 2.37, determine *a*) el valor requerido de α si la resultante de las tres fuerzas mostradas debe ser paralela al plano inclinado, *b*) la magnitud correspondiente de la resultante.

2.42 El aguilón *AB* se sostiene en la posición mostrada en la figura mediante tres cables. Si las tensiones respectivas en los cables *AC* y *AD* son de 900 y de 1 200 lb, determine *a*) la tensión en el cable *AE* si la resultante de las tensiones ejercidas en el punto *A* del aguilón debe estar dirigida a lo largo de *AB*, *b*) la magnitud correspondiente de la resultante.

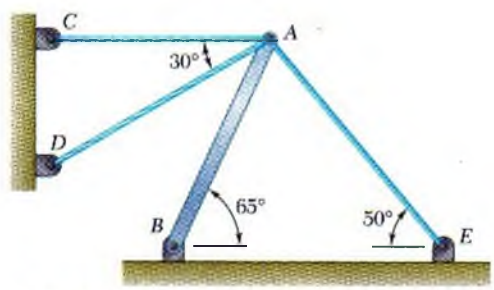


Figura *P2.42*

2.9. EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA

En las secciones anteriores se expusieron los métodos utilizados para determinar la resultante de varias fuerzas que actúan sobre una partícula. Aunque no ha ocurrido en ninguno de los problemas examinados hasta ahora, es posible que la resultante sea cero. En tal caso, el efecto neto de las fuerzas dadas es cero, y se dice que la partícula está en equilibrio. Entonces se tiene la siguiente definición: *si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula es cero, la partícula se encuentra en equilibrio.*

Una partícula sometida a la acción de dos fuerzas estará en equilibrio si ambas fuerzas tienen la misma magnitud, la misma línea de acción, pero sentidos opuestos. Entonces la resultante de las dos fuerzas es cero. En la figura 2.26 se ilustra este caso.

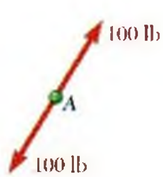


Figura 2.26

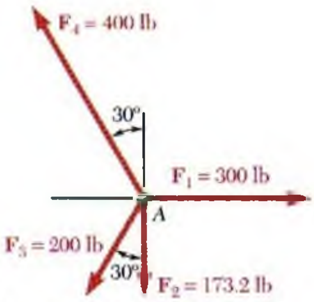


Figura 2.27

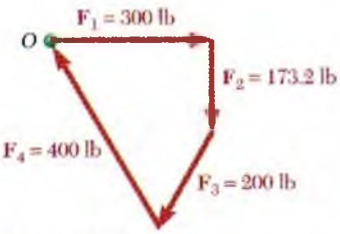


Figura 2.28

Otro caso de una partícula en equilibrio se muestra en la figura 2.27, donde aparecen cuatro fuerzas que actúan sobre A. En la figura 2.28, la resultante de las fuerzas dadas se determina por la regla del polígono. Empezando en el punto O con $\mathbf{F}_1$ y acomodando las fuerzas punta a cola, se encuentra que la punta de $\mathbf{F}_4$ coincide con el punto de partida O, así que la resultante $\mathbf{R}$ del sistema de fuerzas dado es cero y la partícula está en equilibrio.

El polígono cerrado de la figura 2.28 proporciona una expresión *gráfica* del equilibrio de A. Para expresar en forma *algebraica* las condiciones del equilibrio de una partícula se escribe

$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F} = 0 \tag{2.14}$$

Descomponiendo cada fuerza $\mathbf{F}$ en sus componentes rectangulares, se tiene

$$\Sigma(F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}) = 0 \qquad \text{o} \qquad (\Sigma F_x)\mathbf{i} + (\Sigma F_y)\mathbf{j} = 0$$

Se concluye que las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de una partícula son

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \tag{2.15}$$

Regresando a la partícula mostrada en la figura 2.27, se comprueba que las condiciones de equilibrio se satisfacen. Se escribe

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 300 \text{ lb} - (200 \text{ lb}) \text{ sen } 30° - (400 \text{ lb}) \text{ sen } 30° \\ &= 300 \text{ lb} - 100 \text{ lb} - 200 \text{ lb} = 0 \\ \Sigma F_y &= -173.2 \text{ lb} - (200 \text{ lb}) \cos 30° + (400 \text{ lb}) \cos 30° \\ &= -173.2 \text{ lb} - 173.2 \text{ lb} + 346.4 \text{ lb} = 0\end{aligned}$$

2.10. PRIMERA LEY DEL MOVIMIENTO DE NEWTON

A finales del siglo XVIII Sir Isaac Newton formuló tres leyes fundamentales en las que se basa la ciencia de la mecánica. La primera de estas leyes puede enunciarse como sigue:

Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es cero, la partícula permanecerá en reposo (si originalmente estaba en reposo) o se moverá con velocidad constante en línea recta (si originalmente estaba en movimiento).

De esta ley y de la definición de equilibrio expuesta en la sección 2.9, se deduce que una partícula en equilibrio puede estar en reposo o moviéndose en línea recta con velocidad constante. En la siguiente sección se considerarán varios problemas concernientes al equilibrio de una partícula.

2.11. PROBLEMAS RELACIONADOS CON EL EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA. DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE

En la práctica, un problema de ingeniería mecánica se deriva de una situación física real. Un esquema que muestra las condiciones físicas del problema se conoce como *diagrama espacial.*

Los métodos de análisis estudiados en las secciones anteriores se aplican a un sistema de fuerzas que actúan sobre una partícula. Un gran número de problemas que tratan de estructuras pueden reducirse a problemas concernientes al equilibrio de una partícula. Esto se hace

escogiendo una partícula significativa y dibujando un diagrama separado que muestra a ésta y a todas las fuerzas que actúan sobre ella. Dicho diagrama se conoce como *diagrama de cuerpo libre.*

Por ejemplo, considérese el embalaje de madera de 75 kg mostrado en el diagrama espacial de la figura 2.29*a*. Éste descansaba entre dos edificios y ahora es levantado hacia la plataforma de un camión que lo quitará de ahí. El embalaje está soportado por un cable vertical unido en A a dos cuerdas que pasan sobre poleas fijas a los edificios en B y C. Se desea determinar la tensión en cada una de las cuerdas AB y AC.

Para resolver el problema debe trazarse un diagrama de cuerpo libre que muestre a la partícula en equilibrio. Puesto que se analizan las tensiones en las cuerdas, el diagrama de cuerpo libre debe incluir al menos una de estas tensiones y si es posible a ambas. El punto A parece ser un buen cuerpo libre para este problema. El diagrama de cuerpo libre del punto A se muestra en la figura 2.29*b*. Ésta muestra al punto A y las fuerzas ejercidas sobre A por el cable vertical y las dos cuerdas. La fuerza ejercida por el cable está dirigida hacia abajo y es igual al peso W del contenedor. De acuerdo con la ecuación (1.4), se escribe

$$W = mg = (75 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 736 \text{ N}$$

y se indica este valor en el diagrama de cuerpo libre. Las fuerzas ejercidas por las dos cuerdas no se conocen, pero como son iguales en magnitud a la tensión en la cuerda AB y en la cuerda AC, se representan con $\mathbf{T}_{AB}$ y $\mathbf{T}_{AC}$ y se dibujan hacia fuera de A en las direcciones mostradas por el diagrama espacial. No se incluyen otros detalles en el diagrama de cuerpo libre.

Puesto que el punto A está en equilibrio, las tres fuerzas que actúan sobre él deben formar un triángulo cerrado cuando se dibujan de punta a cola. Este *triángulo de fuerzas* ha sido dibujado en la figura 2.29*c*. Los vectores T_{AB} y T_{AC} de las tensiones en las cuerdas pueden encontrarse gráficamente si el triángulo se dibuja a escala, o pueden encontrarse mediante la trigonometría. Si se escoge el último método de solución, con la ley de los senos se escribe

$$\frac{T_{AB}}{\text{sen } 60°} = \frac{T_{AC}}{\text{sen } 40°} = \frac{736 \text{ N}}{\text{sen } 80°}$$

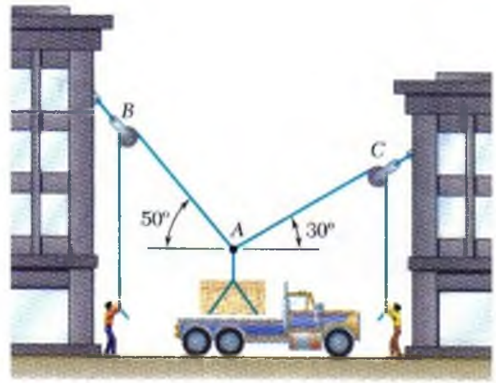
$$T_{AB} = 647 \text{ N} \qquad T_{AC} = 480 \text{ N}$$

Cuando una partícula está en *equilibrio bajo tres fuerzas*, el problema siempre puede resolverse dibujando un triángulo de fuerzas. Cuando una partícula está en *equilibrio bajo más de tres fuerzas*, el problema puede resolverse gráficamente dibujando un polígono de fuerzas. Si se desea una solución analítica, se deben resolver las *ecuaciones de equilibrio* dadas en la sección 2.9:

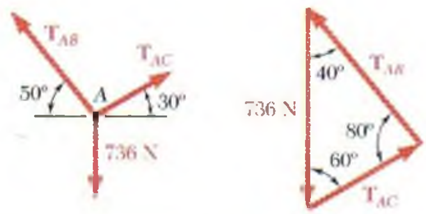
$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \tag{2.15}$$

Estas ecuaciones pueden resolverse para no más de *dos incógnitas*; en forma semejante, el triángulo de fuerzas usado en el caso de equilibrio bajo tres fuerzas puede resolverse para dos incógnitas.

Los tipos más comunes de problemas son aquellos donde las dos incógnitas representan 1) las dos componentes (o la magnitud y dirección) de una sola fuerza, 2) las magnitudes de las dos fuerzas, cada una de dirección conocida. También se encuentran problemas que requieren la determinación del valor máximo o mínimo de la magnitud de una fuerza (véanse problemas 2.59 a 2.63).



a) Diagrama espacial



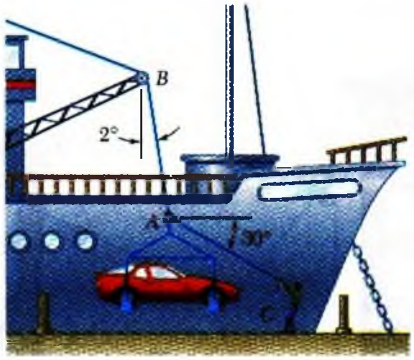
b) Diagrama de cuerpo libre *c*) Triángulo de fuerzas

Figura 2.29



Fotografía 2.2 Como se ilustró en un ejemplo anterior, es posible determinar las tensiones en los cables que sostienen al eje que se muestra en la fotografía, considerando al gancho como una partícula y después aplicando las ecuaciones de equilibrio a las fuerzas que actúan sobre el gancho.

PROBLEMA RESUELTO 2.4



En la operación de descarga de un barco, un automóvil de 3 500 lb es soportado por un cable. Se ata una cuerda al cable en A y se tira para centrar al automóvil sobre la posición deseada. El ángulo entre el cable y la vertical es de 2°, mientras que el ángulo entre la cuerda y la horizontal es de 30°. ¿Cuál es la tensión en la cuerda?

SOLUCIÓN

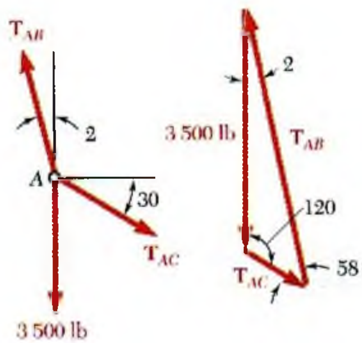


Diagrama de cuerpo libre. Se escoge el punto A como cuerpo libre y se dibuja el diagrama completo de cuerpo libre. T_{AB} es la tensión en el cable AB y T_{AC} es la tensión de la cuerda.

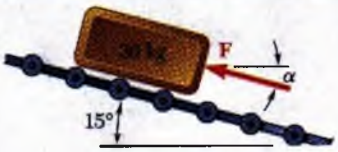
Condición de equilibrio. Como sólo actúan tres fuerzas sobre el cuerpo libre, se dibuja un triángulo de fuerzas para expresar que éste se encuentra en equilibrio. Con la ley de los senos se escribe

$$\frac{T_{AB}}{\text{sen } 120°} = \frac{T_{AC}}{\text{sen } 2°} = \frac{3\,500 \text{ lb}}{\text{sen } 58°}$$

Utilizando una calculadora, primero se calcula y se guarda el valor del último cociente. Se multiplica este valor en forma sucesiva por sen 120° y sen 2°, se obtiene

$$T_{AB} = 3\,570 \text{ lb} \qquad T_{AC} = 144 \text{ lb}$$ ◄

PROBLEMA RESUELTO 2.5



Determine la magnitud, dirección y sentido de la fuerza **F** más pequeña que mantendrá. en equilibrio al paquete que se muestra al margen. Nótese que la fuerza ejercida por los rodillos sobre el paquete es perpendicular al plano inclinado.

SOLUCIÓN

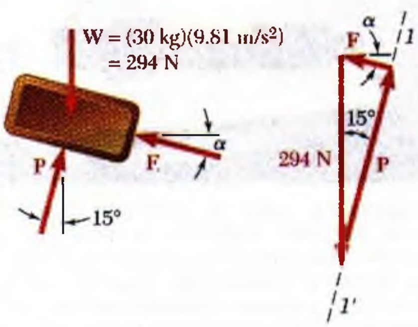
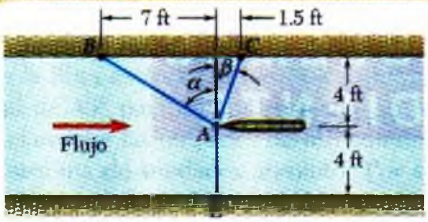


Diagrama de cuerpo libre. Se escoge el paquete como cuerpo libre, suponiendo que éste se puede tratar como partícula. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre correspondiente.

Condición de equilibrio. Puesto que sólo actúan tres fuerzas sobre el cuerpo libre, se dibuja un triángulo de fuerzas para expresar que está en equilibrio. La línea *1-1'* representa la dirección conocida de **P**. Para obtener el valor mínimo de la fuerza **F** se escoge la dirección de **F** perpendicular a la de **P**. De la geometría del triángulo obtenido, se encuentra que

$$F = (294 \text{ N}) \text{ sen } 15° = 76.1 \text{ N} \qquad \alpha = 15°$$

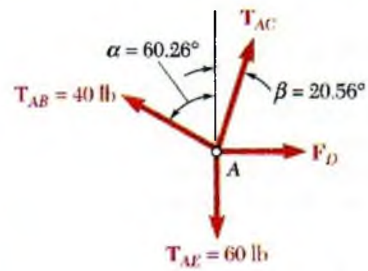
F = 76.1 N ⦪15° ◄



PROBLEMA RESUELTO 2.6

Como parte del diseño de un nuevo velero, se desea determinar la fuerza de arrastre que puede esperarse a cierta velocidad. Para hacerlo, se coloca un modelo del casco propuesto en un canal de prueba y se usan tres cables para mantener su proa en el eje del centro del canal. Las lecturas de los dinamómetros indican que para una velocidad dada la tensión es de 40 lb en el cable AB y de 60 lb en el cable AE. Determine la fuerza de arrastre ejercida sobre el casco y la tensión en el cable AC.

SOLUCIÓN



Determinación de los ángulos. En primer lugar se determinan los ángulos α y β que definen las direcciones de los cables AB y AC. Se escribe

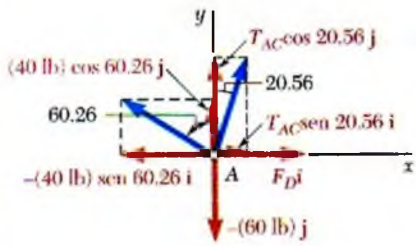
$$\tan \alpha = \frac{7 \text{ ft}}{4 \text{ ft}} = 1.75 \qquad \tan \beta = \frac{1.5 \text{ ft}}{4 \text{ ft}} = 0.375$$

$$\alpha = 60.26^\circ \qquad \beta = 20.56^\circ$$

Diagrama de cuerpo libre. Se escoge el casco como cuerpo libre, se traza el diagrama del cuerpo libre que incluye las fuerzas ejercidas por los tres cables sobre el casco, así como la fuerza de arrastre $\mathbf{F}_D$ ejercida por el flujo.

Condición de equilibrio. Se expresa que el casco está en equilibrio y la resultante de todas las fuerzas se escribe como cero:

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{T}_{AE} + \mathbf{F}_D = 0 \qquad (1)$$



Como aparecen más de tres fuerzas, se obtendrán sus componentes x y y:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{AB} &= -(40 \text{ lb}) \text{ sen } 60.26^\circ\mathbf{i} + (40 \text{ lb}) \cos 60.26^\circ\mathbf{j} \\
&= -(34.73 \text{ lb})\mathbf{i} + (19.84 \text{ lb})\mathbf{j} \\
\mathbf{T}_{AC} &= T_{AC} \text{ sen } 20.56^\circ\mathbf{i} + T_{AC} \cos 20.56^\circ\mathbf{j} \\
&= 0.3512T_{AC}\mathbf{i} + 0.9363T_{AC}\mathbf{j} \\
\mathbf{T}_{AE} &= -(60 \text{ lb})\mathbf{j} \\
\mathbf{F}_D &= F_D\mathbf{i}
\end{aligned}$$

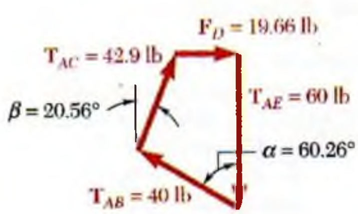
Se sustituyen las expresiones obtenidas en la ecuación (1) y se factorizan los vectores unitarios **i** y **j**, por lo que se tiene

$$(-34.73 \text{ lb} + 0.3512T_{AC} + F_D)\mathbf{i} + (19.84 \text{ lb} + 0.9363T_{AC} - 60 \text{ lb})\mathbf{j} = 0$$

Esta ecuación se cumplirá si, y sólo si, los coeficientes de **i** y **j** son iguales a cero. Así se obtienen las siguientes dos ecuaciones de equilibrio, que expresan, respectivamente, que la suma de las componentes x y la suma de las componentes y de las fuerzas dadas debe ser cero.

$$\Sigma F_x = 0: \qquad -34.73 \text{ lb} + 0.3512T_{AC} + F_D = 0 \qquad (2)$$

$$\Sigma F_y = 0: \qquad 19.84 \text{ lb} + 0.9363T_{AC} - 60 \text{ lb} = 0 \qquad (3)$$



De la ecuación (3) se encuentra $\qquad T_{AC} = +42.9 \text{ lb}$ ◀

y sustituyendo este valor en la ecuación (2) se obtiene $F_D = +19.66 \text{ lb}$ ◀

Al dibujar el diagrama de cuerpo libre se supuso que había un sentido para cada fuerza desconocida. El signo positivo en la respuesta señala que el sentido supuesto era el correcto. Puede dibujarse el polígono de fuerzas completo y así comprobar los resultados.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Cuando una partícula está en *equilibrio*, la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula debe ser igual a cero. En el caso de una partícula sobre la que actúan *fuerzas coplanares*, expresar este hecho proporcionará dos relaciones entre las fuerzas involucradas. Como se vio en los problemas resueltos recién presentados, estas relaciones pueden utilizarse para determinar dos incógnitas —como la magnitud y la dirección de una fuerza o las magnitudes de dos fuerzas—.

Trazar un diagrama de cuerpo libre es el primer paso a seguir en la solución de un problema que involucre el equilibrio de una partícula. En este diagrama se muestran la partícula y todas las fuerzas que actúan sobre ella. En el diagrama de cuerpo libre debe indicarse la magnitud de las fuerzas conocidas, así como cualquier ángulo o dimensión que defina la dirección de una fuerza. Cualquier magnitud o ángulo desconocido deben designarse por medio de un símbolo adecuado. No tiene que incluirse ninguna otra información adicional en el diagrama de cuerpo libre.

Es indispensable trazar un diagrama de cuerpo libre claro y preciso para poder resolver cualquier problema de equilibrio. La omisión de este paso puede ahorrarnos lápiz y papel, pero es muy probable que nos lleve a una solución incorrecta.

Caso 1. ***Si sólo están involucradas tres fuerzas*** en el diagrama de cuerpo libre, el resto de la solución se lleva a cabo más fácilmente uniendo en un dibujo la parte terminal de una fuerza con la parte inicial de otra (punta), para formar un *triángulo de fuerzas*. Este triángulo puede resolverse gráficamente o por trigonometría para un máximo de dos incógnitas [problemas resueltos 2.4 y 2.5].

Caso 2. ***Si están involucradas más de tres fuerzas***, lo más conveniente es emplear una *solución analítica*. Los ejes x y y se seleccionan y cada una de las fuerzas mostradas en el diagrama de cuerpo libre se descompone en sus componentes x y y. Al expresar que tanto la suma de las componentes en x como la suma de las componentes en y de las fuerzas son iguales a cero, se obtienen dos ecuaciones que pueden resolverse para no más de dos incógnitas [problema resuelto 2.6].

Se recomienda firmemente que al emplear una solución analítica se escriban las ecuaciones de equilibrio en la misma forma que las ecuaciones (2) y (3) del problema resuelto 2.6. La práctica adoptada por algunos estudiantes de colocar al inicio las incógnitas del lado izquierdo de la ecuación y las cantidades conocidas del lado derecho puede llevar a una confusión al momento de asignar el signo correcto a cada uno de los términos.

Se ha señalado que, independientemente del método empleado para resolver un problema de equilibrio bidimensional, sólo puede determinarse un máximo de dos incógnitas. Si un problema bidimensional involucra más de dos incógnitas, deben obtenerse una o más relaciones adicionales a partir de la información contenida en el enunciado del problema.

Algunos de los siguientes problemas involucran pequeñas poleas. Se supondrá que las poleas están libres de fricción, por tanto, la tensión en la cuerda o cable que pase por una polea es la misma en cada uno de sus lados. En el capítulo 4 se analizará por qué la tensión es la misma. Por último, como veremos en el capítulo 10, la magnitud de la fuerza **F** ejercida sobre un cuerpo por un resorte estirado o comprimido está dada por $F = kx$, donde k es la constante del resorte y x es una medida de su compresión o estiramiento con respecto a la longitud del resorte cuando éste no ha sido deformado.

Problemas

2.43 Si $\alpha = 50°$ y el aguilón AC ejerce sobre la articulación C una fuerza dirigida a lo largo de la línea AC, determine *a*) la magnitud de la fuerza, *b*) la tensión en el cable BC.

2.44 Dos cables se amarran juntos en C y se cargan como indica la figura. Determine la tensión en *a*) el cable AC, *b*) el cable BC.

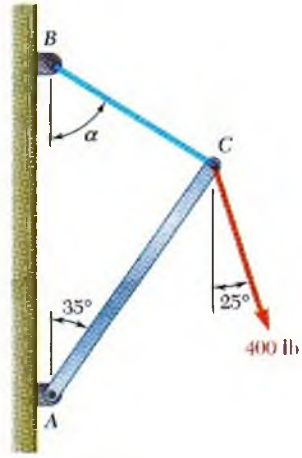


Figura P2.43

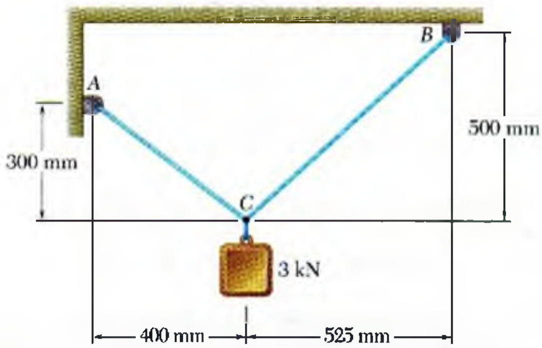


Figura P2.44

2.45 Una componente de máquina con forma irregular se mantiene en la posición mostrada en la figura por medio de tres sujetadores. Si $F_A = 940$ N, determine las magnitudes de las fuerzas F_B y F_C ejercidas por los otros dos sujetadores.

2.46 Las cuerdas AB y AC son lanzadas a una persona cuya lancha se ha hundido. Si $\alpha = 25°$ y la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}_R$ ejercida por el río sobre el lanchero es de 70 lb, determine la tensión en *a*) la cuerda AB, *b*) la cuerda AC.

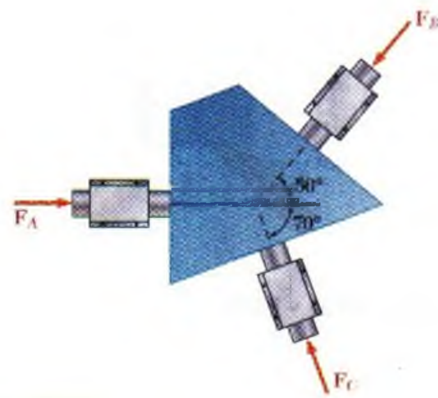


Figura *P2.45*

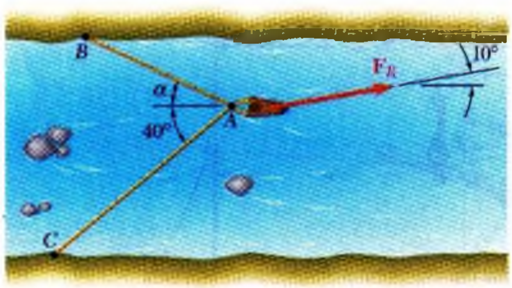


Figura P2.46

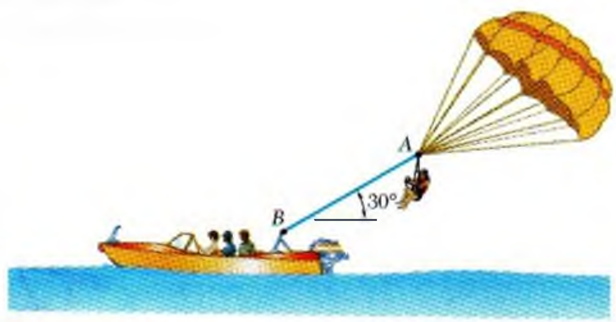


Figura P2.47

2.47 Un bote jala a un paracaídas y su pasajero a una velocidad constante. Si el pasajero pesa 550 N y la fuerza resultante $\mathbf{R}$ ejercida por el paracaídas sobre la horquilla A forma un ángulo de 65° con la horizontal, determine *a*) la tensión en la cuerda de remolque AB, *b*) la magnitud de $\mathbf{R}$.

2.48 Dos semáforos se cuelgan temporalmente de un cable como se muestra en la figura. Si el semáforo colocado en B pesa 300 N, determine el peso del semáforo en C.

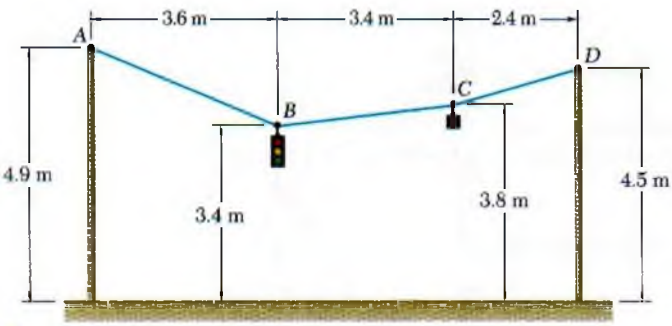


Figura *P2.48*

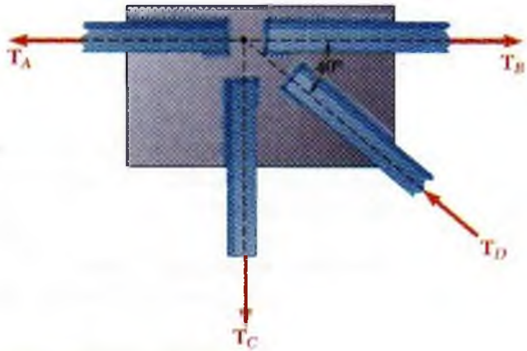


Figura P2.49 y *P2.50*

2.49 Dos fuerzas de magnitud $T_A = 8$ kips y $T_B = 15$ kips se aplican a una conexión soldada como indica la figura. Si la conexión está en equilibrio, determine las magnitudes de las fuerzas T_C y T_D.

2.50 Dos fuerzas de magnitud $T_A = 6$ kips y $T_C = 9$ kips se aplican a una conexión soldada como indica la figura. Si la conexión está en equilibrio, determine las magnitudes de las fuerzas T_B y T_D.

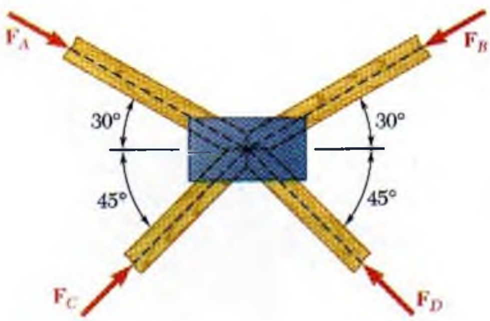


Figura P2.51 y P2.52

2.51 Los cuatro elementos de madera que se muestran en la figura están unidos con una placa de metal y se encuentran en equilibrio sometidos a la acción de cuatro fuerzas. Si $F_A = 2.3$ kN y $F_B = 2.1$ kN, determine las magnitudes de las otras dos fuerzas.

2.52 Los cuatro elementos de madera que se muestran en la figura están unidos con una placa de metal y se encuentran en equilibrio sometidos a la acción de cuatro fuerzas. Si $F_A = 1.9$ kN y $F_C = 2.4$ kN, determine las magnitudes de las otras dos fuerzas.

2.53 En un acto circense, un acróbata realiza un parado de manos sobre una rueda mientras su asistente lo jala a lo largo del cable ABC de 8 m de largo que se muestra en la figura. Si la tensión en la cuerda DE es de 35 N cuando el acróbata se sostiene en equilibrio en $a = 2.5$ m, determine *a*) el peso del acróbata, *b*) la tensión en el cable.

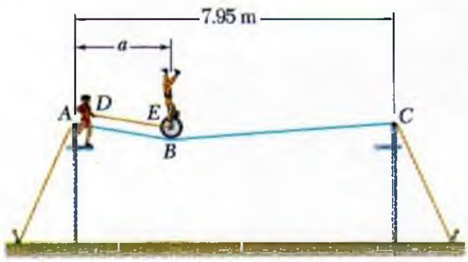


Figura P2.53 y P2.54

2.54 En un acto circense, un acróbata realiza un parado de manos sobre una rueda mientras su asistente lo jala a lo largo del cable ABC de 8 m de largo que se muestra en la figura. Si el acróbata pesa 720 N y se sostiene en equilibrio en $a = 3$ m, determine *a*) la tensión en el cable, *b*) la tensión en la cuerda DE.

2.55 Dos cables se amarran juntos en C y son cargados como indica la figura. Si $W = 190$ lb, determine la tensión en *a*) el cable AC, *b*) el cable BC.

2.56 Dos cables se amarran juntos en C y son cargados como indica la figura. Determine el rango de valores de W para los que la tensión no será mayor de 240 lb en cualquiera de los cables.

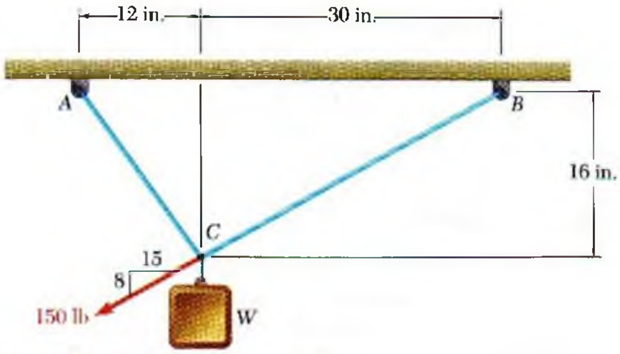


Figura P2.55 y *P2.56*

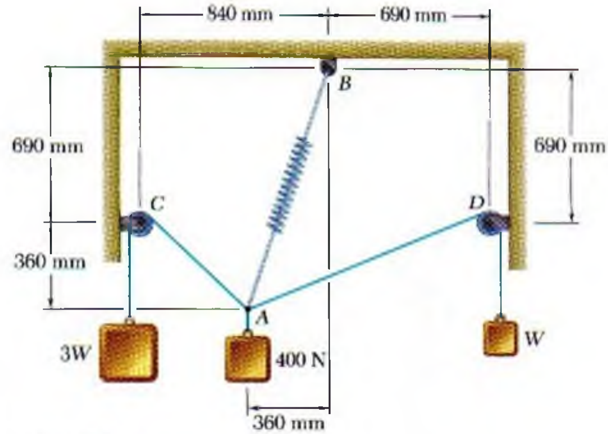


Figura P2.57

2.57 Una carga con peso de 400 N está suspendida de un resorte y dos cuerdas, las cuales se unen a dos bloques de pesos $3W$ y W como se muestra en la figura. Si la constante del resorte es de 800 N/m, determine *a*) el valor de W, *b*) la longitud sin estirar del resorte.

2.58 Un bloque de peso W está suspendido de una cuerda de 25 in. de largo y de dos resortes cuyas longitudes sin estirar miden 22.5 in. cada una. Si las constantes de los resortes son $k_{AB} = 9$ lb/in. y $k_{AD} = 3$ lb/in., determine *a*) la tensión en la cuerda, *b*) el peso del bloque.

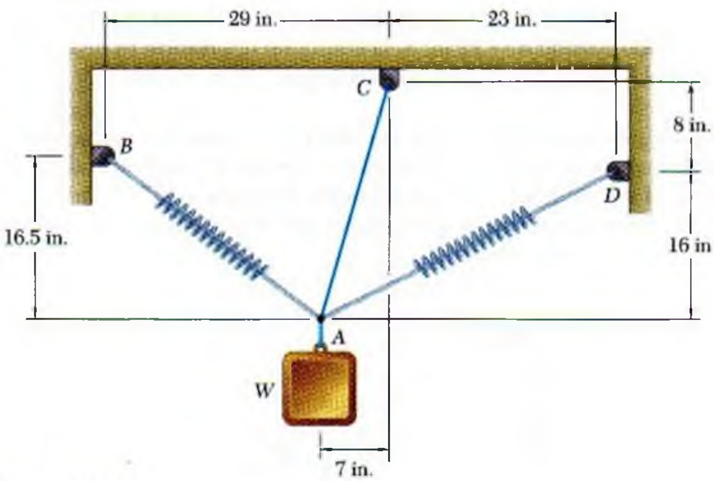


Figura P2.58

2.59 Para las cuerdas y la fuerza del río del problema 2.46, determine *a*) el valor de α para el que la tensión en la cuerda AB es la mínima posible, *b*) el valor correspondiente de la tensión.

2.60 Dos cables se amarran juntos en C y se cargan como indica la figura. Si la tensión máxima permisible en cada cable es de 900 N, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P** máxima que puede aplicarse en C, *b*) el valor correspondiente de α.

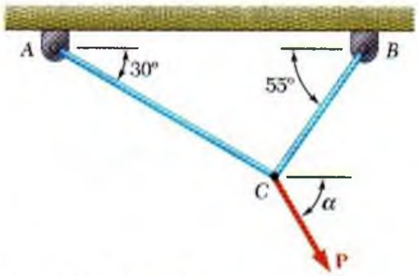


Figura P2.60 y P2.61

2.61 Dos cables se amarran juntos en C y se cargan como indica la figura. Si la tensión máxima permisible en el cable AC es de 1 400 N y en el cable BC es de 700 N, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P** máxima que puede aplicarse en C, *b*) el valor correspondiente de α.

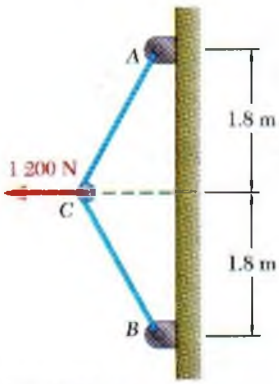


Figura P2.62

2.62 Si las porciones AC y BC del cable ACB deben ser iguales, determine la longitud mínima que debe tener el cable para soportar la carga mostrada si la tensión en éste no debe ser mayor a 870 N.

2.63 Para la estructura y la carga del problema 2.43, determine *a*) el valor de α para el que la tensión en el cable BC es mínima, *b*) el valor correspondiente de la tensión.

2.64 El collarín A puede deslizarse sin fricción en una barra vertical y está conectado a un resorte como indica la figura. La constante del resorte es de 4 lb/in. y éste no se encuentra estirado cuando $h = 12$ in. Si el sistema está en equilibrio cuando $h = 16$ in., determine el peso del collarín.

2.65 El collarín A de 9 lb puede deslizarse sin fricción en una barra vertical y está conectado a un resorte como indica la figura. El resorte no está estirado cuando $h = 12$ in. Si la constante del resorte es de 3 lb/in., determine el valor de h para el cual el sistema está en equilibrio.

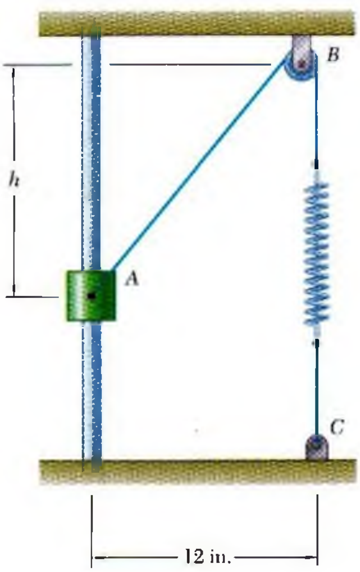


Figura *P2.64* y P2.65

2.66 El aguilón AB está soportado por el cable BC y una bisagra colocada en A. Si el aguilón ejerce sobre el punto B una fuerza dirigida a lo largo de sí mismo y la tensión en la cuerda BD es de 310 N, determine *a*) el valor de α para el que la tensión en el cable BC es mínima, *b*) el valor correspondiente de la tensión.

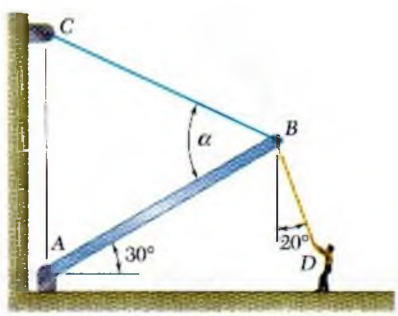


Figura P2.66

2.67 La fuerza **P** se aplica a una pequeña rueda que gira sobre el cable *ACB*. Si la tensión en ambas partes del cable es de 140 lb, determine la magnitud y la dirección de **P**.

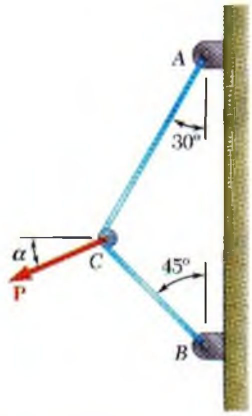


Figura P2.67

2.68 Una caja de madera de 280 kg está sostenida por varios arreglos de poleas y cuerdas, según indica la figura. Determine la tensión en la cuerda para cada arreglo. (*Sugerencia*: La tensión es la misma en ambos lados de una cuerda que pasa por una polea simple. Esto puede comprobarse aplicando los métodos del capítulo 4.)

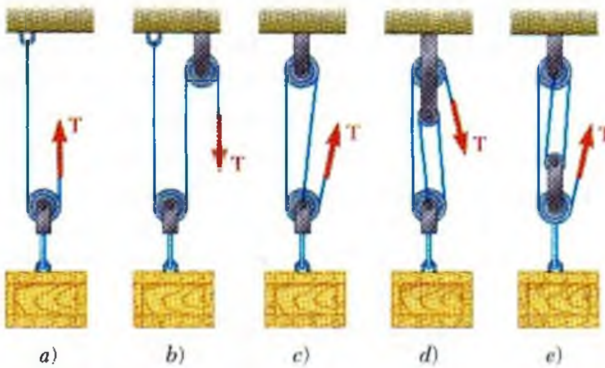


Figura *P2.68*

2.69 Resuelva los incisos *b*) y *d*) del problema 2.68 suponiendo que el extremo libre de la cuerda está unido a la caja de madera.

2.70 Una carga **Q** se aplica a la polea *C*, la cual puede rodar sobre el cable *ACB*. La polea se sostiene en la posición mostrada en la figura mediante un segundo cable *CAD* que pasa por la polea *A* y sostiene una carga **P**. Si *P* = 800 N, determine *a*) la tensión en el cable *ACB*, *b*) la magnitud de la carga **Q**.

2.71 Una carga **Q** de 2 000 N se aplica a la polea *C*, la cual puede rodar sobre el cable *ACB*. La polea se sostiene en la posición mostrada en la figura mediante un segundo cable *CAD* que pasa por la polea *A* y sostiene una carga **P**. Determine *a*) la tensión en el cable *ACB*, *b*) la magnitud de la carga **P**.

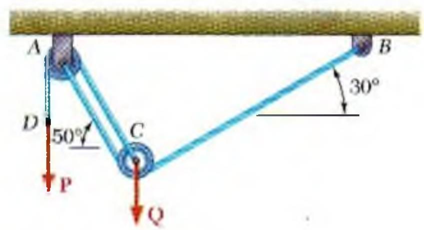


Figura P2.70 y *P2.71*

2.72 Se aplican tres fuerzas a una ménsula. Las direcciones de las dos fuerzas de 30 lb pueden variar, pero el ángulo entre ellas siempre es de 50°. Determine el rango de valores de α para el que la magnitud de la resultante de las fuerzas aplicadas a la ménsula es menor a 120 lb.

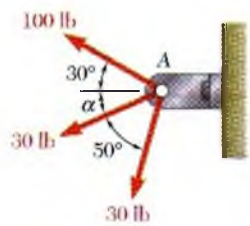


Figura P2.72

FUERZAS EN EL ESPACIO

2.12. COMPONENTES RECTANGULARES DE UNA FUERZA EN EL ESPACIO

Los problemas considerados en la primera parte de este capítulo involucraron únicamente dos dimensiones y pudieron formularse y resolverse en un solo plano. En esta sección y en las secciones siguientes del capítulo se analizarán problemas que comprenden las tres dimensiones del espacio.

Considere una fuerza **F** que actúa en el origen *O* del sistema de coordenadas rectangulares x, y, z. Para definir la dirección de **F**, se traza el plano vertical *OBAC* que contiene a **F** y que se muestra en la figura 2.30*a*. Este plano pasa a través del eje vertical y; su orientación

está definida por el ángulo ϕ que forma con el plano xy, mientras que la dirección de **F** dentro del plano está definida por el ángulo θ_y que forma **F** con el eje y. La fuerza **F** puede descomponerse en una componente vertical $\mathbf{F}_y$ y una componente horizontal $\mathbf{F}_h$; esta operación, mostrada en la figura 2.30*b*, se realiza en el plano *OBAC* de acuerdo con las reglas desarrolladas en la primera parte del capítulo. Las componentes escalares correspondientes son

$$F_y = F \cos \theta_y \qquad F_h = F \text{ sen } \theta_y \tag{2.16}$$

La $\mathbf{F}_h$ puede separarse en sus dos componentes rectangulares $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_z$ a lo largo de los ejes x y z, respectivamente. Esta operación, mostrada en la figura 2.30*c*, se realiza en el plano xz. De esta manera se obtienen las expresiones siguientes para las componentes escalares correspondientes:

$$\begin{aligned} F_x &= F_h \cos \phi = F \text{ sen } \theta_y \cos \phi \\ F_z &= F_h \text{ sen } \phi = F \text{ sen } \theta_y \text{ sen } \phi \end{aligned} \tag{2.17}$$

La fuerza **F** se ha descompuesto en tres componentes vectoriales rectangulares $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$ y $\mathbf{F}_z$, dirigidas a lo largo de los tres ejes coordenados.

Si se aplica el teorema de Pitágoras a los triángulos *OAB* y *OCD* de la figura 2.30, se escribe

$$\begin{aligned} F^2 &= (OA)^2 = (OB)^2 + (BA)^2 = F_y^2 + F_h^2 \\ F_h^2 &= (OC)^2 = (OD)^2 + (DC)^2 = F_x^2 + F_z^2 \end{aligned}$$

Si se eliminan F_h^2 de estas dos ecuaciones y se resuelve para F se obtiene la siguiente relación entre la magnitud de **F** y sus componentes rectangulares escalares:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \tag{2.18}$$

La relación que existe entre la fuerza **F** y sus tres componentes $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$ y $\mathbf{F}_z$ se presenta más fácil si se traza "una caja" que tiene por aristas $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$ y $\mathbf{F}_z$, como se muestra en la figura 2.31. La fuerza **F** está representada por la diagonal *OA* de esta caja. La figura 2.31*b* muestra el triángulo rectángulo *OAB* empleado para deducir la primera de las fórmulas (2.16): $F_y = F \cos \theta_y$. En las figuras 2.31*a* y *c* se han trazado otros dos triángulos rectángulos: el *OAD* y *OAE*. Éstos ocupan posiciones semejantes a la del triángulo *OAB*. Si representamos por θ_x y θ_z los ángulos que forma **F** con los ejes x y z, respectivamente, se pueden escribir dos fórmulas semejantes a $F_y = F \cos \theta_y$. Entonces se escribe

$$F_x = F \cos \theta_x \qquad F_y = F \cos \theta_y \qquad F_z = F \cos \theta_z \tag{2.19}$$

Los tres ángulos θ_x, θ_y y θ_z definen la dirección de la fuerza **F**; y son más usados que los ángulos θ_y y ϕ introducidos al comienzo de esta sección. Los cosenos de θ_x, θ_y y θ_z se conocen como los *cosenos directores* de la fuerza **F**.

Con el uso de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**, dirigidos a lo largo de los ejes x, y y z, respectivamente (figura 2.32), se puede expresar **F** en la forma

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \tag{2.20}$$

donde las componentes escalares F_x, F_y y F_z están definidas por las relaciones (2.19).

Ejemplo 1. Una fuerza de 500 N forma ángulos de 60°, 45° y 120° con los ejes x, y y z, respectivamente. Encuentre las componentes F_x, F_y y F_z de la fuerza.

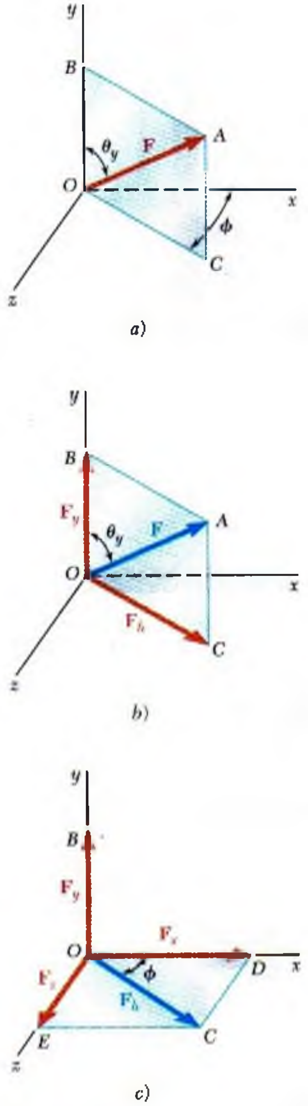


Figura 2.30

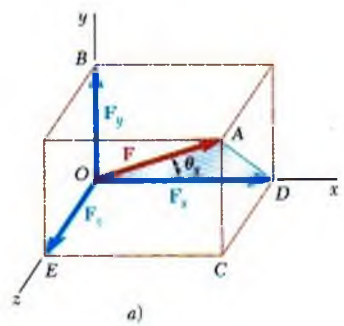


Figura 2.31

Sustituyendo $F = 500$ N, $\theta_x = 60°$, $\theta_y = 45°$ y $\theta_z = 120°$ en las fórmulas (2.19), se escribe

$$F_x = (500 \text{ N}) \cos 60° = +250 \text{ N}$$
$$F_y = (500 \text{ N}) \cos 45° = +354 \text{ N}$$
$$F_z = (500 \text{ N}) \cos 120° = -250 \text{ N}$$

Usando en la ecuación (2.20) los valores obtenidos para las componentes escalares de **F**, se tiene

$$\mathbf{F} = (250 \text{ N})\mathbf{i} + (354 \text{ N})\mathbf{j} - (250 \text{ N})\mathbf{k}$$

Como en el caso de los problemas en dos dimensiones, el signo positivo indica que la componente tiene el mismo sentido que el eje correspondiente y el signo negativo tiene el sentido opuesto.

El ángulo que una fuerza **F** forma con un eje debe medirse desde el lado positivo del eje y estará siempre comprendido entre 0 y 180°. Un ángulo θ_x menor que 90° (agudo) indica que **F** (que se supone unida al origen) está del mismo lado del plano yz que el eje x positivo, y $\cos \theta_x$ y F_x serán positivos. Un ángulo θ_x mayor que 90° (obtuso) indicará que **F** está al otro lado del plano yz; entonces, $\cos \theta_x$ y F_x serán negativos. En el ejemplo 1 los ángulos θ_x y θ_y son agudos, mientras que θ_z es obtuso; en consecuencia, F_x y F_y son positivos, mientras que F_z es negativo.

Si se sustituye en la ecuación (2.20) las expresiones obtenidas para F_x, F_y y F_z en (2.19), se escribe

$$\mathbf{F} = F(\cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k}) \tag{2.21}$$

que muestra que la fuerza **F** puede expresarse como el producto del escalar F y del vector

$$\boldsymbol{\lambda} = \cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k} \tag{2.22}$$

El vector $\boldsymbol{\lambda}$ es evidentemente un vector de magnitud 1 y de la misma dirección que **F** (figura 2.33). El *vector unitario* $\boldsymbol{\lambda}$ se refiere al largo de la línea de acción de **F**. De (2.22) se deduce que las componentes del vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ son, respectivamente, iguales a los cosenos directores de la línea de acción de **F**:

$$\lambda_x = \cos \theta_x \qquad \lambda_y = \cos \theta_y \qquad \lambda_z = \cos \theta_z \tag{2.23}$$

Se debe observar que los valores de los tres ángulos θ_x, θ_y y θ_z no son independientes. Expresando que la suma de los cuadrados de las componentes de λ es igual al cuadrado de su magnitud, se escribe

$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1$$

o sustituyendo para λ_x, λ_y y λ_z de (2.23),

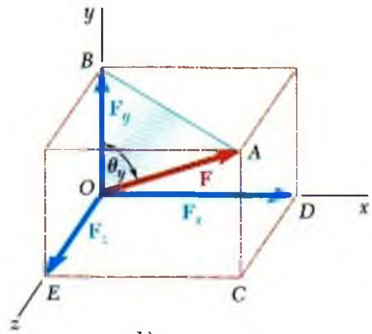
$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1 \tag{2.24}$$

En el ejemplo 1 se muestra que una vez que se han seleccionado los valores $\theta_x = 60°$ y $\theta_y = 45°$ el valor de θ_z *debe* ser igual a 60 o 120° para satisfacer la identidad (2.24).

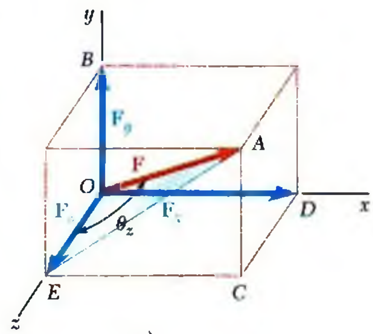
Cuando las componentes F_x, F_y y F_z de una fuerza **F** están dadas, la magnitud F de la fuerza se obtiene de (2.18). Entonces las relaciones (2.19) pueden resolverse para los cosenos directores,

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} \qquad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} \qquad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F} \tag{2.25}$$

y obtener los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que caracterizan a la dirección de **F**.



b)



c)

Figura 2.31

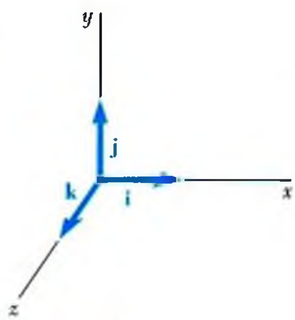


Figura 2.32

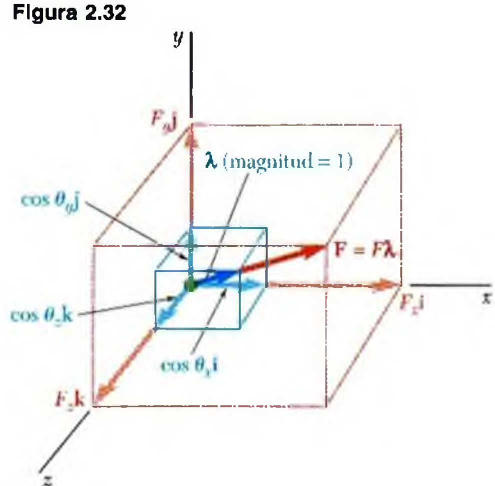


Figura 2.33

Ejemplo 2. Una fuerza **F** tiene las componentes $F_x = 20$ lb, $F_y = -30$ lb y $F_z = 60$ lb. Determine la magnitud de F y los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que forma con los ejes coordenados.

A partir de la fórmula (2.18) se obtiene[1]

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \\ &= \sqrt{(20\text{ lb})^2 + (-30\text{ lb})^2 + (60\text{ lb})^2} \\ &= \sqrt{4\,900}\text{ lb} = 70\text{ lb} \end{aligned}$$

Si se sustituyen los valores de las componentes y la magnitud de **F** en las ecuaciones (2.25), se escribe

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{20\text{ lb}}{70\text{ lb}} \qquad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{-30\text{ lb}}{70\text{ lb}} \qquad \cos\theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{60\text{ lb}}{70\text{ lb}}$$

Calculando sucesivamente cada cociente y su arco coseno, se obtiene

$$\theta_x = 73.4° \qquad \theta_y = 115.4° \qquad \theta_z = 31.0°$$

Estos cálculos pueden realizarse fácilmente con una calculadora.

2.13. FUERZA DEFINIDA EN TÉRMINOS DE SU MAGNITUD Y DOS PUNTOS SOBRE SU LÍNEA DE ACCIÓN

En muchas aplicaciones la dirección de una fuerza **F** está definida por las coordenadas de dos puntos $M(x_1, y_1, z_1)$ y $N(x_2, y_2, z_2)$, localizadas sobre su línea de acción (figura 2.34). Considere el vector $\overrightarrow{MN}$ que une

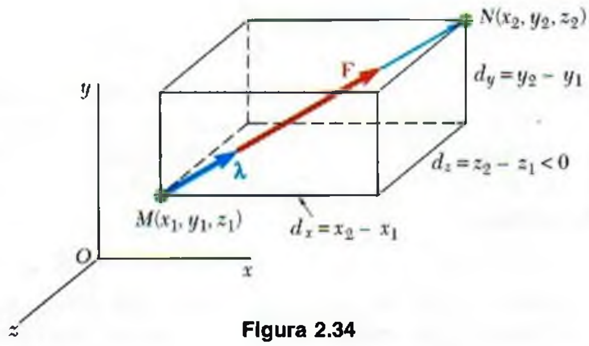


Figura 2.34

a M y N y tiene el mismo sentido que **F**. Si se representan sus componentes escalares por d_x, d_y y d_z, respectivamente, se escribe

$$\overrightarrow{MN} = d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k} \tag{2.26}$$

El vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ a lo largo de la línea de acción de **F** (es decir a lo largo de la línea MN) puede obtenerse al dividir el vector $\overrightarrow{MN}$ entre su magnitud MN. Se sustituye para $\overrightarrow{MN}$ de (2.26) y se observa que MN es igual a la distancia d de M a N, se escribe

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\overrightarrow{MN}}{MN} = \frac{1}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}) \tag{2.27}$$

[1]Con una calculadora programada para convertir coordenadas rectangulares en coordenadas polares, se verá que el siguiente procedimiento resulta más expedito para calcular F: primero se determina F_h a partir de sus componentes rectangulares F_x y F_z (figura 2.30*c*), después se determina F a partir de sus componentes rectangulares F_h y F_y (figura 2.30*b*). El orden en que se introduzcan las tres componentes F_x, F_y y F_z resulta intrascendente.

Es importante recordar que **F** es igual al producto de F y λ, por lo que se tiene

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = \frac{F}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}) \tag{2.28}$$

de la cual se sigue que las componentes de **F** son, respectivamente,

$$F_x = \frac{Fd_x}{d} \qquad F_y = \frac{Fd_y}{d} \qquad F_z = \frac{Fd_z}{d} \tag{2.29}$$

Las relaciones (2.29) simplifican en forma considerable la determinación de las componentes de las fuerzas **F** de magnitud F cuando la línea de acción de **F** está definida por dos puntos M y N. Restando las coordenadas de M de las de N se determinan primero las componentes del vector $\overrightarrow{MN}$ y la distancia d de M a N:

$$d_x = x_2 - x_1 \qquad d_y = y_2 - y_1 \qquad d_z = z_2 - z_1$$
$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

Sustituyendo los valores para F y para d_x, d_y, d_z y d en las relaciones (2.29), se obtienen las componentes F_x, F_y y F_z de la fuerza.

Los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que forman **F** con los ejes coordenados pueden obtenerse de las ecuaciones (2.25). Comparando las ecuaciones (2.22) y (2.27) también se puede escribir

$$\cos\theta_x = \frac{d_x}{d} \qquad \cos\theta_y = \frac{d_y}{d} \qquad \cos\theta_z = \frac{d_z}{d} \tag{2.30}$$

y determinar los ángulos θ_x, θ_y y θ_z directamente de las componentes y la magnitud del vector $\overrightarrow{MN}$.

2.14. ADICIÓN DE FUERZAS CONCURRENTES EN EL ESPACIO

La resultante **R** de dos o más fuerzas en el espacio se calcula sumando sus componentes rectangulares. Los métodos gráficos o trigonométricos no son muy prácticos en el caso de fuerzas en el espacio.

El método seguido aquí es semejante al empleado en la sección 2.8 con fuerzas coplanares. Se establece que

$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F}$$

se descompone cada fuerza en sus componentes rectangulares y se escribe

$$R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k} = \Sigma(F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k})$$
$$= (\Sigma F_x)\mathbf{i} + (\Sigma F_y)\mathbf{j} + (\Sigma F_z)\mathbf{k}$$

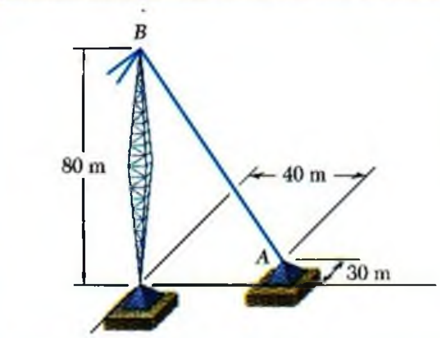
de la cual se desprende que

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad R_z = \Sigma F_z \tag{2.31}$$

La magnitud de la resultante y los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que ésta forma con el eje de coordenadas se obtienen por el método de la sección 2.12. Se escribe

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \tag{2.32}$$

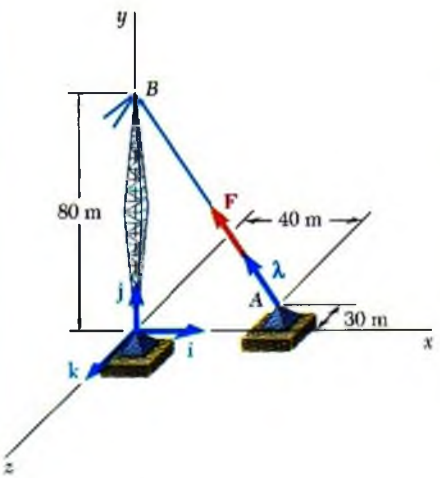
$$\cos\theta_x = \frac{R_x}{R} \qquad \cos\theta_y = \frac{R_y}{R} \qquad \cos\theta_z = \frac{R_z}{R} \tag{2.33}$$



PROBLEMA RESUELTO 2.7

El alambre de una torre está anclado en A por medio de un perno. La tensión en el alambre es de 2 500 N. Determine *a*) las componentes F_x, F_y y F_z de la fuerza que actúa sobre el perno y *b*) los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que definen la dirección de la fuerza.

SOLUCIÓN



***a*) Componentes de la fuerza.** La línea de acción de la fuerza que actúa sobre el perno pasa por A y B y la fuerza está dirigida de A hacia B. Las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$, que tienen la misma dirección que la fuerza, son

$$d_x = -40 \text{ m} \qquad d_y = +80 \text{ m} \qquad d_z = +30 \text{ m}$$

La distancia total de A a B es

$$AB = d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} = 94.3 \text{ m}$$

Al representar por **i**, **j** y **k** los vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados, se tiene

$$\overrightarrow{AB} = -(40 \text{ m})\mathbf{i} + (80 \text{ m})\mathbf{j} + (30 \text{ m})\mathbf{k}$$

Introduciendo el vector unitario $\boldsymbol{\lambda} = \overrightarrow{AB}/AB$, se escribe

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = F\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{2\,500 \text{ N}}{94.3 \text{ m}}\overrightarrow{AB}$$

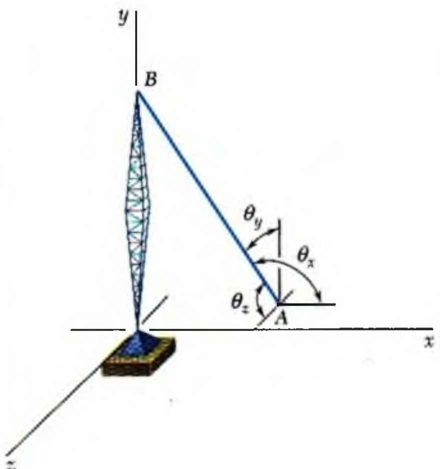
Si se sustituye la expresión encontrada para $\overrightarrow{AB}$, se obtiene

$$\mathbf{F} = \frac{2\,500 \text{ N}}{94.3 \text{ m}}[-(40 \text{ m})\mathbf{i} + (80 \text{ m})\mathbf{j} + (30 \text{ m})\mathbf{k}]$$

$$\mathbf{F} = -(1\,060 \text{ N})\mathbf{i} + (2\,120 \text{ N})\mathbf{j} + (795 \text{ N})\mathbf{k}$$

Por consiguiente, las componentes de **F** son

$$F_x = -1\,060 \text{ N} \qquad F_y = +2\,120 \text{ N} \qquad F_z = +795 \text{ N} \quad ◀$$



***b*) Dirección de la fuerza.** Con las ecuaciones (2.25), se escribe

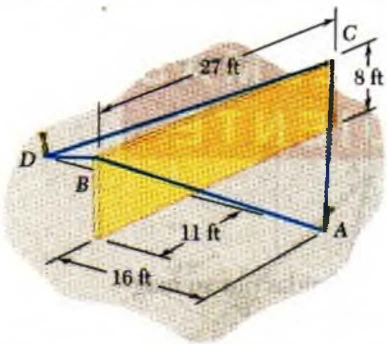
$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{-1\,060 \text{ N}}{2\,500 \text{ N}} \qquad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{+2\,120 \text{ N}}{2\,500 \text{ N}}$$

$$\cos\theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{+795 \text{ N}}{2\,500 \text{ N}}$$

Si se calcula sucesivamente cada cociente y su arco coseno, se obtiene

$$\theta_x = 115.1° \qquad \theta_y = 32.0° \qquad \theta_z = 71.5° \quad ◀$$

(*Nota*: El resultado también pudo haberse determinado con las componentes y la magnitud del vector $\overrightarrow{AB}$ en lugar de la fuerza **F**.)



PROBLEMA RESUELTO 2.8

Una sección de una pared de concreto precolado se sostiene temporalmente por los cables mostrados. Se sabe que la tensión es de 840 lb en el cable *AB* y 1 200 lb en el cable *AC*, determine la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas por los cables *AB* y *AC* sobre la estaca *A*.

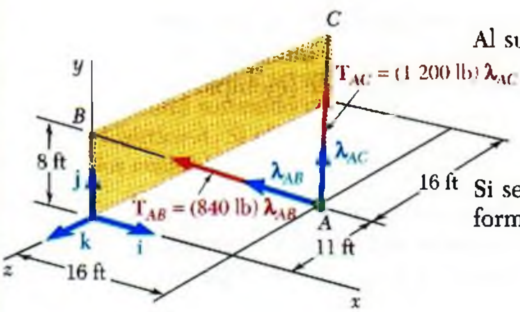
SOLUCIÓN

Componentes de las fuerzas. La fuerza ejercida por cada cable sobre la estaca *A* se descompondrá en sus componentes *x*, *y* y *z*. Primero se determinarán las componentes y la magnitud de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, midiéndolos desde *A* hacia la sección de la pared. Si se representa por **i**, **j** y **k** a los vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados, se escribe

$$\overrightarrow{AB} = -(16\text{ ft})\mathbf{i} + (8\text{ ft})\mathbf{j} + (11\text{ ft})\mathbf{k} \qquad AB = 21\text{ ft}$$
$$\overrightarrow{AC} = -(16\text{ ft})\mathbf{i} + (8\text{ ft})\mathbf{j} - (16\text{ ft})\mathbf{k} \qquad AC = 24\text{ ft}$$

Al representar por $\boldsymbol{\lambda}_{AB}$ al vector unitario a lo largo de la línea *AB*, se tiene

$$\mathbf{T}_{AB} = T_{AB}\boldsymbol{\lambda}_{AB} = T_{AB}\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{840\text{ lb}}{21\text{ ft}}\overrightarrow{AB}$$



Al sustituir la expresión encontrada para $\overrightarrow{AB}$, se obtiene

$$\mathbf{T}_{AB} = \frac{840\text{ lb}}{21\text{ ft}}[-(16\text{ ft})\mathbf{i} + (8\text{ ft})\mathbf{j} + (11\text{ ft})\mathbf{k}]$$
$$\mathbf{T}_{AB} = -(640\text{ lb})\mathbf{i} + (320\text{ lb})\mathbf{j} + (440\text{ lb})\mathbf{k}$$

Si se representa con $\boldsymbol{\lambda}_{AC}$ al vector unitario a lo largo de *AC*, se obtiene en forma semejante

$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC}\boldsymbol{\lambda}_{AC} = T_{AC}\frac{\overrightarrow{AC}}{AC} = \frac{1\ 200\text{ lb}}{24\text{ ft}}\overrightarrow{AC}$$
$$\mathbf{T}_{AC} = -(800\text{ lb})\mathbf{i} + (400\text{ lb})\mathbf{j} - (800\text{ lb})\mathbf{k}$$

Resultante de las fuerzas. La resultante **R** de las fuerzas ejercidas por los dos cables es

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} = -(1\ 440\text{ lb})\mathbf{i} + (720\text{ lb})\mathbf{j} - (360\text{ lb})\mathbf{k}$$

La magnitud y dirección de la resultante se determinan por:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(-1\ 440)^2 + (720)^2 + (-360)^2}$$

$$R = 1\ 650\text{ lb} \quad ◀$$

De las ecuaciones (2.33) se obtiene

$$\cos\theta_x = \frac{R_x}{R} = \frac{-1\ 440\text{ lb}}{1\ 650\text{ lb}} \qquad \cos\theta_y = \frac{R_y}{R} = \frac{+720\text{ lb}}{1\ 650\text{ lb}}$$

$$\cos\theta_z = \frac{R_z}{R} = \frac{-360\text{ lb}}{1\ 650\text{ lb}}$$

Calculando en forma sucesiva cada cociente y su arco coseno, se obtiene

$$\theta_x = 150.8° \qquad \theta_y = 64.1° \qquad \theta_z = 102.6° \quad ◀$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se vio que las *fuerzas en el espacio* pueden ser definidas por su magnitud y su dirección o por las tres componentes rectangulares F_x, F_y y F_z.

A. *Cuando una fuerza se define por su magnitud y su dirección*, sus componentes rectangulares F_x, F_y y F_z se pueden determinar de la siguiente manera:

Caso 1. Si la dirección de la fuerza **F** está definida por los ángulos θ_y y ϕ mostrados en la figura 2.30, las proyecciones de **F** a través de estos ángulos o sus complementos proporcionarán las componentes de **F** [ecuaciones (2.17)]. Obsérvese que las componentes *x* y *z* de **F** se obtienen proyectando primero a **F** sobre el plano horizontal; entonces, la proyección $\mathbf{F}_h$ obtenida de esta forma se descompone en las componentes $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_z$ (figura 2.30*c*).

Cuando se resuelven problemas de este tipo, se recomienda dibujar primero la fuerza **F** y después su proyección $\mathbf{F}_h$ y sus componentes F_x, F_y y F_z antes de iniciar la parte matemática de la solución.

Caso 2. Si la dirección de la fuerza **F** está definida por los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que **F** forma con los ejes coordenados, cada componente se puede obtener multiplicando la magnitud *F* de la fuerza por el coseno del ángulo que le corresponde [ejemplo 1]:

$$F_x = F\cos\theta_x \qquad F_y = F\cos\theta_y \qquad F_z = F\cos\theta_z$$

Caso 3. Si la dirección de la fuerza **F** está definida por dos puntos *M* y *N* ubicados a lo largo de su línea de acción (figura 2.34), primero se expresa al vector $\overrightarrow{MN}$ dibujado desde *M* hasta *N*, en términos de sus componentes d_x, d_y y d_z y de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**:

$$\overrightarrow{MN} = d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}$$

Después se determina el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ a lo largo de la línea de acción de **F** dividiendo al vector $\overrightarrow{MN}$ entre su magnitud *MN*. Si se multiplica a $\boldsymbol{\lambda}$ por la magnitud de **F**, se obtiene la expresión deseada para **F** en términos de sus componentes rectangulares [problema resuelto 2.7]:

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = \frac{F}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k})$$

Cuando se determinan las componentes rectangulares de una fuerza, es conveniente emplear un sistema de notación consistente y con significado. El método utilizado en este texto se ilustra en el problema resuelto 2.8 donde, por ejemplo, la fuerza $\mathbf{T}_{AB}$ actúa desde la estaca *A* hacia el punto *B*. Obsérvese que los subíndices han sido ordenados para coincidir con la dirección de la fuerza. Se recomienda adoptar la misma notación ya que le ayudará a identificar al punto 1 (el primer subíndice) y al punto 2 (el segundo subíndice).

Cuando el vector que define la línea de acción de una fuerza se forma, puede pensarse en sus componentes escalares como el número de pasos que debe efectuar, en cada dirección coordenada, para ir desde el punto 1 hasta el punto 2. Es esencial que siempre se recuerde asignarle el signo correcto a cada una de las componentes.

B. Cuando una fuerza está definida por sus componentes rectangulares F_x, F_y y F_z, y se puede obtener su magnitud F así

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

Los cosenos directores de la línea de acción de **F** se pueden determinar dividiendo las componentes de la fuerza entre F:

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} \qquad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} \qquad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F}$$

A partir de los cosenos directores se pueden obtener los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que **F** forma con los ejes coordenados [ejemplo 2].

C. Para determinar la resultante* R *de dos o más fuerzas en el espacio tridimensional, primero se determinan las componentes rectangulares de cada una de las fuerzas utilizando alguno de los procedimientos que se acaban de describir. Con la suma de esas componentes se obtendrán las componentes R_x, R_y y R_z de la resultante. Entonces, la magnitud y la dirección de la resultante se puede obtener como se señaló en los incisos anteriores para el caso de una fuerza **F** [problema resuelto 2.8].

Problemas

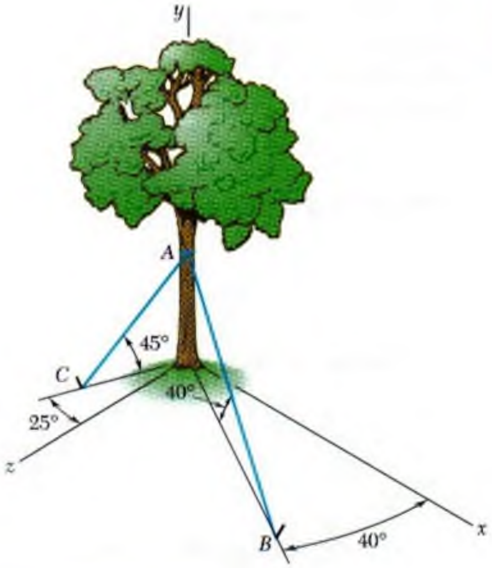


Figura P2.73 y *P2.74*

2.73 Para estabilizar un árbol arrancado parcialmente durante una tormenta, se le amarran los cables *AB* y *AC* a la parte alta del tronco y después se fijan a barras de acero clavadas en el suelo. Si la tensión en el cable *AB* es de 950 lb, determine *a*) las componentes de la fuerza ejercida por este cable sobre el árbol, *b*) los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que forma la fuerza en *A* con los ejes paralelos a los ejes coordenados.

2.74 Para estabilizar un árbol arrancado parcialmente durante una tormenta, se le amarran los cables *AB* y *AC* a la parte alta del tronco y después se fijan a barras de acero clavadas en el suelo. Si la tensión en el cable *AC* es de 810 lb, determine *a*) las componentes de la fuerza ejercida por este cable sobre el árbol, *b*) los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que forma la fuerza en *A* con los ejes paralelos a los ejes coordenados.

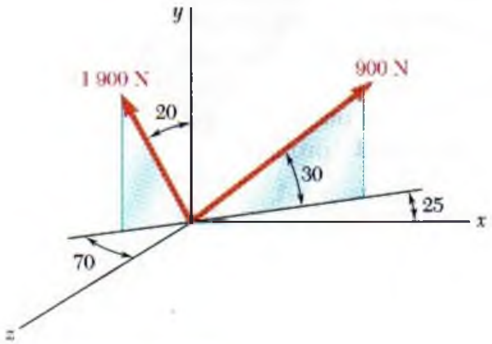


Figura P2.75 y P2.76

2.75 Determine *a*) las componentes *x*, *y* y *z* de la fuerza de 900 N, *b*) los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que forma la fuerza con los ejes coordenados.

2.76 Determine *a*) las componentes *x*, *y* y *z* de la fuerza de 1 900 N, *b*) los ángulos θ_x θ_y y θ_z que forma la fuerza con los ejes coordenados.

2.77 Una pistola se apunta hacia un punto *A* ubicado 20° al oeste del norte. Si el cañón de la pistola forma un ángulo de 35° con la horizontal y la máxima fuerza del culatazo al disparar es de 180 lb, determine *a*) las componentes *x*, *y* y *z* de dicha fuerza, *b*) los valores de los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que definen la dirección de la fuerza del culatazo. (Suponga que *x*, *y* y *z* se dirigen respectivamente al este, hacia arriba y hacia el sur.)

2.78 Resuelva el problema 2.77 suponiendo que el punto *A* se localiza 25° al norte del oeste y que el cañón de la pistola forma un ángulo de 30° con la horizontal.

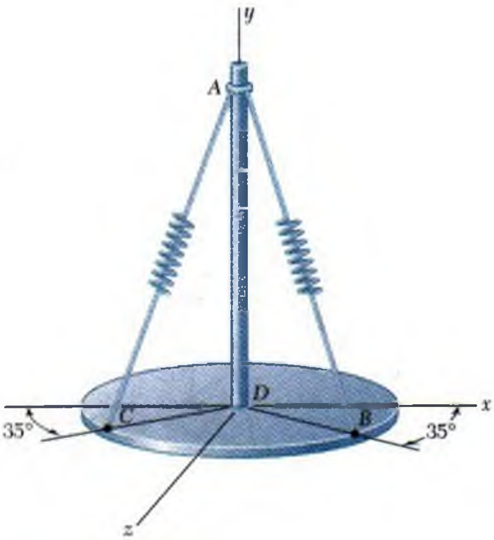


Figura P2.79 y P2.80

2.79 El ángulo entre el resorte *AB* y el poste *DA* es de 30°. Si la tensión en el resorte es de 220 N, determine *a*) las componentes *x*, *y* y *z* de la fuerza ejercida por este resorte sobre la placa, *b*) los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que forma la fuerza con los ejes coordenados.

2.80 El ángulo entre el resorte *AC* y el poste *DA* es de 30°. Si la componente *x* de la fuerza ejercida por el resorte *AC* sobre la placa es de 180 N, determine *a*) la tensión en el resorte *AC*, *b*) los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que forma la fuerza ejercida en *C* con los ejes coordenados.

2.81 Determine la magnitud y la dirección de la fuerza $\mathbf{F} = (65\text{ N})\mathbf{i} - (80\text{ N})\mathbf{j} - (200\text{ N})\mathbf{k}$.

2.82 Determine la magnitud y la dirección de la fuerza $\mathbf{F} = (450\text{ N})\mathbf{i} + (600\text{ N})\mathbf{j} - (1\,800\text{ N})\mathbf{k}$.

2.83 Una fuerza actúa en el origen de un sistema coordenado en la dirección definida por los ángulos $\theta_x = 43.2°$ y $\theta_z = 83.8°$. Si la componente y de la fuerza es de –50 lb, determine *a*) el ángulo θ_y, *b*) las componentes restantes y la magnitud de la fuerza.

2.84 Una fuerza actúa en el origen de un sistema coordenado en la dirección definida por los ángulos $\theta_x = 113.2°$ y $\theta_y = 78.4°$. Si la componente z de la fuerza es de –35 lb, determine *a*) el ángulo θ_z, *b*) las componentes restantes y la magnitud de la fuerza.

2.85 Una fuerza **F** con magnitud de 250 N actúa en el origen de un sistema coordenado. Si $F_x = 80$ N, $\theta_y = 72.4°$ y $F_z > 0$, determine *a*) las componentes F_y y F_z, *b*) los ángulos θ_x y θ_z.

2.86 Una fuerza **F** con magnitud de 320 N actúa en el origen de un sistema coordenado. Si $\theta_x = 104.5°$, $F_z = -120$ N y $F_y < 0$, determine *a*) las componentes F_x y F_y, *b*) los ángulos θ_y y θ_z.

2.87 Una barra de acero se dobla para formar un anillo semicircular con 36 in. de radio que está sostenido parcialmente por los cables *BD* y *BE*, los cuales se unen al anillo en el punto *B*. Si la tensión en el cable *BD* es de 55 lb, determine las componentes de la fuerza ejercida por el cable sobre el soporte colocado en *D*.

2.88 Una barra de acero se dobla para formar un anillo semicircular con 36 in. de radio que está sostenido parcialmente por los cables *BD* y *BE*, los cuales se unen al anillo en el punto *B*. Si la tensión en el cable *BE* es de 60 lb, determine las componentes de la fuerza ejercida por el cable sobre el soporte colocado en *E*.

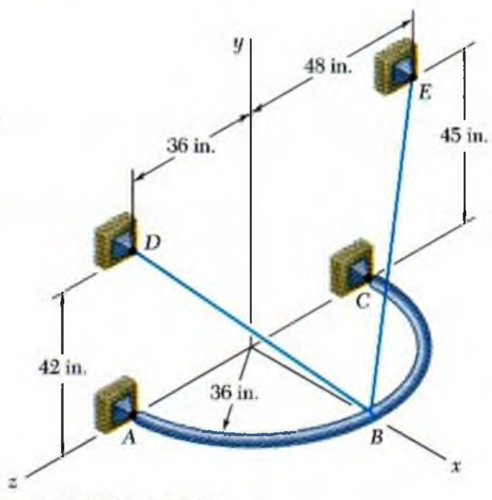


Figura P2.87 y P2.88

2.89 Una torre de transmisión se sostiene por medio de tres alambres anclados con pernos en *B*, *C* y *D*. Si la tensión en el alambre *AB* es de 2 100 N, determine las componentes de la fuerza ejercida por el alambre sobre el perno colocado en *B*.

2.90 Una torre de transmisión se sostiene mediante tres alambres que están anclados con pernos en *B*, *C* y *D*. Si la tensión en el alambre *AD* es de 1 260 N, determine las componentes de la fuerza ejercida por este alambre sobre el perno colocado en D.

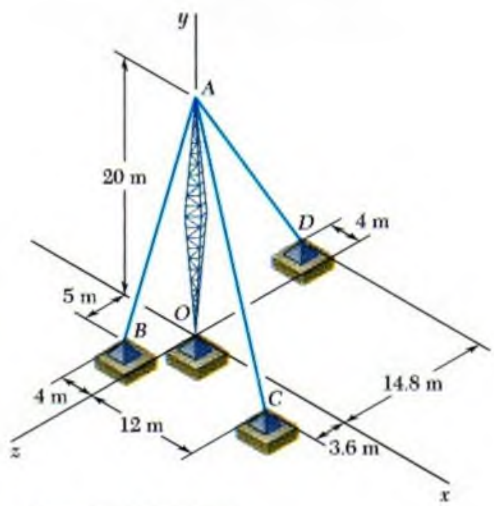


Figura *P2.89* y P2.90

2.91 Dos cables BG y BH están unidos al marco ACD como se muestra en la figura. Si la tensión en el cable BG es de 450 N, determine las componentes de la fuerza ejercida por el cable BG sobre el marco en el punto B.

2.92 Dos cables BG y BH están unidos al marco ACD como indica la figura. Si la tensión en el cable BH es de 600 N, determine las componentes de la fuerza ejercida por el cable BH sobre el marco en el punto B.

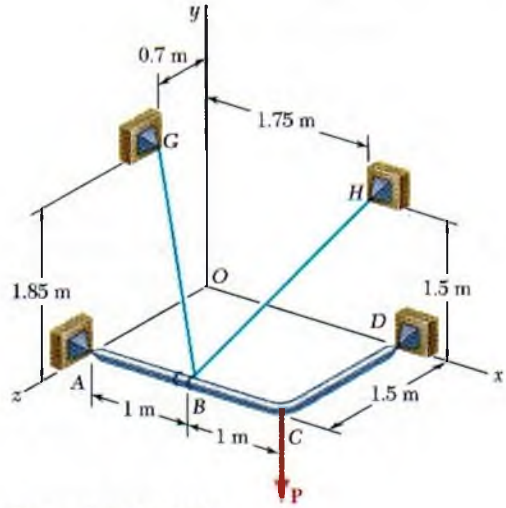


Figura P2.91 y *P2.92*

2.93 Determine la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas mostradas en la figura, si $P = 4$ kips y $Q = 8$ kips.

2.94 Determine la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas mostradas en la figura, si $P = 6$ kips y $Q = 7$ kips.

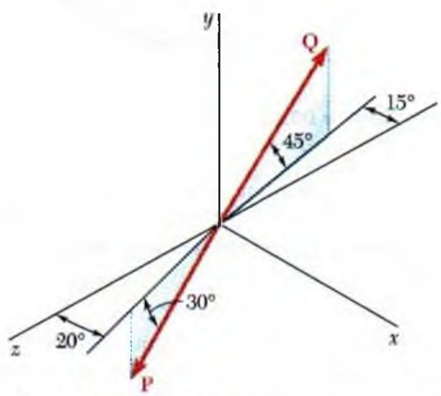


Figura P2.93 y *P2.94*

2.95 El aguilón OA soporta una carga $\mathbf{P}$ y está sostenido por dos cables, según muestra la figura. Si en el cable AB la tensión es de 510 N y en el cable AC es de 765 N, determine la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas en A por los dos cables.

2.96 Suponga que en el problema 2.95 la tensión es de 765 N en el cable AB y de 510 N en el cable AC, y determine la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas en A por los dos cables.

2.97 Para el árbol del problema 2.73, si la tensión en el cable AB es de 760 lb y la resultante de las fuerzas ejercidas en A por los cables AB y AC yace en el plano yz, determine *a*) la tensión en el cable AC, *b*) la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas.

2.98 Para el árbol del problema 2.73, si la tensión en el cable AC es de 980 lb y la resultante de las fuerzas ejercidas en A por los cables AB y AC yace en el plano yz, determine *a*) la tensión en el cable AB, *b*) la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas.

2.99 Para el aguilón del problema 2.95, si $\alpha = 0°$, la tensión en el cable AB es de 600 N, y la resultante de la carga $\mathbf{P}$ y las fuerzas ejercidas en A por los dos cables se dirige a lo largo de OA, determine *a*) la tensión en el cable AC, *b*) la magnitud de la carga $\mathbf{P}$.

2.100 Para la torre de transmisión del problema 2.89, determine las tensiones en los cables AB y AD si la tensión en el cable AC es de 1 770 N y la resultante de las fuerzas ejercidas por los tres cables en A debe ser vertical.

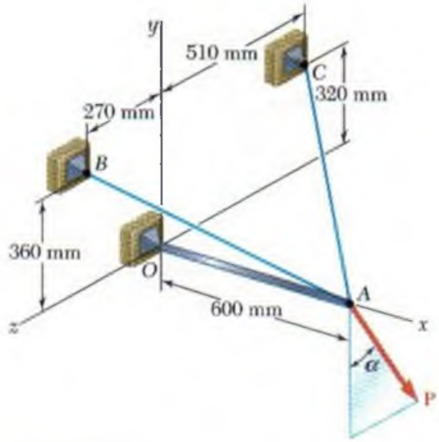


Figura P2.95

2.15. EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA EN EL ESPACIO

De acuerdo con la definición dada en la sección 2.9, una partícula A está en equilibrio si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre A es cero. Las componentes R_x, R_y y R_z de la resultante están dadas por las relaciones (2.31); al expresar que las componentes de la resultante son cero, se escribe

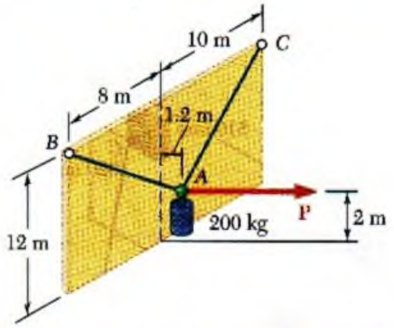
$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0 \tag{2.34}$$

Las ecuaciones (2.34) representan las condiciones necesarias y suficientes para lograr el equilibrio de una partícula en el espacio. Estas ecuaciones pueden usarse para resolver problemas que tratan con el equilibrio de una partícula y en los que intervienen no más de tres incógnitas.

Para resolver tales problemas, se traza un diagrama de cuerpo libre donde se muestre a la partícula en equilibrio y *todas* las fuerzas que actúan sobre ella. Deben escribirse las ecuaciones de equilibrio (2.34) y despejar las tres incógnitas. En los tipos de problemas más comunes, esas incógnitas representan 1) las tres componentes de una sola fuerza o 2) la magnitud de tres fuerzas, cada una con dirección conocida.

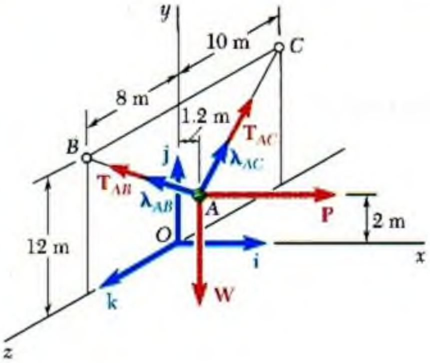


Fotografía 2.3 Como la tensión presente en los *cuatro* cables que sostienen al contenedor de carga no se puede encontrar mediante las *tres* ecuaciones (2.34), es posible obtener una relación entre las tensiones considerando el equilibrio del gancho.



PROBLEMA RESUELTO 2.9

Un cilindro de 200 kg se sostiene por medio de dos cables AB y AC que se amarran en la parte más alta de una pared vertical. Una fuerza horizontal **P** perpendicular a la pared lo sostiene en la posición mostrada. Determine la magnitud de **P** y la tensión en cada cable.



SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se escoge el punto A como cuerpo libre, este punto está sujeto a cuatro fuerzas, tres de las cuales son de magnitud desconocida.

Con la introducción de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**, se descompone cada fuerza en sus componentes rectangulares.

$$\mathbf{P} = P\mathbf{i}$$
$$\mathbf{W} = -mg\mathbf{j} = -(200 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} = -(1\,962 \text{ N})\mathbf{j} \qquad (1)$$

En el caso de $\mathbf{T}_{AB}$ y $\mathbf{T}_{AC}$, es necesario determinar primero las componentes y las magnitudes de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Representando con $\boldsymbol{\lambda}_{AB}$ el vector unitario a lo largo de AB, se escribe

$$\overrightarrow{AB} = -(1.2 \text{ m})\mathbf{i} + (10 \text{ m})\mathbf{j} + (8 \text{ m})\mathbf{k} \qquad AB = 12.862 \text{ m}$$
$$\boldsymbol{\lambda}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{12.862 \text{ m}} = -0.09330\mathbf{i} + 0.7775\mathbf{j} + 0.6220\mathbf{k}$$
$$\mathbf{T}_{AB} = T_{AB}\boldsymbol{\lambda}_{AB} = -0.09330T_{AB}\mathbf{i} + 0.7775T_{AB}\mathbf{j} + 0.6220T_{AB}\mathbf{k} \qquad (2)$$

Al representar con $\boldsymbol{\lambda}_{AC}$ el vector unitario a lo largo de AC, se escribe en forma semejante

$$\overrightarrow{AC} = -(1.2 \text{ m})\mathbf{i} + (10 \text{ m})\mathbf{j} - (10 \text{ m})\mathbf{k} \qquad AC = 14.193 \text{ m}$$
$$\boldsymbol{\lambda}_{AC} = \frac{\overrightarrow{AC}}{14.193 \text{ m}} = -0.08455\mathbf{i} + 0.7046\mathbf{j} - 0.7046\mathbf{k}$$
$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC}\boldsymbol{\lambda}_{AC} = -0.08455T_{AC}\mathbf{i} + 0.7046T_{AC}\mathbf{j} - 0.7046T_{AC}\mathbf{k} \qquad (3)$$

Condición de equilibrio. Puesto que A está en equilibrio se debe tener

$$\Sigma\mathbf{F} = 0: \qquad \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{P} + \mathbf{W} = 0$$

o con la sustitución de (1), (2) y (3) para las fuerzas y factorizando **i**, **j** y **k**,

$$(-0.09330T_{AB} - 0.08455T_{AC} + P)\mathbf{i} + (0.7775T_{AB} + 0.7046T_{AC} - 1\,962 \text{ N})\mathbf{j} + (0.6220T_{AB} - 0.7046T_{AC})\mathbf{k} = 0$$

Al hacer los coeficientes de **i**, **j** y **k** iguales a cero, se escriben las tres ecuaciones escalares que expresan que la suma de las componentes x, y y z de las fuerzas son, respectivamente, iguales a cero.

$$\Sigma F_x = 0: \qquad -0.09330T_{AB} - 0.08455T_{AC} + P = 0$$
$$\Sigma F_y = 0: \qquad +0.7775T_{AB} + 0.7046T_{AC} - 1\,962 \text{ N} = 0$$
$$\Sigma F_z = 0: \qquad +0.6220T_{AB} - 0.7046T_{AC} = 0$$

Con la solución de estas ecuaciones se obtiene

$$P = 235 \text{ N} \qquad T_{AB} = 1\,402 \text{ N} \qquad T_{AC} = 1\,238 \text{ N}$$ ◀

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Anteriormente se vio que cuando una partícula está en *equilibrio*, la resultante de las fuerzas que actúan sobre la misma debe ser igual a cero. En el caso del equilibrio de una *partícula en el espacio tridimensional*, expresar este hecho proporcionará tres relaciones entre las fuerzas que actúan sobre la partícula. Estas relaciones se pueden utilizar para determinar tres incógnitas, que usualmente son las magnitudes de tres fuerzas.

La solución constará de los siguientes pasos:

1. ***Dibujar un diagrama de cuerpo libre de la partícula.*** Este diagrama muestra la partícula y a todas las fuerzas que actúan sobre la misma. En el diagrama se deben indicar tanto las magnitudes de las fuerzas conocidas, como cualquier ángulo o dimensión que defina la dirección de una fuerza. Cualquier magnitud o ángulo desconocido debe ser denotado por un símbolo apropiado. En el diagrama de cuerpo libre no se debe incluir información adicional.

2. ***Descomponer cada una de las fuerzas en sus componentes rectangulares.*** Con el método utilizado en la sección anterior, para cada fuerza **F** se determina el vector unitario **λ**, que define la dirección de dicha fuerza y **F** se expresa como el producto de su magnitud F y el vector unitario **λ**. Así se obtiene una expresión con la siguiente forma

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = \frac{F}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k})$$

donde d, d_x, d_y y d_z son dimensiones obtenidas a partir del diagrama de cuerpo libre de la partícula. También mostramos la dirección de **F**, que puede definirse en términos de los ángulos θ_y y ϕ. Si se conoce tanto la magnitud como la dirección de una fuerza, entonces F es conocida y la expresión obtenida para **F** está totalmente definida; de otra forma, F es una de las tres incógnitas a determinar.

3. ***Hacer igual a cero a la resultante o suma de las fuerzas que actúan sobre la partícula.*** Se obtendrá una ecuación vectorial que consta de términos que contienen los vectores unitarios **i**, **j** o **k**. Los términos que contienen el mismo vector unitario se agruparán y dicho vector se factorizará. Para que la ecuación vectorial sea correcta, se deben igualar a cero los coeficientes de cada uno de los vectores unitarios. Esto proporcionará tres ecuaciones escalares que se pueden resolver para un máximo de tres incógnitas [problema resuelto 2.9].

Problemas

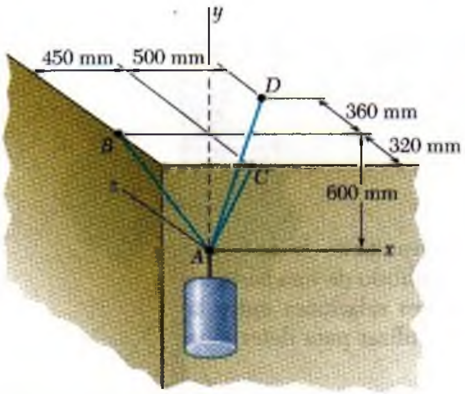


Figura *P2.101* y P2.102

2.101 Un contenedor se sostiene por medio de tres cables que están unidos al techo como se muestra en la figura. Determine el peso *W* del contenedor si la tensión en el cable *AB* es de 6 kN.

2.102 Un contenedor se sostiene por medio de tres cables que están unidos al techo como se muestra en la figura. Determine el peso *W* del contenedor si la tensión en el cable *AD* es de 4.3 kN.

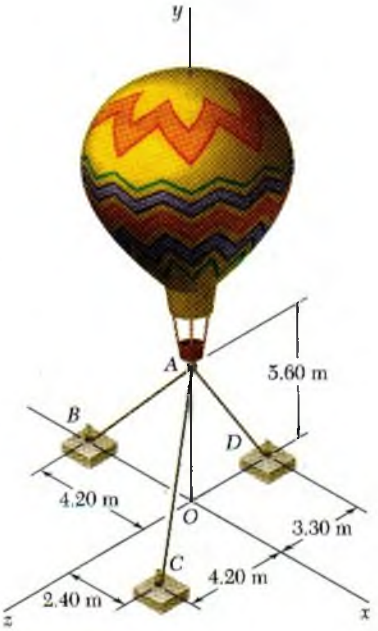


Figura P2.103 y *P2.104*

2.103 Tres cables son usados para amarrar el globo que se muestra en la figura. Si la tensión en el cable *AB* es de 259 N, determine la fuerza vertical **P** que ejerce el globo en *A*.

2.104 Tres cables son usados para amarrar el globo que se muestra en la figura. Si la tensión en el cable *AC* es de 444 N, determine la fuerza vertical **P** que ejerce el globo en *A*.

2.105 El montaje de apoyo que se muestra en la figura está atornillado al sitio en *B*, *C* y *D* y soporta en *A* una fuerza **P** dirigida hacia abajo. Si las fuerzas presentes en los elementos *AB*, *AC* y *AD* están dirigidas a lo largo de los elementos respectivos, y la fuerza en el elemento *AB* es de 29.2 lb, determine la magnitud de **P**.

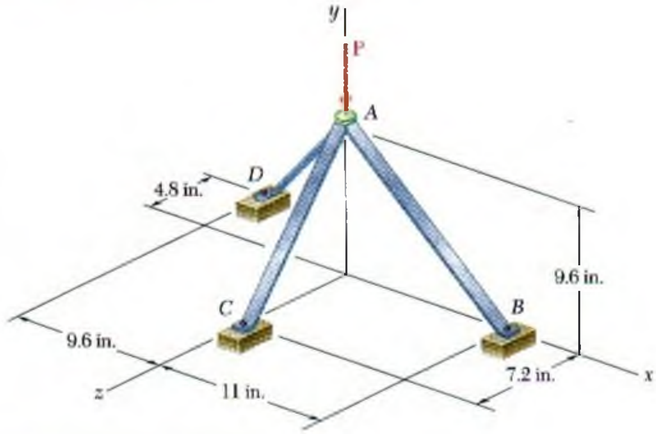


Figura P2.105 y P2.106

2.106 El montaje de apoyo que se muestra en la figura está atornillado al sitio en *B*, *C* y *D* y soporta en *A* una fuerza **P** dirigida hacia abajo. Si las fuerzas presentes en los elementos *AB*, *AC* y *AD* están dirigidas a lo largo de los elementos respectivos y $P = 45$ lb, determine las fuerzas presentes en los elementos.

2.107 Una torre de transmisión se sostiene por medio de tres alambres que están unidos a una punta colocada en *A* y se anclan mediante pernos en *B*, *C* y *D*. Si la tensión en el alambre *AB* es de 3.6 kN, determine la fuerza vertical **P** ejercida por la torre sobre la punta puesta en *A*.

2.108 Una torre de transmisión se sostiene por medio de tres alambres que están unidos a una punta colocada en *A* y se anclan mediante pernos en *B*, *C* y *D*. Si la tensión en el alambre *AC* es de 2.6 kN, determine la fuerza vertical **P** ejercida por la torre sobre la punta puesta en *A*.

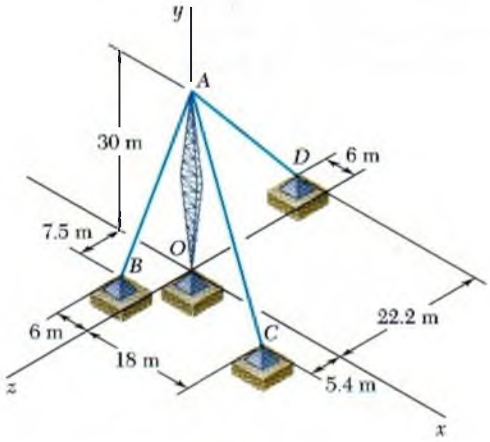


Figura P2.107 y P2.108

2.109 Una carga de madera de 320 lb se levanta usando un cabestro de tres ramas. Si en el instante mostrado la madera se encuentra en reposo, determine la tensión en cada rama del cabestro.

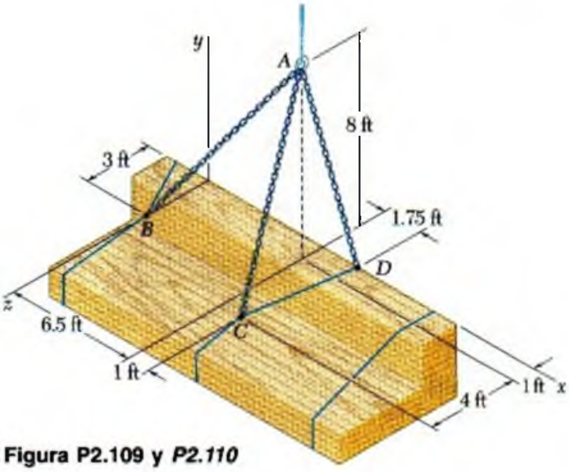


Figura P2.109 y *P2.110*

2.110 Una carga de madera se levanta usando un cabestro de tres ramas. Si en el instante mostrado la madera se encuentra en reposo y la tensión en la rama AD es de 220 lb, determine el peso de la madera.

2.111 Una fuerza **P** se aplica sobre un cono uniforme como indica la figura; el cono está sostenido por tres cuerdas cuyas líneas de acción pasan a través del vértice A. Si $P = 0$ y la tensión en la cuerda BE es de 0.2 lb, determine el peso W del cono.

2.112 Una fuerza **P** se aplica sobre un cono uniforme como indica la figura; el cono está sostenido por tres cuerdas cuyas líneas de acción pasan a través del vértice A. Si el cono pesa 1.6 lb, determine el rango de valores de P para los cuales la cuerda CF está tensa.

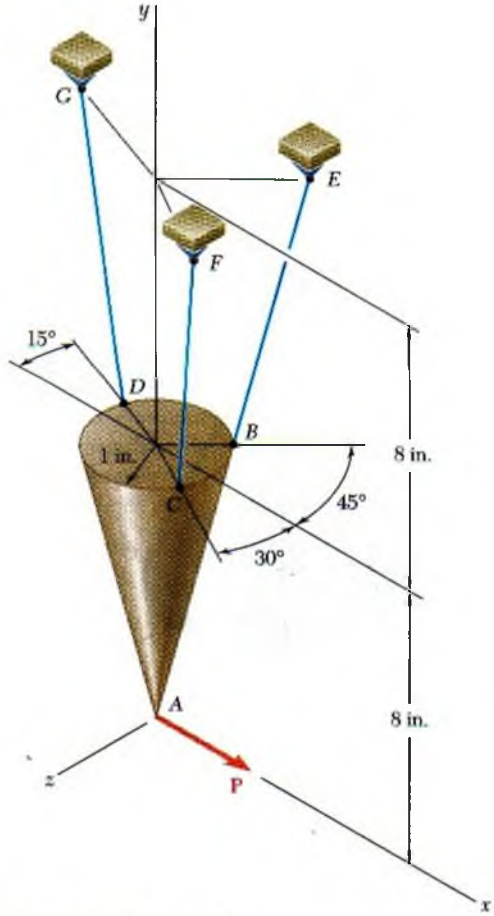


Figura *P2.111* y P2.112

2.113 Una placa triangular de 16 kg se sostiene mediante tres cables como indica la figura. Si $a = 150$ mm, determine la tensión presente en cada cable.

2.114 Una placa triangular de 16 kg se sostiene mediante tres cables como indica la figura. Si $a = 200$ mm, determine la tensión en cada cable.

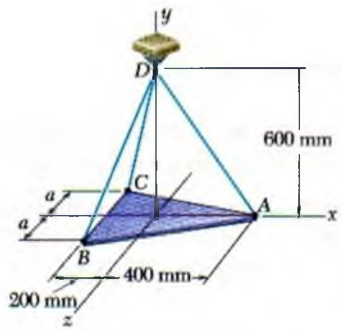


Figura P2.113 y P2.114

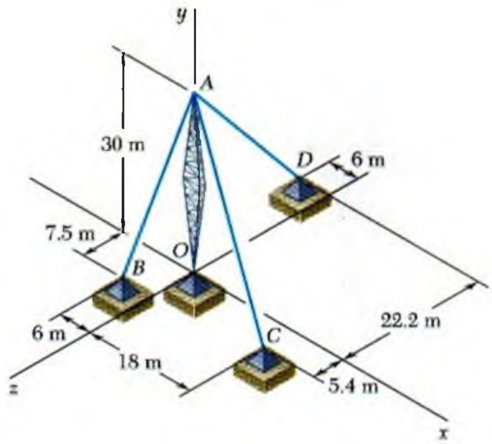


Figura P2.115

2.115 Una torre de transmisión se sostiene por medio de tres alambres que están unidos a una punta colocada en A y se anclan mediante pernos en B, C y D. Si la torre ejerce sobre la punta una fuerza vertical hacia arriba de 8 kN, determine la tensión presente en cada alambre.

2.116 Un aguilón de grúa se sostiene mediante los cables *AC* y *AD*. Un trabajador levanta un bloque de 20 kg jalando una cuerda que pasa por la polea colocada en *A*. Si el aguilón *AB* ejerce una fuerza en *A* que está dirigida de *B* hacia *A*, determine dicha fuerza y la fuerza ejercida en cada uno de los dos cables.

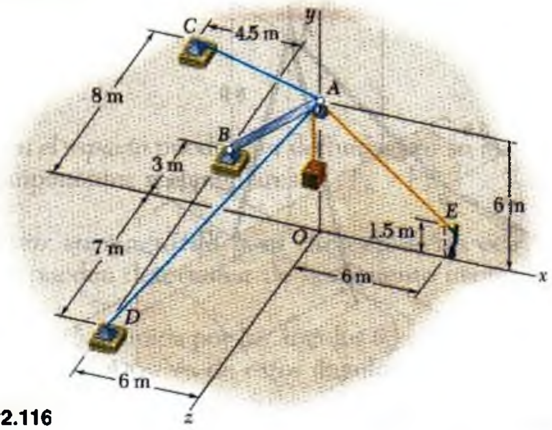


Figura P2.116

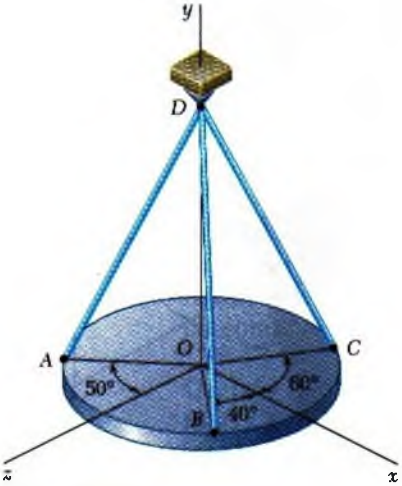


Figura ***P2.117***

2.117 Una placa circular horizontal con peso de 62 lb está suspendida por tres alambres que forman ángulos de 30° con respecto a la vertical y se encuentran unidos a un soporte en *D*. Determine la tensión presente en cada alambre.

2.118 Para el cono del problema 2.112, determine el rango de valores de **P** en los cuales la cuerda *DG* queda tensa cuando **P** se orienta en la dirección $-x$.

2.119 Un hombre de 175 lb utiliza dos cuerdas *AB* y *AC* para tratar de moverse sobre una superficie congelada y resbaladiza. Si la fuerza ejercida sobre el hombre por la superficie congelada es perpendicular a dicha superficie, determine la tensión presente en cada cuerda.

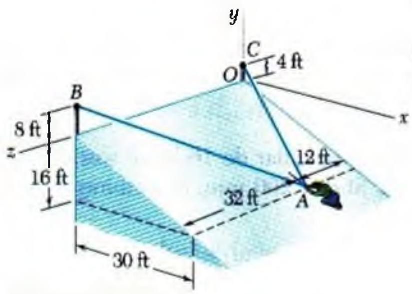


Figura ***P2.119***

2.120 Resuelva el problema 2.119 suponiendo que el hombre situado en *A* es ayudado por un amigo, quien jala hacia él con una fuerza $\mathbf{P} = -(45 \text{ lb})\mathbf{k}$.

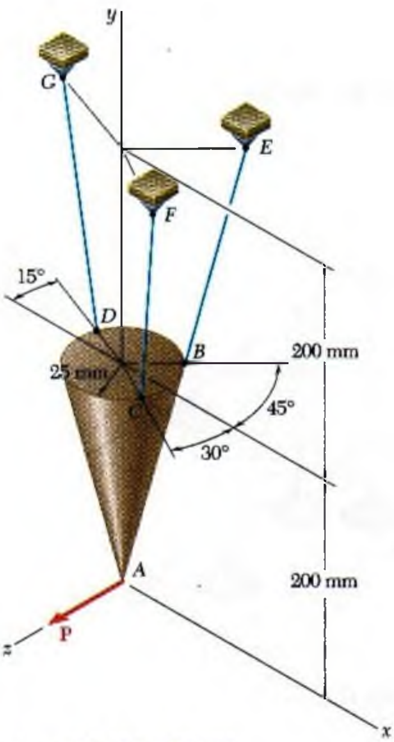


Figura P2.121 y P2.122

2.121 Una fuerza **P** se aplica sobre un cono uniforme como indica la figura; el cono está sostenido por tres cuerdas cuyas líneas de acción pasan a través del vértice *A*. Si el cono pesa 10.5 N y $P = 0$, determine la tensión presente en cada cuerda.

2.122 Una fuerza **P** se aplica sobre un cono uniforme como indica la figura; el cono está sostenido por tres cuerdas cuyas líneas de acción pasan a través del vértice *A*. Si el cono pesa 10.5 N y $P = 0.5$ N, determine la tensión en cada cuerda.

2.123 Los escaladores situados en *A* y *B* han pasado una cuerda *ADB* a través de un anillo unido al paquete en *D*, pretenden bajar el paquete, con

peso W, al escalador que se encuentra en C. El escalador en C está 64 ft por debajo de A y guía el paquete usando la cuerda CD. Si en el instante mostrado en la figura el paquete está en reposo y la tensión en la cuerda CD es de 17 lb, determine la tensión presente en la cuerda ADB y el peso del paquete. (*Sugerencia*: Considere que la tensión es la misma en ambas porciones de la cuerda ADB.)

2.124 Los escaladores situados en A y B han pasado una cuerda ADB a través de un anillo unido al paquete en D, pretenden bajar el paquete, con peso W, al escalador que se encuentra en C. El escalador en C está 64 ft por debajo de A y guía el paquete usando la cuerda CD. Si $W = 120$ lb y en el instante mostrado en la figura el paquete está en reposo, determine la tensión en cada cuerda. (*Sugerencia*: Considere que la tensión es la misma en ambas porciones de la cuerda ADB.)

2.125 Una pieza de maquinaria de peso W está sostenida temporalmente por los cables AB, AC y ADE. El cable ADE está unido al anillo en A, pasa por la polea en D, y regresa al anillo para unirse después al soporte en E. Si $W = 1\,400$ N, determine la tensión en cada cable. (*Sugerencia*: La tensión es la misma en todas las porciones del cable ADE.)

2.126 Una pieza de maquinaria de peso W está sostenida temporalmente por los cables AB, AC y ADE. El cable ADE está unido al anillo en A, pasa por la polea en D, y regresa al anillo para unirse después al soporte en E. Si la tensión en el cable AB es de 300 N, determine *a*) la tensión en AC, *b*) la tensión en ADE y *c*) el peso W. (*Sugerencia*: La tensión es la misma en todos los tramos del cable ADE.)

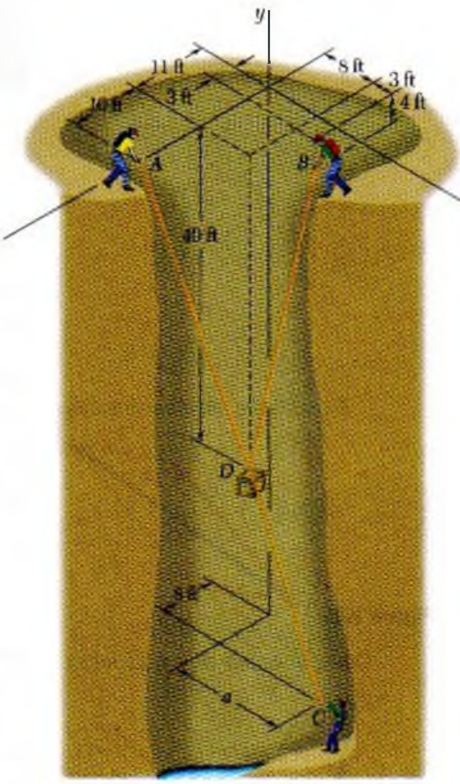


Figura P2.123 y P2.124

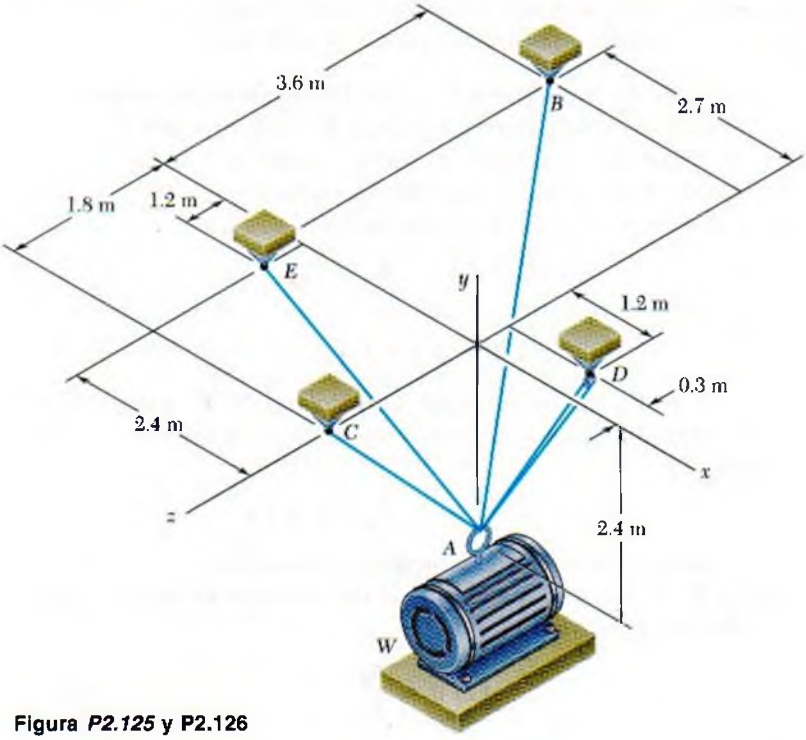


Figura *P2.125* y P2.126

2.127 Los collarines A y B unidos por medio de un alambre de 1 m de largo pueden deslizarse libremente sin fricción sobre las barras. Si una fuerza $\mathbf{P} = (680 \text{ N})\mathbf{j}$ se aplica en A, determine *a*) la tensión en el alambre cuando $y = 300$ mm, *b*) la magnitud de la fuerza $\mathbf{Q}$ requerida para mantener el equilibrio del sistema.

2.128 Resuelva el problema 2.127 suponiendo que $y = 550$ mm.

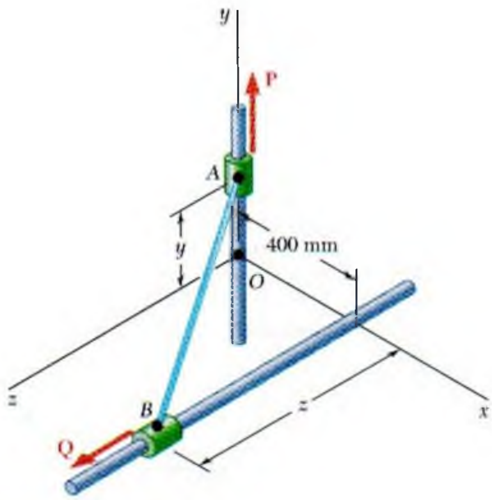


Figura P2.127

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 2

En este capítulo se estudió el efecto de fuerzas sobre partículas, es decir, sobre cuerpos de forma y tamaño tales que todas las fuerzas que actúan sobre ellos se puede suponer que se aplican en el mismo punto.

Resultante de dos fuerzas

Las fuerzas son *cantidades vectoriales* que se caracterizan por un *punto de aplicación*, una *magnitud* y una *dirección*, y se suman de acuerdo con la *ley del paralelogramo* (figura 2.35). La magnitud y dirección de la resultante **R** de dos fuerzas **P** y **Q** se pueden determinar ya sea gráficamente o por trigonometría, utilizando sucesivamente la ley de los cosenos y la ley de los senos (problema resuelto 2.1).

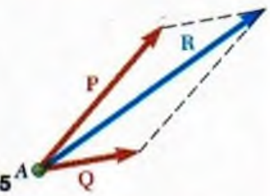


Figura 2.35

Componentes de una fuerza

Cualquier fuerza dada que actúe sobre una partícula puede descomponerse en dos o más *componentes*, es decir, se puede reemplazar por dos o más fuerzas que tengan el mismo efecto sobre la partícula. Se puede descomponer una fuerza **F** en dos componentes **P** y **Q** al dibujar un paralelogramo que tenga a **F** por su diagonal; entonces, las componentes **P** y **Q** son representadas por los dos lados adyacentes del paralelogramo (figura 2.36) y se pueden determinar ya sea en gráficas o por trigonometría (sección 2.6).

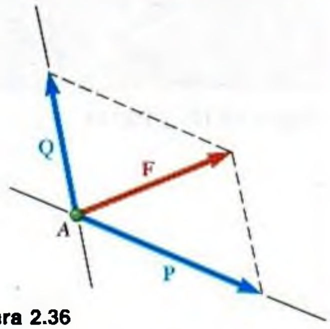


Figura 2.36

Componentes rectangulares. Vectores unitarios

Se dice que una fuerza **F** se ha dividido en dos *componentes rectangulares* si sus componentes $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$ son perpendiculares entre sí y se dirigen a lo largo de los ejes coordenados (figura 2.37). Al introducir los *vectores unitarios* **i** y **j** a lo largo de los ejes x y y, respectivamente, se escribe (sección 2.7)

$$\mathbf{F}_x = F_x\mathbf{i} \qquad \mathbf{F}_y = F_y\mathbf{j} \tag{2.6}$$

y

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} \tag{2.7}$$

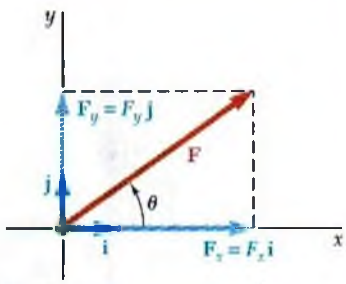


Figura 2.37

donde F_x y F_y son las *componentes escalares* de **F**. Estas componentes, que pueden ser positivas o negativas, se definen por las relaciones

$$F_x = F\cos\theta \qquad F_y = F\,\text{sen}\,\theta \tag{2.8}$$

Cuando se dan las componentes rectangulares F_x y F_y de una fuerza **F**, el ángulo θ que define la dirección de la fuerza se puede obtener al escribir

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} \tag{2.9}$$

La magnitud F de la fuerza se puede obtener al resolver una de las ecuaciones (2.8) o al aplicar el teorema de Pitágoras y escribir

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \tag{2.10}$$

Resultantes de varias fuerzas coplanares

Cuando *tres o más fuerzas coplanares* actúan sobre una partícula, las componentes rectangulares de su resultante **R** se pueden

obtener al sumar en forma algebraica las componentes correspondientes de las fuerzas dadas (sección 2.8). Se tiene

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad (2.13)$$

La magnitud y dirección de **R** se pueden determinar entonces por relaciones similares a las ecuaciones (2.9) y (2.10) (problema resuelto 2.3).

Fuerzas en el espacio

Una fuerza **F** en un *espacio tridimensional* se puede descomponer en componentes rectangulares $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$ y $\mathbf{F}_z$ (sección 2.12). Al simbolizar por medio de θ_x, θ_y y θ_z, respectivamente, los ángulos que **F** forma con los ejes x, y y z (figura 2.38), se tiene

$$F_x = F\cos\theta_x \qquad F_y = F\cos\theta_y \qquad F_z = F\cos\theta_z \qquad (2.19)$$

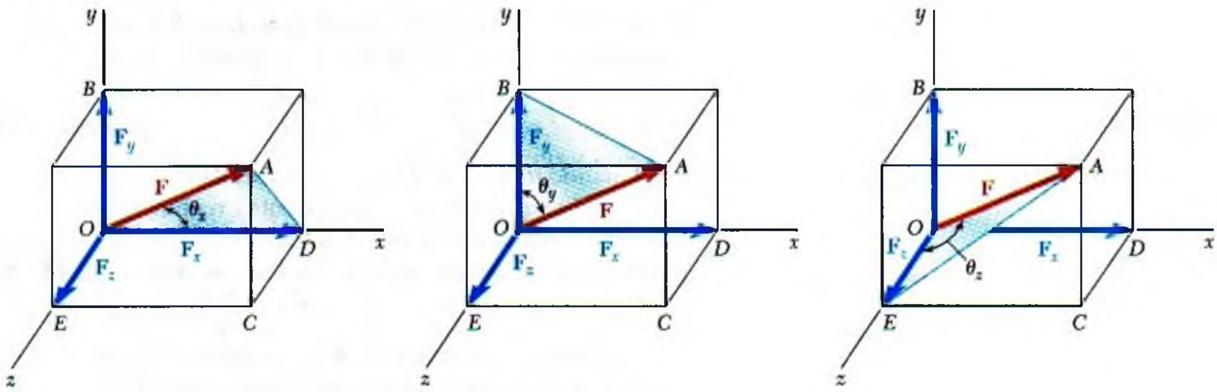


Figura 2.38 *a)* *b)* *c)*

Cosenos directores

Los cosenos de θ_x, θ_y y θ_z se conocen como los *cosenos directores (direccionales)* de la fuerza **F**. Con la introducción de los vectores unitarios **i**, **j** y **k** a lo largo de los ejes coordenados, se escribe

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \qquad (2.20)$$

o

$$\mathbf{F} = F(\cos\theta_x\mathbf{i} + \cos\theta_y\mathbf{j} + \cos\theta_z\mathbf{k}) \qquad (2.21)$$

lo que demuestra (figura 2.39) que **F** es el producto de su magnitud F y del vector unitario

$$\boldsymbol{\lambda} = \cos\theta_x\mathbf{i} + \cos\theta_y\mathbf{j} + \cos\theta_z\mathbf{k}$$

Puesto que la magnitud de $\boldsymbol{\lambda}$ es igual a la unidad, se tiene que

$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1 \qquad (2.24)$$

Cuando las componentes rectangulares F_x, F_y y F_z de una fuerza **F** se proporcionan, la magnitud F de la fuerza se encuentra al escribir

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \qquad (2.18)$$

y los cosenos directores de **F** se obtienen a partir de las ecuaciones (2.19). Se tiene

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} \qquad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} \qquad \cos\theta_z = \frac{F_z}{F} \qquad (2.25)$$

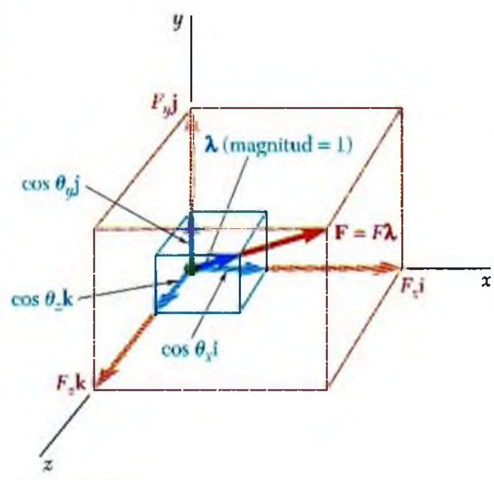


Figura 2.39

Cuando una fuerza **F** se define en un espacio tridimensional por medio de su magnitud F y de dos puntos M y N sobre su línea

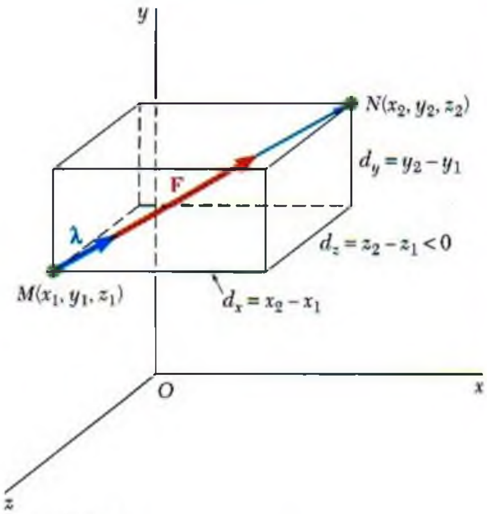


Figura 2.40

de acción (sección 2.13), sus componentes rectangulares se pueden obtener de la siguiente manera: primero se expresa el vector $\overrightarrow{MN}$ que une los puntos M y N en términos de sus componentes d_x, d_y y d_z (figura 2.40); se escribe

$$\overrightarrow{MN} = d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k} \qquad (2.26)$$

Después se determina el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ a lo largo de la línea de acción de $\mathbf{F}$ al dividir $\overrightarrow{MN}$ entre su magnitud $MN = d$:

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\overrightarrow{MN}}{MN} = \frac{1}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}) \qquad (2.27)$$

Recordando que $\mathbf{F}$ es igual al producto de F y $\boldsymbol{\lambda}$, se tiene

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = \frac{F}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}) \qquad (2.28)$$

de lo cual se desprende (problemas resueltos 2.7 y 2.8) que las componentes escalares de $\mathbf{F}$ son, respectivamente,

$$F_x = \frac{Fd_x}{d} \qquad F_y = \frac{Fd_y}{d} \qquad F_z = \frac{Fd_z}{d} \qquad (2.29)$$

Resultante de fuerzas en el espacio

Cuando *dos o más fuerzas* actúan sobre una partícula en el *espacio tridimensional*, las componentes rectangulares de su resultante $\mathbf{R}$ se pueden obtener al sumar en forma algebraica las componentes correspondientes de las fuerzas (sección 2.14). Se tiene

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad R_z = \Sigma F_z \qquad (2.31)$$

La magnitud y dirección de $\mathbf{R}$ se pueden determinar entonces a partir de relaciones similares a las ecuaciones (2.18) y (2.25) (véase problema resuelto 2.8).

Equilibrio de una partícula

Se dice que una partícula está en *equilibrio* cuando la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre ella es cero (sección 2.9). La partícula entonces permanecerá en reposo (si originalmente se encuentra en reposo) o se moverá con velocidad constante en una línea recta (si se encontraba originalmente en movimiento) (sección 2.10).

Diagrama de cuerpo libre

Para resolver un problema que se refiera a una partícula en equilibrio, primero se deberá dibujar un *diagrama de cuerpo libre* de la partícula que muestre todas las fuerzas que actúan sobre ella (sección 2.11). Si *sólo actúan tres fuerzas coplanares* sobre la partícula, se puede dibujar un *triángulo de fuerzas* para expresar que la partícula se encuentra en equilibrio. Este triángulo se puede resolver gráficamente o por trigonometría para no más de dos incógnitas (véase problema resuelto 2.4). Si se incluyen *más de tres fuerzas coplanares*, se deberán utilizar y resolver las ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad (2.15)$$

Estas ecuaciones pueden ser usadas para no más de dos incógnitas (problema resuelto 2.6).

Equilibrio en el espacio

Cuando una partícula está en *equilibrio en el espacio tridimensional* (sección 2.15), deberán usarse y resolverse las tres ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0 \qquad (2.34)$$

Estas ecuaciones se pueden resolver para no más de tres incógnitas (véase problema resuelto 2.9).

Problemas de repaso

2.129 Se aplican dos fuerzas en el gancho mostrado en la figura. Si la magnitud de **P** es de 14 lb determine, por trigonometría, *a*) el ángulo α requerido si la resultante **R** de las dos fuerzas aplicadas en el gancho debe ser horizontal, *b*) la magnitud correspondiente de **R**.

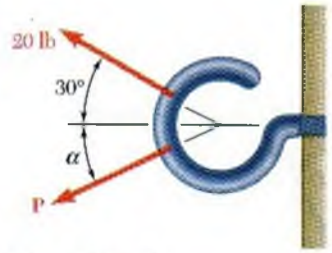


Figura P2.129

2.130 Determine las componentes *x* y *y* de cada una de las fuerzas que se muestran en la figura.

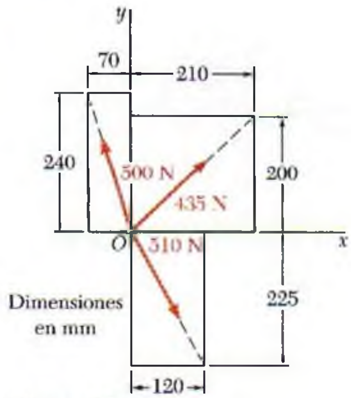


Figura *P2.130*

2.131 El alambre atirantado *BD* ejerce sobre el poste telefónico *AC* una fuerza **P** dirigida a lo largo de *BD*. Si **P** tiene una componente de 450 N a lo largo de la línea *AC*, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P**, *b*) su componente en una dirección perpendicular a *AC*.

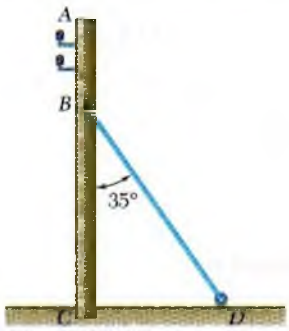


Figura P2.131

2.132 Sabiendo que $\alpha = 25°$, determine la tensión en *a*) el cable *AC*, *b*) la cuerda *BC*.

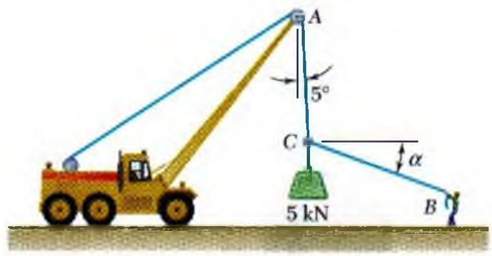


Figura P2.132

2.133 La cabina de un teleférico se desliza a velocidad constante por el cable *DE* y se sostiene mediante un conjunto de poleas, las cuales pueden rodar libremente sobre el cable de soporte *ACB*. Sabiendo que $\alpha = 42°$ y $\beta = 32°$, que la tensión en el cable *DE* es de 20 kN, y que la tensión en el cable *DF* es insignificante, determine *a*) el peso combinado de la cabina, su sistema de soporte y sus pasajeros, *b*) la tensión en el cable de soporte *ACB*.

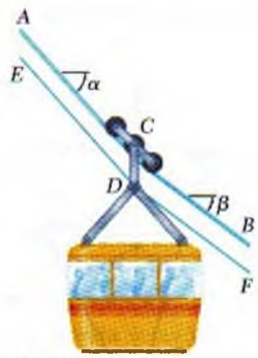


Figura *P2.133*

2.134 Una carga de 350 lb está sostenida mediante el arreglo de cuerdas y poleas mostrado en la figura. Si $\beta = 25°$, determine la magnitud y la dirección de la fuerza **P** que debe aplicarse en el extremo libre de la cuerda para mantener al sistema en equilibrio. (Vea la sugerencia del problema 2.68.)

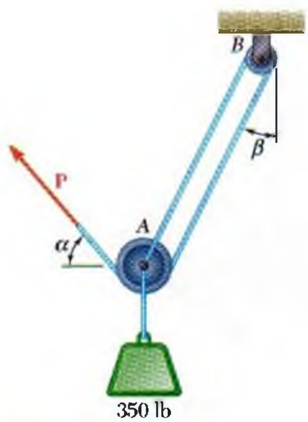


Figura P2.134

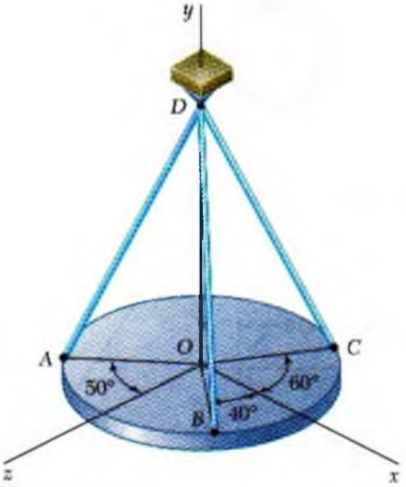


Figura P2.135

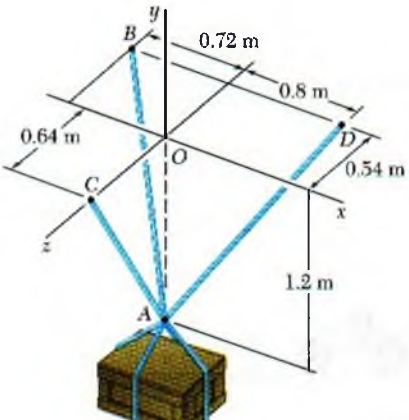
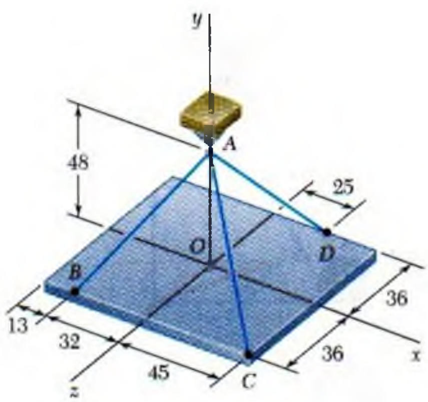


Figura *P2.138*



Dimensiones en pulgadas

Figura P2.139

2.135 Una placa circular horizontal se sostiene mediante tres alambres que forman ángulos de 30° con respecto a la vertical y se encuentran unidos a un soporte ubicado en el punto D. Si la componente x de la fuerza ejercida por el alambre AD sobre la placa es de 220.6 N, determine *a*) la tensión en el alambre AD, *b*) los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que forma la fuerza ejercida en A con los ejes coordenados.

2.136 Una fuerza **F** con magnitud de 600 lb actúa en el origen de un sistema coordenado. Si $F_x = 200$ lb, $\theta_z = 136.8°$ y $F_y < 0$, determine *a*) las componentes F_y y F_z, *b*) los ángulos θ_x y θ_y.

2.137 Encuentre la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas que se muestran en la figura, sabiendo que $P = 500$ lb y $Q = 600$ lb.

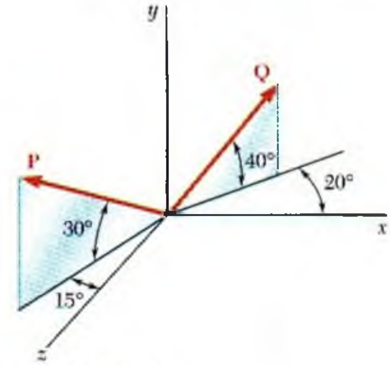


Figura P2.137

2.138 La caja de madera que se muestra en la figura se sostiene por medio de tres cables. Si la tensión en el cable AB es de 3 kN, determine el peso de la caja.

2.139 Una placa rectangular está sostenida por tres cables como se muestra en la figura. Si la tensión en el cable AD es de 120 lb, determine el peso de la placa.

2.140 Un contenedor de peso W está suspendido del aro A. El cable BAC pasa por el aro y se une a los soportes fijos en B y C. Dos fuerzas $\mathbf{P} = P\mathbf{i}$ y $\mathbf{Q} = Q\mathbf{k}$ se aplican en el aro para mantener al recipiente en la posición mostrada. Si $W = 1\,200$ N, determine P y Q. (*Sugerencia*: Considere que la tensión es la misma en ambos tramos del cable BAC.)

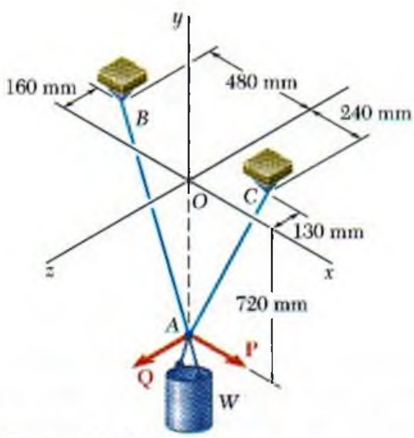


Figura *P2.140*

Problemas de computadora

2.C1 Con el empleo de software, determine la magnitud y la dirección de la resultante de n fuerzas coplanares aplicadas en el punto A. Utilice este software para resolver los problemas 2.31, 2.32, 2.33 y 2.34.

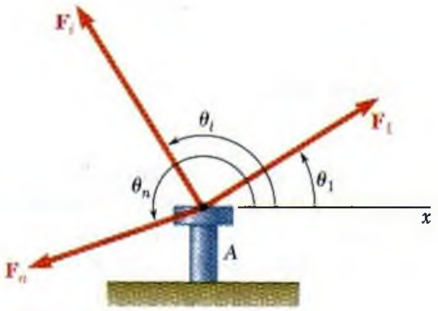


Figura P2.C1

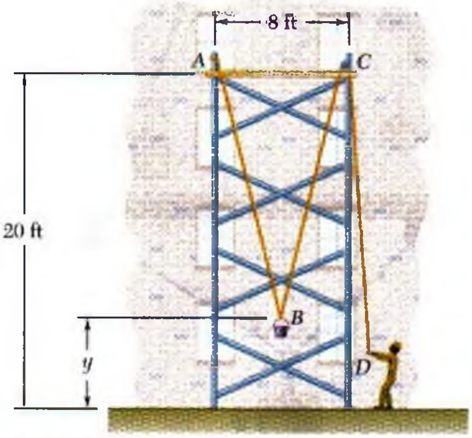


Figura P2.C2

2.C2 Un trabajador planea subir una cubeta de pintura de 5 galones y 60 lb de peso atando una cuerda al andamio en A, y después pasando la cuerda a través del asa de la cubeta en B y por la polea en C; *a*) grafique la tensión en la cuerda como una función de la altura y para $2 \text{ ft} \leq y \leq 18 \text{ ft}$; *b*) evalúe el plan del trabajador.

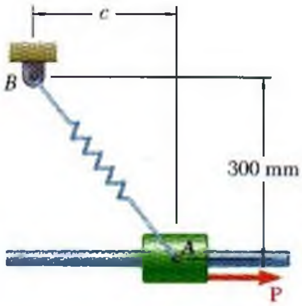


Figura P2.C3

2.C3 El collar A puede deslizarse libremente y sin fricción sobre la barra horizontal que se muestra en la figura. El resorte conectado al collar tiene una constante k y no sufre deformación cuando el collar está directamente abajo del soporte B. Exprese, en términos de k y la distancia c, la magnitud de la fuerza **P** requerida para mantener el equilibrio del sistema. Grafique P como una función de c para los valores de c entre 0 y 600 mm cuando: *a*) $k = 2$ N/mm, *b*) $k = 3$ N/mm y *c*) $k = 4$ N/mm.

2.C4 Una carga **P** está sostenida por dos cables, como se muestra en la figura. Determine, empleando software, la tensión en cada cable como una función de P y θ. Para los siguientes tres conjuntos de valores numéricos grafique las tensiones para los valores de θ que se encuentran desde $\theta_1 = \beta - 90°$ hasta $\theta_2 = 90°$ y a partir de las gráficas determine *a*) el valor de θ para el cual la tensión en los dos cables es mínima y *b*) el valor correspondiente de la tensión.

(1) $\alpha = 35°$, $\beta = 75°$, $P = 1.6$ kN
(2) $\alpha = 50°$, $\beta = 30°$, $P = 2.4$ kN
(3) $\alpha = 40°$, $\beta = 60°$, $P = 1.0$ kN

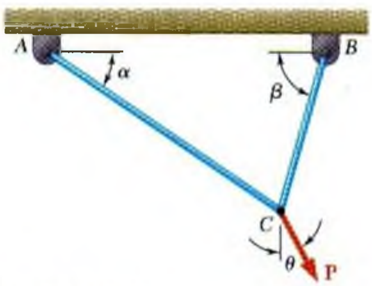


Figura P2.C4

2.C5 Los cables *AC* y *BC* se amarran juntos en *C* y se cargan como se muestra en la figura. Se sabe que $P = 100$ lb, *a*) exprese la tensión en cada cable como una función de θ; *b*) grafique la tensión en cada cable para $0 \leq \theta \leq 90°$, y *c*) a partir de la gráfica obtenida en el inciso *a*), determine el valor mínimo de θ para el cual ambos cables se mantienen en tensión.

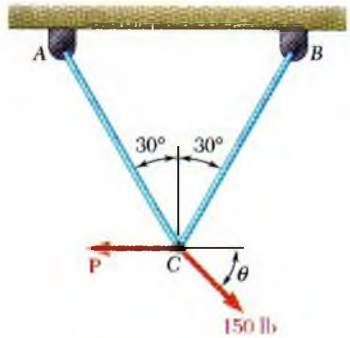


Figura P2.C5

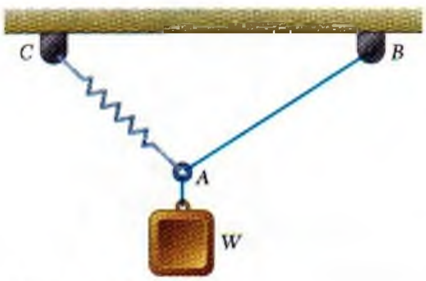


Figura P2.C6

2.C6 Un recipiente de peso *W* está sostenido del aro *A* al cual están conectados el cable *AB*, de 5 m de longitud y el resorte *AC*. La constante del resorte es de 100 N/m, y su longitud sin estiramiento es de 3 m. Determine la tensión en el cable cuando *a*) $W = 120$ N y *b*) $W = 160$ N.

2.C7 Un acróbata se encuentra caminando sobre una cuerda tensa de longitud $L = 80.3$ ft que está unida a los soportes *A* y *B*, los cuales se encuentran separados por una distancia de 80 ft. El peso combinado del acróbata y su garrocha de balance es de 200 lb y la fricción entre sus zapatos y la cuerda son suficientes para prevenir el deslizamiento. Despreciando el peso y cualquier tipo de deformación elástica de la cuerda, úsese software para calcular la deflexión *y* y la tensión en las porciones *AC* y *BC* de la cuerda para los valores de *x* comprendidos entre 0.5 y 40 ft usando incrementos de 0.5 ft. De los resultados obtenidos, determine *a*) la deflexión máxima de la cuerda, *b*) la tensión máxima en la cuerda, y *c*) los valores mínimos de la tensión en las porciones *AC* y *BC* de la cuerda.

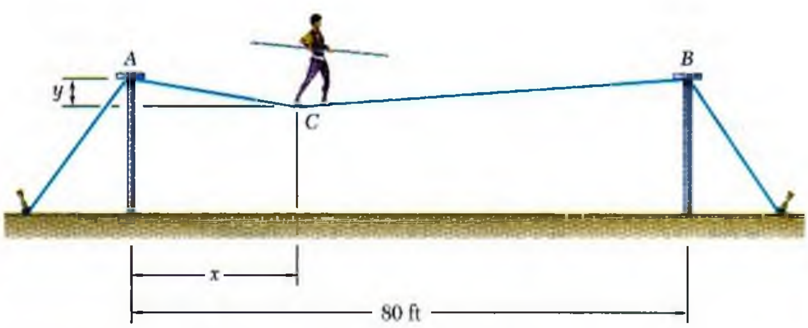


Figura P2.C7

2.C8 La torre de transmisión que se muestra en la figura está sostenida por tres cables, los cuales están conectados a una articulación en *A* y anclados en los puntos *B*, *C* y *D*. El cable *AD* tiene 21 m de longitud y la tensión en el mismo es de 20 kN; *a*) exprese las componentes *x*, *y* y *z* de la fuerza

ejercida por el cable AD sobre el ancla en D y los ángulos θ_x, θ_y y θ_z correspondientes en términos de α y b) grafique las componentes de la fuerza y los ángulos θ_x, θ_y y θ_z para $0 \leq \alpha \leq 60°$.

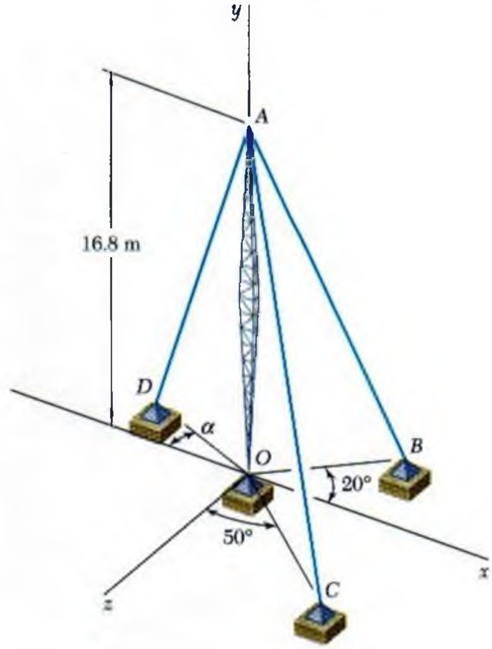


Figura P2.C8

2.C9 Una torre está sostenida por los cables AB y AC. Un trabajador amarra una cuerda de 12 m de longitud a la torre en A y ejerce una fuerza constante de 160 N sobre la cuerda; a) exprese la tensión en cada cable como una función de θ si la resultante de las tensiones en los cables y en la cuerda está dirigida hacia abajo; y b) grafique la tensión en cada cable como una función de θ para $0 \leq \theta \leq 180°$, y a partir de la gráfica determine el rango de valores de θ para los cuales los cables permanecen en tensión.

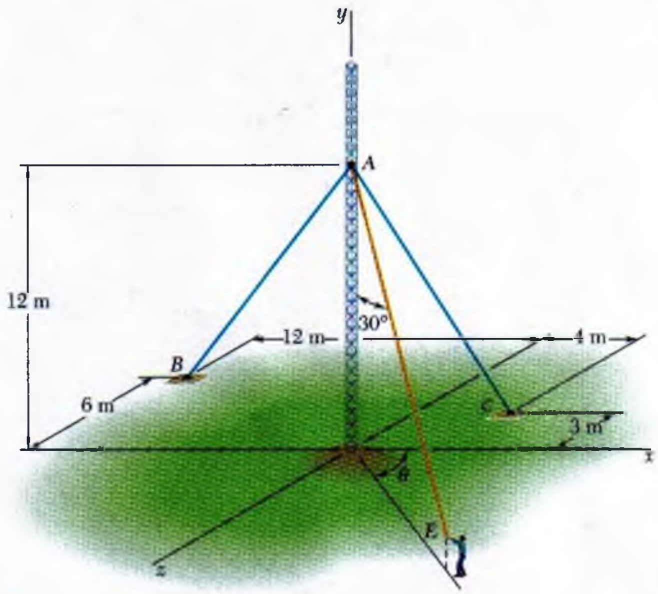


Figura P2.C9

2.C10 Los collares A y B están conectados por un alambre de 10 in. de longitud y pueden deslizarse libremente y sin fricción sobre las barras. Si se aplica una fuerza **Q** con una magnitud de 25 lb sobre el collar B, como se muestra en la figura, determine la tensión en el alambre y la magnitud correspondiente de la fuerza **P** requerida para mantener el equilibrio. Grafique la tensión en el alambre y la magnitud de la fuerza **P** para $0 \leq x \leq 5$ in.

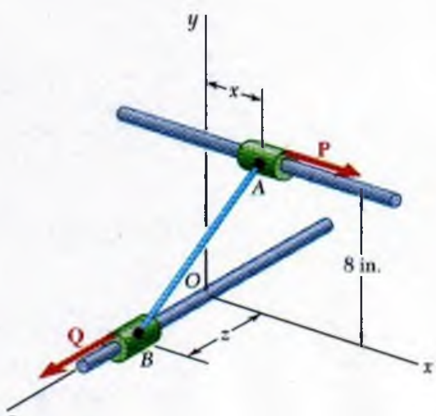


Figura P2.C10

CAPÍTULO 3

Cuerpos rígidos: sistemas equivalentes de fuerza



En este capítulo se demostrará que el sistema de fuerzas no concurrentes que actúa sobre el arnés del paracaídas puede ser reemplazado por un sistema equivalente más simple.

CUERPOS RÍGIDOS: SISTEMAS EQUIVALENTES DE FUERZA

3.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se supuso que cada uno de los cuerpos considerados podía ser tratado como si fuera una sola partícula. Sin embargo, esto no siempre es posible y, en general, un cuerpo debe tratarse como la combinación de varias partículas. Tendrá que tomarse en consideración el tamaño del cuerpo y también el hecho de que las fuerzas actúan sobre distintas partículas y, por tanto, tienen distintos puntos de aplicación.

Al definir que un *cuerpo rígido* es aquel que no se deforma, se supone que la mayoría de los cuerpos considerados en la mecánica elemental son *rígidos*. Sin embargo, las estructuras y máquinas reales nunca son absolutamente rígidas y se deforman bajo la acción de las cargas que actúan sobre ellas. A pesar de ello, por lo general esas deformaciones son pequeñas y no afectan las condiciones de equilibrio o de movimiento de la estructura en consideración. No obstante, tales deformaciones son importantes en lo concerniente a la resistencia a la falla de las estructuras y están consideradas en el estudio de la mecánica de materiales.

En este capítulo se estudiará el efecto de las fuerzas ejercidas sobre un cuerpo rígido y se aprenderá cómo reemplazar un sistema de fuerzas dado por un sistema equivalente más simple. Este análisis estará basado en la suposición fundamental de que el efecto de una fuerza dada sobre un cuerpo rígido permanece inalterado si dicha fuerza se mueve a lo largo de su línea de acción (*principio de transmisibilidad*). Por tanto, las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido pueden representarse por *vectores deslizantes*, como se mencionó en la sección 2.3.

Dos conceptos fundamentales asociados con el efecto de una fuerza sobre un cuerpo rígido son el *momento de una fuerza con respecto a un punto* (sección 3.6) y el *momento de una fuerza con respecto a un eje* (sección 3.11). Como la determinación de estas cantidades involucra el cálculo de productos escalares y vectoriales de dos vectores, en este capítulo se presentarán los aspectos fundamentales del álgebra vectorial aplicados a la solución de problemas que involucran fuerzas que actúan sobre cuerpos rígidos.

Otro concepto que se presentará en este capítulo es el de un *par*, esto es, la combinación de dos fuerzas que tienen la misma magnitud, líneas de acción paralelas y sentidos opuestos (sección 3.12). Como se verá, cualquier sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo rígido puede ser reemplazado por un sistema equivalente que consta de una fuerza, que actúa en cierto punto, y un par. Este sistema básico recibe el nombre de *sistema fuerza-par*. En el caso de fuerzas concurrentes, coplanares o paralelas, el sistema equivalente fuerza-par se puede reducir a una sola fuerza, denominada la *resultante* del sistema, o a un solo par, llamado el *par resultante* del sistema.

3.2. FUERZAS EXTERNAS E INTERNAS

Las fuerzas que actúan sobre los cuerpos rígidos se pueden dividir en dos grupos: 1) *fuerzas externas* y 2) *fuerzas internas*.

1. Las *fuerzas externas* representan la acción que ejercen otros cuerpos sobre el cuerpo rígido en consideración. Ellas son las responsables del comportamiento externo del cuerpo rígido. Las fuerzas externas causan que el cuerpo se mueva o aseguran que éste permanezca en reposo. En el presente capítulo y en los capítulos 4 y 5 se considerarán sólo las fuerzas externas.

2. Las *fuerzas internas* son aquellas que mantienen unidas las partículas que conforman al cuerpo rígido. Si éste está constituido en su estructura por varias partes, las fuerzas que mantienen unidas a dichas partes también se definen como fuerzas internas. Este grupo de fuerzas se estudiará en los capítulos 6 y 7.

Como ejemplo de fuerzas externas, considérense las fuerzas que actúan sobre un camión descompuesto que es arrastrado hacia delante por varios hombres mediante cuerdas unidas a la defensa delantera (figura 3.1). Las fuerzas externas que actúan sobre el camión se muestran en un *diagrama de cuerpo libre* (figura 3.2). En primer lugar, se debe considerar el *peso* del camión. A pesar de que el peso representa el efecto de la atracción de la Tierra sobre cada una de las partículas que constituyen al camión, éste se puede representar por medio de una sola fuerza **W**. El *punto de aplicación* de esta fuerza, esto es, el punto en el que actúa la fuerza, se define como el *centro de gravedad* del camión. En el capítulo 5 se verá cómo se pueden determinar los centros de gravedad. El peso **W** hace que el camión se mueva hacia abajo. De hecho, si no fuera por la presencia del piso, el peso podría ocasionar que el camión se moviera hacia abajo, esto es, que cayera. El piso se opone a la caída del camión por medio de las reacciones $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$. Estas fuerzas se ejecen *por* el piso *sobre* el camión y, por tanto, deben ser incluidas entre las fuerzas externas que actúan sobre el camión.

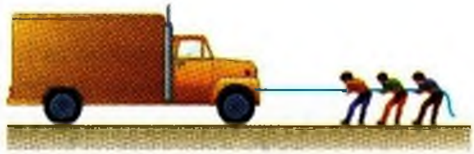


Figura 3.1

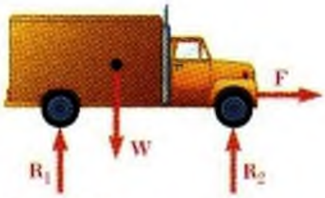


Figura 3.2

Los hombres ejercen la fuerza **F** al tirar de la cuerda. El punto de aplicación de **F** está en la defensa delantera. La fuerza **F** tiende a hacer que el camión se mueva hacia delante en línea recta y, en realidad, logra moverlo puesto que no existe una fuerza externa que se oponga a dicho movimiento. (Para simplificar, en este caso se ha despreciado la resistencia a la rodadura.) Este movimiento del camión hacia delante, donde cada línea recta mantiene su orientación original (el piso del camión permanece horizontal y sus lados se mantienen verticales), se conoce como *traslación*. Otras fuerzas podrían ocasionar que el camión se moviera en forma diferente. Por ejemplo, la fuerza ejercida por un gato colocado debajo del eje delantero podría ocasionar que el camión rotara alrededor de su eje trasero. Este movimiento es una *rotación*. Por tanto, se puede concluir que cada una de las *fuerzas externas* que actúan sobre un *cuerpo rígido* puede ocasionar un movimiento de traslación, rotación o ambos, siempre y cuando dichas fuerzas no encuentren alguna oposición.

3.3. PRINCIPIO DE TRANSMISIBILIDAD. FUERZAS EQUIVALENTES

El *principio de transmisibilidad* establece que las condiciones de equilibrio o de movimiento de un cuerpo rígido permanecerán inalteradas si una fuerza **F** que actúa en un punto dado de ese cuerpo se reemplaza por una fuerza **F′** que tiene la misma magnitud y dirección, pero que actúa en un punto distinto, *siempre y cuando las dos fuerzas tengan la misma línea de acción* (figura 3.3). Las dos fuerzas, **F** y **F′**, tienen el mismo efecto sobre el cuerpo rígido y se dice que son *equivalentes*. Este principio establece que la acción de una fuerza puede ser *transmitida* a lo largo de su línea de acción, lo cual está basado en la evidencia experimental; *no puede* ser derivado a partir de las propiedades establecidas hasta ahora en este libro y, por tanto, debe ser aceptado como una ley experimental. Sin embargo, como se verá en la sección 16.5, el principio de transmisibilidad puede ser derivado a partir del estudio de la dinámica de los cuerpos rígidos, pero dicho estudio requiere la introduc-

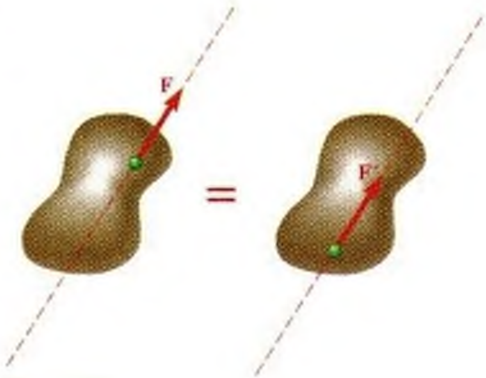


Figura 3.3

ción de la segunda y tercera leyes de Newton y también algunos otros conceptos. Por consiguiente, el estudio de la estática de los cuerpos rígidos estará basado en los tres principios que se han presentado hasta ahora, que son la ley del paralelogramo para la adición de vectores, la primera ley de Newton y el principio de transmisibilidad.

En el capítulo 2 se mencionó que las fuerzas que actúan en una partícula pueden ser representadas por vectores, los cuales tienen un punto de aplicación bien definido, la partícula misma y, por consiguiente, serán vectores fijos o adheridos. Sin embargo, en el caso de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido el punto de aplicación de una fuerza no es importante, siempre y cuando su línea de acción permanezca inalterada. Por tanto, las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido deben ser representadas por una clase de vector diferente, el *vector deslizante*, puesto que permite que las fuerzas se deslicen a lo largo de su línea de acción. Es importante señalar que todas las propiedades que serán derivadas en las siguientes secciones para las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido serán, en general, válidas para cualquier sistema de vectores deslizantes. Sin embargo, para mantener la presentación más intuitiva, ésta se llevará a cabo en términos de fuerzas físicas en lugar de las entidades matemáticas conocidas como vectores deslizantes.

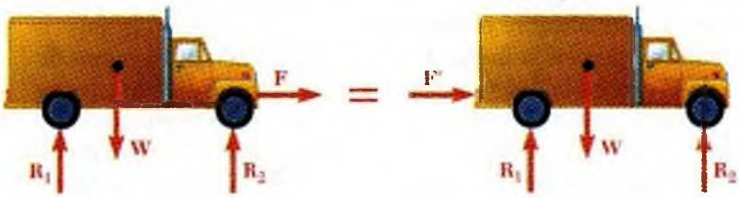


Figura 3.4

En el ejemplo del camión, en primer lugar se observa que la línea de acción de la fuerza **F** es una línea horizontal que pasa a través de las defensas delantera y trasera del camión (figura 3.4). Por tanto, empleando el principio de transmisibilidad se puede reemplazar **F** por una *fuerza equivalente* **F**′que actúa sobre la defensa trasera. En otras palabras, las condiciones de movimiento y todas las demás fuerzas externas que actúan sobre el camión (**W**, $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$) permanecen inalteradas si los hombres empujan la defensa trasera en lugar de tirar de la defensa delantera.

El principio de transmisibilidad y el concepto de fuerzas equivalentes tienen limitaciones. Por ejemplo, considere una barra corta AB sobre la cual actúan dos fuerzas axiales iguales y opuestas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ como se muestra en la figura 3.5*a*. De acuerdo con el principio de transmisibilidad, la fuerza $\mathbf{P}_2$ se puede reemplazar por una fuerza $\mathbf{P}_2'$ que tiene la misma magnitud, misma dirección y misma línea de acción pero que actúa en A en lugar de en B (figura 3.5*b*). Las fuerzas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2'$ que actúan sobre la misma partícula pueden sumarse de acuerdo a las reglas del capítulo 2 y, como dichas

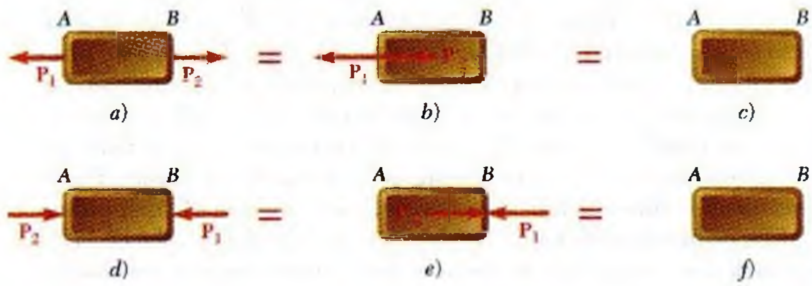


Figura 3.5

fuerzas son iguales y opuestas, su suma es igual a cero. Por tanto, en términos del comportamiento externo de la barra el sistema de fuerzas original mostrado en la figura 3.5*a* es equivalente a que no existiera fuerza alguna que actúe sobre la barra (figura 3.5*c*).

Considere ahora las dos fuerzas iguales y opuestas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ que actúan sobre la barra *AB*, como se muestra en la figura 3.5*d*. La fuerza $\mathbf{P}_2$ puede ser reemplazada por una fuerza $\mathbf{P}'_2$ que tiene la misma magnitud, misma dirección y misma línea de acción pero que actúa en *B* en lugar de en *A* (figura 3.5*e*). Entonces, las fuerzas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}'_2$ pueden sumarse y, nuevamente, su suma es igual a cero (figura 3.5*f*). De esta manera, desde el punto de vista de la mecánica de los cuerpos rígidos, los sistemas mostrados en la figura 3.5*a* y *d* son equivalentes. Sin embargo, resulta obvio que las *fuerzas internas* y las *deformaciones* producidas por los dos sistemas son diferentes. La barra de la figura 3.5*a* está en *tensión* y, si no es en su totalidad rígida, se incrementará ligeramente su longitud; la barra de la figura 3.5*d* está en *compresión* y, si no es rígida, disminuirá en poco su longitud. De esta forma, aunque el principio de transmisibilidad se puede usar en forma libre para determinar las condiciones de movimiento o de equilibrio de los cuerpos rígidos y para calcular las fuerzas externas que actúan sobre los mismos, debe evitarse, o por lo menos, emplearse con cuidado, al momento de determinar fuerzas internas y deformaciones.

3.4. PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES

Para entender mejor el efecto de una fuerza sobre un cuerpo rígido, a continuación se introducirá un nuevo concepto: el *momento de una fuerza con respecto a un punto*. Este concepto se podrá entender más fácilmente y podrá aplicarse en una forma más efectiva si primero se agrega a las herramientas matemáticas que se tienen disponibles, el *producto vectorial* de dos vectores.

El producto vectorial de los vectores **P** y **Q** se define como el vector **V** que satisface las siguientes condiciones:

1. La línea de acción de **V** es perpendicular al plano que contiene a **P** y **Q** (figura 3.6*a*).
2. La magnitud de **V** es el producto de las magnitudes de **P** y **Q** por el seno del ángulo θ formado por **P** y **Q** (cuya medida siempre deberá ser menor o igual a 180°); por tanto, se tiene

$$V = PQ \text{ sen } \theta \tag{3.1}$$

3. La dirección de **V** se obtiene a partir de la *regla de la mano derecha*. Cierre su mano derecha y manténgala de manera que sus dedos estén doblados en el primer sentido que la rotación a través del ángulo θ que haría al vector **P** colineal con el vector **Q**; entonces, su dedo pulgar indicará la dirección del vector **V** (figura 3.6*b*). Obsérvese que si **P** y **Q** no tienen un punto de aplicación común, estos primeros se deben volver a dibujar a partir del mismo punto. Se dice que los tres vectores **P**, **Q** y **V** —tomados en ese orden— forman una *tríada a mano derecha*.[†]

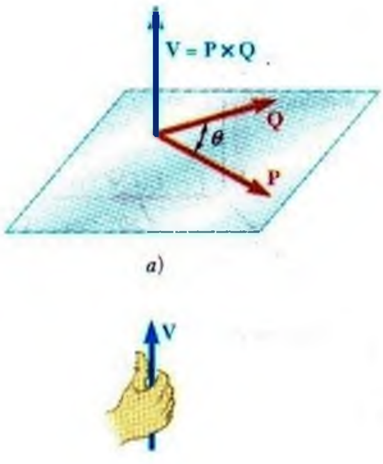


Figura 3.6

[†]Se debe señalar que los ejes *x*, *y* y *z* utilizados en el capítulo 2 forman un sistema de ejes ortogonales a mano derecha y que los vectores unitarios **i**, **j** y **k** definidos en la sección 2.12 forman una tríada ortogonal a mano derecha.

Como se mencionó anteriormente, el vector **V** que satisface estas tres condiciones (las cuales lo definen en forma única) se conoce como el producto vectorial de **P** y **Q** y se representa por la expresión matemática

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} \tag{3.2}$$

En virtud de la notación utilizada, el producto vectorial de dos vectores **P** y **Q** también se conoce como el *producto cruz* de **P** y **Q**.

A partir de la ecuación (3.1) se concluye que cuando dos vectores **P** y **Q** tienen la misma dirección, o direcciones opuestas, su producto vectorial es igual a cero. En el caso general, cuando el ángulo θ formado por los dos vectores no es 0° ni 180°, a la ecuación (3.1) se le puede dar una interpretación geométrica simple: la magnitud V del producto vectorial de **P** y **Q** es igual al área del paralelogramo que tiene como lados a **P** y **Q** (figura 3.7). Por tanto, el producto vectorial **P** × **Q** permanece inalterado si **Q** se reemplaza por un vector **Q′** que sea coplanar a **P** y **Q** y tal que la línea que une a las partes terminales de **Q** y **Q′** sea paralelo a **P**. Así, se escribe

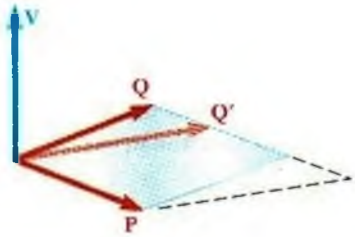


Figura 3.7

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}' \tag{3.3}$$

A partir de la tercera condición empleada para definir al producto vectorial **V** de **P** y **Q**, esto es, la condición que establece que **P**, **Q** y **V** deben formar una tríada a mano derecha, se concluye que los productos vectoriales *no son comunitarios*, es decir, **Q** × **P** no es igual a **P** × **Q**. De hecho, se puede verificar fácilmente que **Q** × **P** está representado por el vector −**V**, que es igual y opuesto a **V**, entonces se escribe

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{P} = -(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \tag{3.4}$$

Ejemplo. Calcúlese el producto vectorial **V** = **P** × **Q** cuando el vector **P** tiene una magnitud de 6 y se encuentra en el plano zx que forma un ángulo de 30° con el eje x y el vector **Q** tiene una magnitud de 4 y se encuentra a lo largo del eje x (figura 3.8).

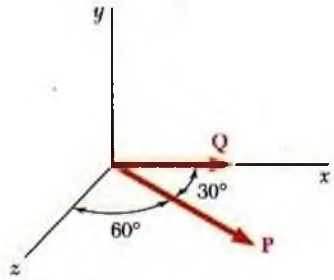


Figura 3.8

A partir de la definición del producto vectorial se concluye que el vector **V** debe estar a lo largo del eje y, tener la magnitud

$$V = PQ \text{ sen } \theta = (6)(4) \text{ sen } 30° = 12$$

y que debe estar dirigido hacia arriba.

Se vio que la propiedad conmutativa no es aplicable en el caso de productos vectoriales. Ahora se puede preguntar si la propiedad *distributiva* se cumple, esto es, si la relación

$$\mathbf{P} \times (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}_1 + \mathbf{P} \times \mathbf{Q}_2 \tag{3.5}$$

es válida. La respuesta es *sí*. Probablemente muchos lectores están dispuestos a aceptar sin demostración formal una respuesta que de manera intuitiva puede parecer correcta. Sin embargo, dado que la estructura del álgebra vectorial y de la estática depende de la relación (3.5), se debe tomar el tiempo necesario para su deducción.

Sin perder la generalidad se puede suponer que **P** está dirigida a lo largo del eje y (figura 3.9a). Representando con **Q** la suma de $\mathbf{Q}_1$ y $\mathbf{Q}_2$, se trazan perpendiculares a partir de los extremos terminales de **Q**, $\mathbf{Q}_1$ y $\mathbf{Q}_2$ hacia el plano zx, quedando definidos de esta forma los vectores **Q′**, $\mathbf{Q}_1'$, $\mathbf{Q}_2'$. Se hará referencia a estos vectores, respectivamente, como las *proyecciones* de la ecuación (3.3), se observa que el término del lado izquierdo de la ecuación (3.5) puede ser reemplazado por **P** × **Q′** y que, en forma similar, los productos vectoriales **P** ×

$\mathbf{Q}_1$ y $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}_2$ del lado derecho pueden ser reemplazados, respectivamente, por $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}'_1$ y $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}'_2$. De esta forma, la relación que debe ser demostrada puede escribirse de la siguiente manera

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q}' = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}'_1 + \mathbf{P} \times \mathbf{Q}'_2 \qquad (3.5')$$

Ahora se observa que $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}'$ se puede obtener a partir de $\mathbf{Q}'$ multiplicando a este vector por el escalar P y rotándolo 90° en el plano zx en el sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj (figura 3.9*b*); los otros dos productos vectoriales en (3.5′) se pueden obtener

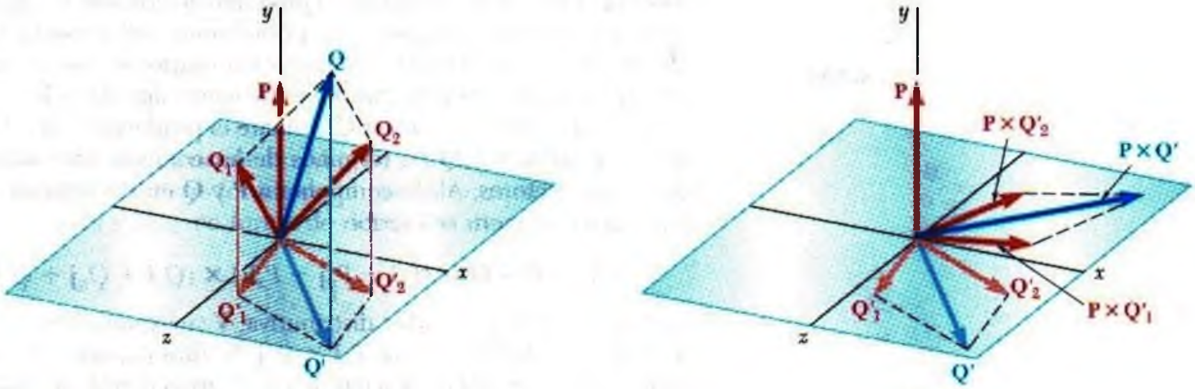


Figura 3.9 *a)* *b)*

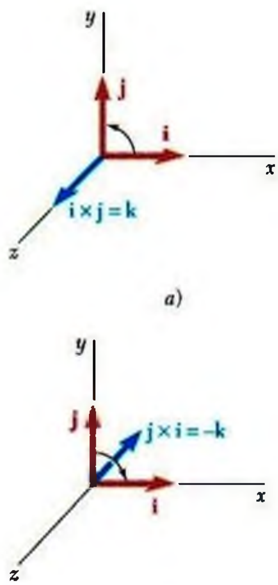
en forma similar a partir de $\mathbf{Q}'_1$ y $\mathbf{Q}'_2$, respectivamante. Ahora, en virtud de que la proyección de un paralelogramo sobre cualquier plano arbitrario es otro paralelogramo, la proyección $\mathbf{Q}'$ de la suma $\mathbf{Q}$ de $\mathbf{Q}_1$ y $\mathbf{Q}_2$ debe ser la suma de las proyecciones y $\mathbf{Q}'_1$ y $\mathbf{Q}'_2$ de $\mathbf{Q}_1$ y $\mathbf{Q}_2$ sobre el mismo plano (figura 3.9*a*). Esta relación entre los tres vectores $\mathbf{Q}'$, $\mathbf{Q}'_1$ y $\mathbf{Q}'_2$ seguirá siendo válida después de que los tres vectores hayan sido multiplicados por el escalar P y hayan sido rotados a través de un ángulo de 90° (figura 3.9*b*). Por tanto, se ha demostrado la relación (3.5′) y se puede tener la certeza de que la propiedad distributiva es válida para los productos vectoriales.

Una tecera propiedad es la asociativa, la cual no es válida para los productos vectoriales; en general, se tiene que

$$(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \times \mathbf{S} \neq \mathbf{P} \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{S}) \qquad (3.6)$$

3.5. PRODUCTOS VECTORIALES EXPRESADOS EN TÉRMINOS DE COMPONENTES RECTANGULARES

A continuación se procederá a determinar el producto vectorial de cualquier par de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**, que fueron definidos en el capítulo 2. Considérese primero el producto $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ (figura 3.10*a*). Como ambos vectores tienen una magnitud igual a 1 y dado que éstos forman ángulos rectos entre sí, su producto vectorial también deberá ser un vector unitario. Dicho vector unitario debe ser **k**, puesto que los vectores **i**, **j** y **k** son mutuamente perpendiculares y forman una tríada a mano derecha. Por otra parte, a partir de la regla de la mano derecha presentada en el punto 3 de la sección 3.4, se concluye que el producto $\mathbf{j} \times \mathbf{i}$ debe ser igual a $-\mathbf{k}$ (figura 3.10*b*). Por último, se debe ob-



a) *b)*

Figura 3.10

servar que el producto vectorial de un vector consigo mismo, como $\mathbf{i} \times \mathbf{i}$, es igual a cero debido a que ambos vectores tienen la misma dirección. Los productos vectoriales para los diversos pares posibles de vectores unitarios son

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} & \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \end{array} \tag{3.7}$$



Figura 3.11

Si se ordena las tres letras que representan a los vectores unitarios en un círculo en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (figura 3.11) se puede facilitar la determinación del signo del producto vectorial de dos vectores unitarios: el producto de dos vectores unitarios será positivo si éstos se siguen uno a otro en un orden contrario al movimiento de las manecillas del reloj y será negativo si éstos se siguen uno al otro en un orden en el sentido de las manecillas del reloj.

Ahora se puede expresar fácilmente el producto vectorial **V** de dos vectores dados **P** y **Q** en términos de las componentes rectangulares de dichos vectores. Al descomponer a **P** y **Q** en sus componentes rectangulares, primero se escribe

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = (P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k}) \times (Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + Q_z\mathbf{k})$$

Con el uso de la propiedad distributiva, **V** se expresa como la suma de productos vectoriales, como $P_x\mathbf{i} \times Q_y\mathbf{j}$. Se observa que cada una de las expresiones obtenidas es igual al producto vectorial de dos vectores unitarios, como $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$, multiplicados por el producto de dos escalares, como P_xQ_y, y recordando las identidades (3.7) después de factorizar a **i**, **j** y **k**, se obtiene

$$\mathbf{V} = (P_yQ_z - P_zQ_y)\mathbf{i} + (P_zQ_x - P_xQ_z)\mathbf{j} + (P_xQ_y - P_yQ_x)\mathbf{k} \tag{3.8}$$

Por tanto, las componentes rectangulares del producto vectorial **V** están dadas por

$$\begin{array}{l} V_x = P_yQ_z - P_zQ_y \\ V_y = P_zQ_x - P_xQ_z \\ V_z = P_xQ_y - P_yQ_x \end{array} \tag{3.9}$$

De regreso a la ecuación (3.8), se observa que el término del lado derecho representa el desarrollo de un determinante. Por tanto, el producto vectorial **V** puede expresarse de la siguiente forma, que es más sencilla de memorizar:[†]

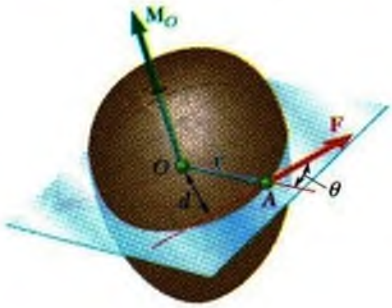
$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \tag{3.10}$$

[†]Cualquier determinante que conste de tres renglones y tres columnas se puede evaluar repitiendo la primera y la segunda columnas, y formando productos a lo largo de cada línea diagonal. Entonces, la suma de los productos obtenidos a lo largo de la línea roja se resta de la suma de los productos obtenidos a lo largo de las líneas negras.



3.6. MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN PUNTO

Considere una fuerza **F** que actúa sobre un cuerpo rígido (figura 3.12*a*). Como se sabe, la fuerza **F** está representada por un vector que define la magnitud y su dirección. Sin embargo, el efecto de la fuerza sobre el cuerpo rígido también depende de su punto de aplicación *A*. La posición de *A* puede definirse de manera conveniente por medio del vector **r** que une al punto de referencia fijo *O* con *A*; a este vector se le conoce como el *vector de posición* de *A*.[1] El vector de posición **r** y la fuerza **F** definen el plano mostrado en la figura 3.12*a*.



a)



b)

Figura 3.12

El *momento de* **F** *con respecto a O* se define como el producto vectorial de **r** y **F**:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{3.11}$$

De acuerdo con la definición del producto vectorial dada en la sección 3.4, el momento $\mathbf{M}_O$ debe ser perpendicular al plano que contiene el punto *O* y a la fuerza **F**. El sentido de $\mathbf{M}_O$ está definido por el sentido de la rotación que haría al vector **r** colineal con el vector **F**; un observador localizado en el extremo de $\mathbf{M}_O$ ve a esta rotación como una rotación *en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj*. Otra forma de definir el sentido de $\mathbf{M}_O$ se logra por medio de la regla de la mano derecha: cierre su mano derecha y manténgala de manera que sus dedos estén doblados en el mismo sentido de la rotación que **F** le impartiría al cuerpo rígido alrededor de un eje fijo dirigido a lo largo de la línea de acción de $\mathbf{M}_O$; su dedo pulgar indicará el sentido del momento $\mathbf{M}_O$ (figura 3.12*b*).

Por último, representado con θ el ángulo entre las líneas de acción del vector de posición **r** y la fuerza **F**, se encuentra que la magnitud del momento de **F** con respecto a *O* está dada por

$$M_O = rF \operatorname{sen} \theta = Fd \tag{3.12}$$

donde *d* representa la distancia perpendicular desde *O* hasta la línea de acción de **F**. En virtud de que la tendencia de la fuerza **F** a hacer girar al cuerpo rígido alrededor de un eje fijo perpendicular a la fuerza depende tanto de la distancia de **F** a dicho eje como de la magnitud de **F**, se observa que *la magnitud de* $\mathbf{M}_O$ *mide la tendencia de la fuerza* **F** *a hacer rotar al cuerpo rígido alrededor de un eje fijo dirigido a lo largo de* $\mathbf{M}_O$.

En el sistema de unidades del SI, donde la fuerza se expresa en newtons (N) y la distancia se expresa en metros (m), el momento de una fuerza estará expresado en newtons-metro (N · m). En el sistema de unidades de uso común en Estados Unidos, donde la fuerza se expresa en libras y la distancia en pies o en pulgadas, el momento de una fuerza se expresa en lb · ft o en lb · in.

Se puede observar que a pesar de que el momento $\mathbf{M}_O$ de una fuerza con respecto a un punto depende de la magnitud, la línea de acción y el sentido de la fuerza, dicho momento *no* depende de la posición que tiene el punto de aplicación de la fuerza a lo largo de su línea de acción. En consecuencia, el momento $\mathbf{M}_O$ de una fuerza **F** no caracteriza a la posición del punto de aplicación de **F**.

[1]se puede comprobar que los vectores de posición obedecen la ley de la adición de vectores y, por tanto, realmente son vectores. Considérese, por ejemplo, los vectores de posición **r** y **r**′ de *A* con respecto a dos puntos de referencia *O* y *O*′ y al vector de posición **s** de *O* con respecto a *O*′ (figura 3.40*a*, Sec. 3.16). Se comprueba que el vector de posición $\mathbf{r}' = \overrightarrow{O'A}$ puede obtenerse a partir de los vectores de posición $\mathbf{s} = \overrightarrow{O'O}$ y $\mathbf{r} = \overrightarrow{OA}$ aplicando la regla del triángulo para la suma de vectores.

Sin embargo, como se verá a continuación, el momento $\mathbf{M}_O$ de una fuerza **F** de magnitud y dirección conocida *define completamente a la línea de acción de* **F**. Además la línea de acción de **F** debe estar en un plano que pasa por el punto O y es perpendicular al momento $\mathbf{M}_O$. La distancia d medida desde O hasta la línea de acción de la fuerza debe ser igual al cociente de las magnitudes de $\mathbf{M}_O$ y **F**, esto es, debe ser igual a M_O/F. El sentido de $\mathbf{M}_O$ determina si la línea de acción debe trazarse del lado de **F** del lado del punto O.

Recuérdese la sección 3.3, donde se señala que el principio de transmisibilidad establece que dos fuerzas **F** y **F′** son equivalentes (esto es, tienen el mismo efecto sobre el cuerpo rígido) si tienen la misma magnitud, dirección y línea de acción. Este principio se puede expresar ahora de la siguiente forma: *dos fuerzas* **F** y **F′** *son equivalentes si, y sólo si, son iguales* (es decir, tienen la misma magnitud y la misma dirección) *y, además, tienen momentos iguales con respecto a un punto O*. Las condiciones necesarias y suficientes para que dos fuerzas **F** y **F′** sean equivalentes son

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}' \qquad \text{y} \qquad \mathbf{M}_O = \mathbf{M}'_O \tag{3.13}$$

Debe señalarse que el enunciado anterior implica que si las relaciones (3.13) se cumplen para cierto punto O, también se cumplirán para cualquier otro punto.

Problemas en dos dimensiones. Muchas aplicaciones tratan con estructuras bidimensionales, es decir, estructuras cuyo espesor es despreciable en comparación con su longitud y su anchura, las cuales están sujetas a fuerzas contenidas en su mismo plano. Dichas estructuras bidimensionales y las fuerzas que actúan sobre ellas pueden representarse fácilmente sobre una hoja de papel o sobre una pizarra. Por tanto, su análisis es más simple que el correspondiente al caso de las estructuras y fuerzas tridimensionales.



a) $M_O = +Fd$ *b)* $M_O = -Fd$

Figura 3.13

Considere, por ejemplo, una placa rígida sobre la que actúa una fuerza **F** (figura 3.13). El momento de **F** con respecto a un punto O seleccionado en el plano de la figura está representado por el vector $\mathbf{M}_O$ de magnitud Fd, que es perpendicular a dicho plano. En la figura 3.13*a* el vector $\mathbf{M}_O$ apunta hacia *afuera* del plano de papel, mientras que en la figura 3.13*b* éste apunta hacia *adentro* del plano de papel. Como se observa en la figura, en el primer caso, la fuerza de la figura 3.13*a* tiende a hacer rotar la placa en un sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj mientras que, en el segundo caso, la fuerza de la figura 3.13*b* tiende a hacer rotar la placa en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. Por consiguiente, es natural referirse al sentido del momento **F** con respecto a O en la figura 3.13*a* como opuesto al del movimiento de las manecillas del reloj (antihorario) ↺, y en la figura 3.13*b* como siguiendo la dirección del movimiento de las manecillas del reloj (horario) ↻.

Puesto que el momento de la fuerza **F** que actúa en el plano de la figura debe ser perpendicular a dicho plano, sólo se necesita especificar la *magnitud* y el *sentido* del momento **F** con respecto a O. Esto se

puede hacer asignándole a la magnitud M_O del momento un signo positivo o negativo, según el vector $\mathbf{M}_O$ apunte hacia afuera o hacia adentro del plano de papel.

3.7. TEOREMA DE VARIGNON

La propiedad distributiva de los productos vectoriales se puede emplear para determinar el momento de la resultante de varias *fuerzas concurrentes*. Si las fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, . . . se aplican en el mismo punto A (figura 3.14) y si se representa por $\mathbf{r}$ al vector de posición A, a partir de la ecuación (3.5) de la sección 3.4, se puede concluir que

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \cdots \qquad (3.14)$$

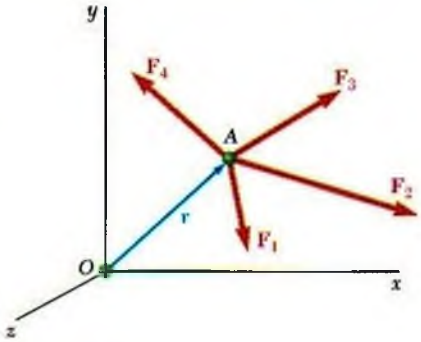


Figura 3.14

Esto es, *el momento con respecto a un punto dado O de la resultante de varias fuerzas concurrentes es igual a la suma de los momentos de las distintas fuerzas con respecto al mismo punto O*. Esta propiedad la descubrió el matemático francés Pierre Varignon (1654-1722) mucho antes de inventarse el álgebra vectorial, por lo que se le conoce como el *teorema de Varignon*.

La relación (3.14) permite reemplazar el cálculo directo del momento de una fuerza $\mathbf{F}$ por el cálculo de los momentos de dos o más fuerzas componentes. Como se verá en la siguiente sección, por lo general la fuerza $\mathbf{F}$ será separada en sus componentes paralelas a los ejes coordenados. Sin embargo, será mucho más rápido en algunos casos descomponer a $\mathbf{F}$ en componentes no paralelas a los ejes coordenados (véase el problema resuelto 3.3).

3.8. COMPONENTES RECTANGULARES DEL MOMENTO DE UNA FUERZA

En general, la deteminación del momento de una fuerza en el espacio se simplifica en forma considerable si el vector de fuerza y el vector de posición a partir de su punto de aplicación se descomponen en sus componentes rectangulares x, y y z. Por ejemplo, considere el momento $\mathbf{M}_O$ con respecto a O de una fuerza $\mathbf{F}$ con componentes F_x, F_y y F_z que está aplicada en el punto A de coordenadas x, y y z (figura 3.15). Se observa que las componentes del vector de posición $\mathbf{r}$ son iguales, respectivamente, a las coordenadas x, y y z del punto A, se escribe

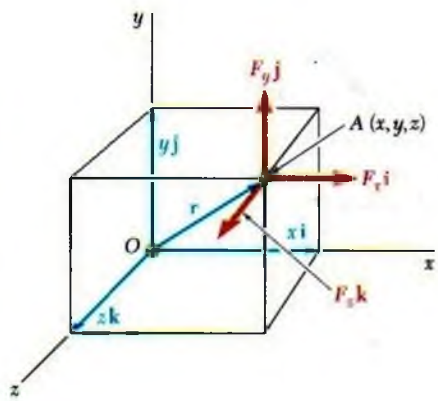


Figura 3.15

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \qquad (3.15)$$
$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \qquad (3.16)$$

Al sustituir a $\mathbf{r}$ y a $\mathbf{F}$ a partir de (3.15) y (3.16) en

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad (3.11)$$

y recordar los resultados obtenidos en la sección 3.5, se puede escribir el momento $\mathbf{M}_O$ de $\mathbf{F}$ con respecto a O de la siguiente forma

$$\mathbf{M}_O = M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k} \qquad (3.17)$$

donde las componentes escalares M_x, M_y y M_z están definidas por las relaciones

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \qquad (3.18)$$

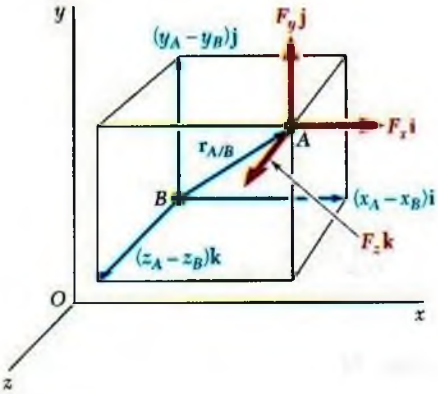


Figura 3.16

Como se verá en la sección 3.11, las componentes escalares M_x, M_y y M_z del momento $\mathbf{M}_O$ miden la tendencia de la fuerza **F** a impartirle a un cuerpo rígido un movimiento de rotación alrededor de los ejes x, y y z, respectivamente. Sustituyendo (3.18) en (3.17), también puede escribirse a $\mathbf{M}_O$ en forma de determinante

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.19}$$

Para calcular el momento $\mathbf{M}_B$ de una fuerza **F** aplicada en A con respecto a un punto arbitrario B (figura 3.16), se debe reemplazar el vector de posición **r** en la ecuación (3.11) por un vector trazado desde B hasta A. Este vector es el de *posición de A relativo a B* y se representa por $\mathbf{r}_{A/B}$. Se observa que $\mathbf{r}_{A/B}$ se puede obtener si se resta $\mathbf{r}_B$ de $\mathbf{r}_A$; por tanto, se escribe

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F} = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} \tag{3.20}$$

o bien, en forma determinante

$$\mathbf{M}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.21}$$

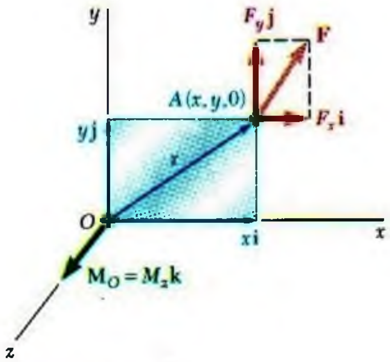


Figura 3.17

donde $x_{A/B}$, $y_{A/B}$ y $z_{A/B}$ representan las componentes del vector $\mathbf{r}_{A/B}$:

$$x_{A/B} = x_A - x_B \qquad y_{A/B} = y_A - y_B \qquad z_{A/B} = z_A - z_B$$

En el caso de *problemas en dos dimensiones*, se puede suponer que la fuerza **F** está contenida en el plano xy (figura 3.17). Al hacer $z = 0$ y $F_z = 0$ en la ecuación (3.19), se obtiene

$$\mathbf{M}_O = (xF_y - yF_x)\mathbf{k}$$

Con esto se verifica que el momento de **F** con respecto a O es perpendicular al plano de la figura y está completamente definido por el escalar

$$M_O = M_z = xF_y - yF_x \tag{3.22}$$

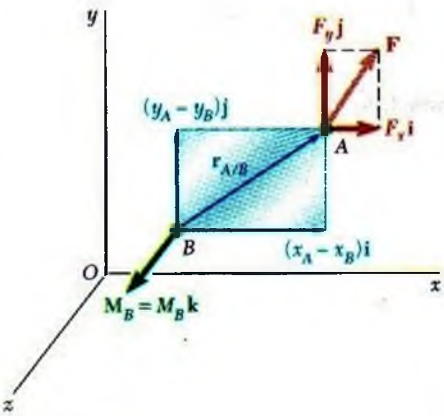


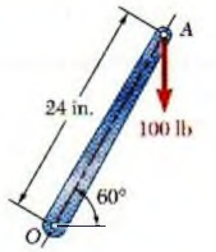
Figura 3.18

Como se mencionó antes, un valor positivo de M_O indica que el vector $\mathbf{M}_O$ apunta hacia afuera del plano del papel (la fuerza **F** tiende a hacer rotar al cuerpo con respecto a O en un sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj) y un valor negativo indica que el vector $\mathbf{M}_O$ apunta hacia adentro del plano del papel (la fuerza **F** tiende a hacer rotar el cuerpo con respecto a O en el sentido de las manecillas del reloj).

Para calcular el momento con respecto a un punto B de coordenadas $B(x_B, y_B)$ de una fuerza contenida en el plano xy, aplicada en el punto $A(x_A, y_A)$ (figura 3.18), se hace $z_{A/B} = 0$ y $F_z = 0$ en las relaciones (3.21) y se comprueba que el vector $\mathbf{M}_B$ es perpendicular al plano xy y está definido en magnitud y sentido por su componente escalar

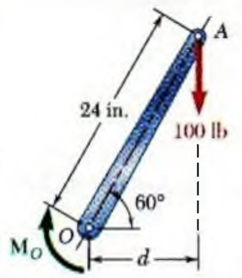
$$M_B = (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x \tag{3.23}$$

PROBLEMA RESUELTO 3.1



Una fuerza vertical de 100 lb se aplica en el extremo de una palanca que está unida a una flecha en el punto *O*. Determine: *a*) el momento de la fuerza de 100 lb con respecto a *O*, *b*) la fuerza horizontal aplicada en *A* que origina el mismo momento con respecto a *O*; *c*) la fuerza mínima aplicada en *A* que origina el mismo momento con respecto a *O*; *d*) qué tan lejos de la flecha debe actuar una fuerza vertical de 240 lb para originar el mismo momento con respecto a *O*, y *e*) si alguna de las fuerzas obtenidas en los incisos *b*), *c*) y *d*) es equivalente a la fuerza original.

SOLUCIÓN



***a*) Momento con respecto a *O*.** La distancia perpendicular desde *O* hasta la línea de acción de la fuerza de 100 lb es

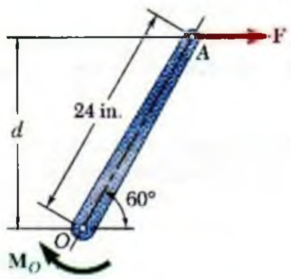
$$d = (24 \text{ in.}) \cos 60° = 12 \text{ in.}$$

La magnitud del momento de la fuerza de 100 lb con respecto a *O* es igual a

$$M_O = Fd = (100 \text{ lb})(12 \text{ in.}) = 1\,200 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

Como la fuerza tiende a hacer rotar la palanca alrededor de *O* en el sentido de las manecillas del reloj, el momento será representado por un vector $\mathbf{M}_O$ perpendicular al plano de la figura y que apunta hacia adentro del plano del papel. Este hecho se expresa escribiendo

$$\mathbf{M}_O = 1\,200 \text{ lb} \cdot \text{in.} \circlearrowright$$ ◀

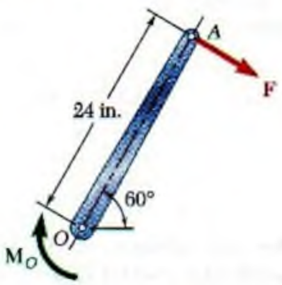


***b*) Fuerza horizontal.** En este caso se tiene que

$$d = (24 \text{ in.}) \operatorname{sen} 60° = 20.8 \text{ in.}$$

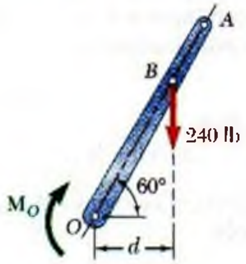
Como el momento con respecto a *O* debe ser igual a 1 200 lb · in., se escribe

$$M_O = Fd$$
$$1\,200 \text{ lb} \cdot \text{in.} = F(20.8 \text{ in.})$$
$$F = 57.7 \text{ lb} \qquad \mathbf{F} = 57.7 \text{ lb} \rightarrow$$ ◀



***c*) Fuerza mínima.** Como $M_O = Fd$, el mínimo valor de *F* se obtiene cuando *d* es máximo. Se selecciona la fuerza perpendicular a *OA* y se observa que $d = 24$ in.; entonces

$$M_O = Fd$$
$$1\,200 \text{ lb} \cdot \text{in.} = F(24 \text{ in.})$$
$$F = 50 \text{ lb} \qquad \mathbf{F} = 50 \text{ lb} \searrow 30°$$ ◀

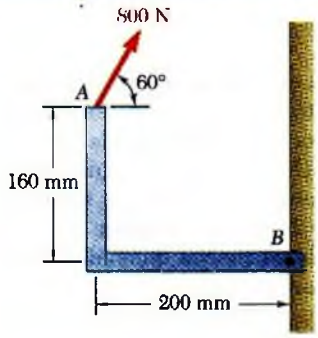


***d*) Fuerza vertical de 240 lb.** En este caso, $M_O = Fd$ proporciona la siguiente relación

$$1\,200 \text{ lb} \cdot \text{in.} = (240 \text{ lb})d \qquad d = 5 \text{ in.}$$

pero $$OB \cos 60° = d \qquad OB = 10 \text{ in.}$$ ◀

e) Ninguna de las fuerzas consideradas en los incisos *b*), *c*) y *d*) es equivalente a la fuerza original de 100 lb. A pesar de que estas fuerzas tienen el mismo momento con respecto a *O*, sus componentes en *x* y *y* son diferentes. En otras palabras, a pesar de que cada una de las fuerzas hace rotar la flecha de la misma forma, cada una ocasiona que la palanca jale a la flecha en una forma distinta.



PROBLEMA RESUELTO 3.2

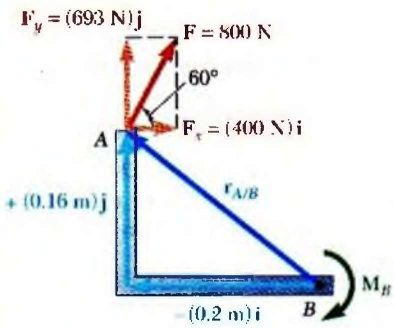
Una fuerza de 800 N actúa sobre la ménsula, como se muestra en la figura. Determine el momento de la fuerza con respecto a *B*.

SOLUCIÓN

El momento $\mathbf{M}_B$ de la fuerza $\mathbf{F}$ con respecto a *B* se obtiene a través del producto vectorial

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F}$$

desde $\mathbf{r}_{A/B}$ es el vector trazado desde *B* hasta *A*. Al descomponer a $\mathbf{r}_{A/B}$ y a $\mathbf{F}$ en sus componentes rectangulares, se tiene que



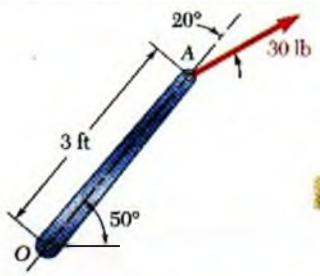
$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{A/B} &= -(0.2 \text{ m})\mathbf{i} + (0.16 \text{ m})\mathbf{j} \\ \mathbf{F} &= (800 \text{ N}) \cos 60^\circ \mathbf{i} + (800 \text{ N}) \text{ sen } 60^\circ \mathbf{j} \\ &= (400 \text{ N})\mathbf{i} + (693 \text{ N})\mathbf{j} \end{aligned}$$

Recordando las relaciones (3.7) para los productos vectoriales de los vectores unitarios (sección 3.5), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F} &= [-(0.2 \text{ m})\mathbf{i} + (0.16 \text{ m})\mathbf{j}] \times [(400 \text{ N})\mathbf{i} + (693 \text{ N})\mathbf{j}] \\ &= -(138.6 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} - (64.0 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} \\ &= -(202.6 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} \end{aligned}$$

$\mathbf{M}_B = 203 \text{ N} \cdot \text{m} \circlearrowright$ ◀

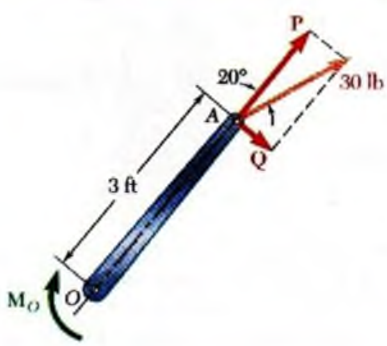
El momento $\mathbf{M}_B$ es un vector perpendicular al plano de la figura y apunta hacia *adentro* del plano del papel.



PROBLEMA RESUELTO 3.3

Una fuerza de 30 lb actúa sobre el extremo de una palanca de 3 ft, como se muestra en la figura. Determine el momento de la fuerza con respecto a *O*.

SOLUCIÓN



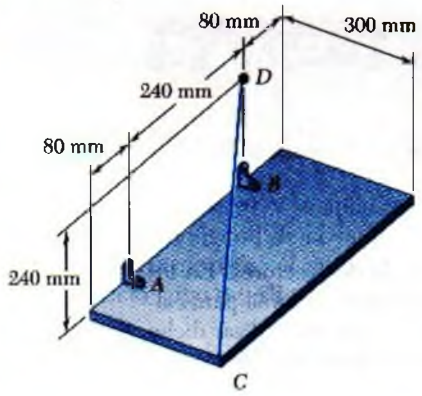
La fuerza se reemplaza por dos componentes, una componente $\mathbf{P}$ en la dirección de *OA* y otra componente $\mathbf{Q}$ perpendicular a *OA* Como *O* se encuentra en la línea de acción de $\mathbf{P}$, el momento de $\mathbf{P}$ con respecto a *O* es igual a cero y el momento de la fuerza de 30 lb se reduce al momento de $\mathbf{Q}$, que tiene el sentido de las manecillas del reloj y, por consiguiente, se representa por un escalar negativo.

$$\begin{aligned} Q &= (30 \text{ lb}) \text{ sen } 20^\circ = 10.26 \text{ lb} \\ M_O &= -Q(3 \text{ ft}) = -(10.26 \text{ lb})(3 \text{ ft}) = -30.8 \text{ lb} \cdot \text{ft} \end{aligned}$$

Como el valor obtenido para el escalar M_O es negativo, el momento $\mathbf{M}_O$ apunta hacia *adentro* del plano del papel. Así, se escribe

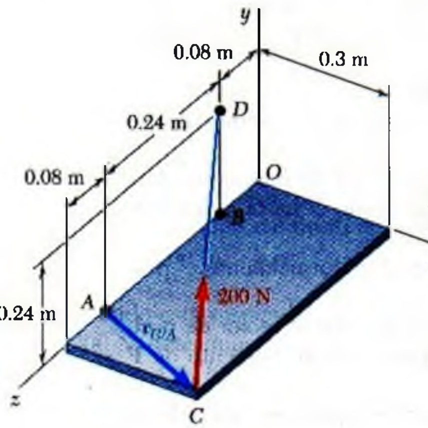
$\mathbf{M}_O = 30.8 \text{ lb} \cdot \text{ft} \circlearrowright$ ◀

PROBLEMA RESUELTO 3.4



Una placa rectangular está apoyada por ménsulas en A y B y por un alambre CD. Se sabe que la tensión en el alambre es de 200 N, determine el momento con respecto a A de la fuerza ejercida por el alambre en el punto C.

SOLUCIÓN



El momento $\mathbf{M}_A$ de la fuerza $\mathbf{F}$ ejercida por el alambre en el punto C con respecto a A, se obtiene a partir del producto vectorial

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F} \tag{1}$$

donde $\mathbf{r}_{C/A}$ es el vector trazado desde A hasta C,

$$\mathbf{r}_{C/A} = \overrightarrow{AC} = (0.3 \text{ m})\mathbf{i} + (0.08 \text{ m})\mathbf{k} \tag{2}$$

y $\mathbf{F}$ es la fuerza de 200 N dirigida a lo largo de CD. Al introducir el vector unitario $\boldsymbol{\lambda} = \overrightarrow{CD}/CD$, se escribe

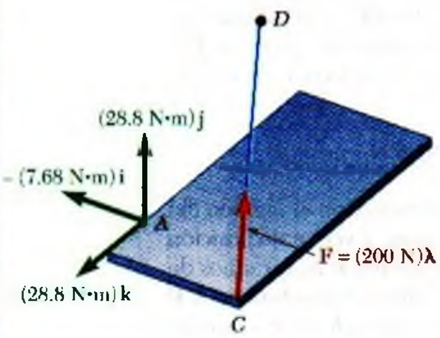
$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = (200 \text{ N})\frac{\overrightarrow{CD}}{CD} \tag{3}$$

Al descomponer al vector $\overrightarrow{CD}$ en sus componentes rectangulares, se tiene

$$\overrightarrow{CD} = -(0.3 \text{ m})\mathbf{i} + (0.24 \text{ m})\mathbf{j} - (0.32 \text{ m})\mathbf{k} \qquad CD = 0.50 \text{ m}$$

Si se sustituye este resultado en (3) se obtiene

$$\mathbf{F} = \frac{200 \text{ N}}{0.50 \text{ m}}[-(0.3 \text{ m})\mathbf{i} + (0.24 \text{ m})\mathbf{j} - (0.32 \text{ m})\mathbf{k}]$$
$$= -(120 \text{ N})\mathbf{i} + (96 \text{ N})\mathbf{j} - (128 \text{ N})\mathbf{k} \tag{4}$$



Sustituyendo $\mathbf{r}_{C/A}$ y $\mathbf{F}$ en la ecuación (1), a partir de las ecuaciones (2) y (4) y recordando las relaciones (3.7) de la sección 3.5, se obtiene

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F} = (0.3\mathbf{i} + 0.08\mathbf{k}) \times (-120\mathbf{i} + 96\mathbf{j} - 128\mathbf{k})$$
$$= (0.3)(96)\mathbf{k} + (0.3)(-128)(-\mathbf{j}) + (0.08)(-120)\mathbf{j} + (0.08)(96)(-\mathbf{i})$$

$$\mathbf{M}_A = -(7.68 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{i} + (28.8 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{j} + (28.8 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

Solución alternativa. Como se mencionó en la sección 3.8, el momento $\mathbf{M}_A$ puede ser expresado en forma de determinante:

$$\mathbf{M}_A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.3 & 0 & 0.08 \\ -120 & 96 & -128 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_A = -(7.68 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{i} + (28.8 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{j} + (28.8 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se presentó el *producto vectorial* o *producto cruz* de dos vectores. En los problemas que se presentan a continuación se puede utilizar el producto vectorial para calcular el *momento de una fuerza con respecto a un punto* y también, se puede utilizar dicho producto para determinar la *distancia perpendicular* desde un punto hasta una línea.

El momento de una fuerza **F** con respecto al punto O de un cuerpo rígido se definió como

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{3.11}$$

donde **r** es el vector de posición que va *desde O hasta cualquier punto* sobre la línea de acción de **F**. Como el producto vectorial no es conmutativo, cuando se calcula un producto de este tipo es absolutamente necesario colocar a los vectores en el orden apropiado y que cada uno de dichos vectores tenga el sentido correcto. El momento $\mathbf{M}_O$ es importante puesto que su magnitud es una medida de la tendencia de la fuerza **F** para hacer que el cuerpo rígido rote alrededor de un eje dirigido a lo largo de $\mathbf{M}_O$.

1. Cálculo del momento $\mathbf{M}_O$ de una fuerza en dos dimensiones. Se puede emplear uno de los siguientes procedimientos:

a) Usar la ecuación (3.12), $M_O = Fd$, la cual expresa la magnitud del momento como el producto de la magnitud de **F** y la *distancia perpendicular d* desde O hasta la línea de acción de **F** [problema resuelto 3.1].

b) Expresar a **r** y **F** en términos de sus componentes y evaluar formalmente el producto vectorial $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ [problema resuelto 3.2].

c) Descomponer a **F** en sus componentes paralela y perpendicular al vector de posición **r**, respectivamente. Sólo la componente perpendicular contribuye al momento de **F** [problema resuelto 3.3].

d) Usar la ecuación (3.22), $M_O = M_z = xF_y - yF_x$. Cuando se aplica este método, el enfoque más simple consiste en tratar a las componentes escalares de **r** y **F** como si fueran positivas y, después, asignar por inspección el signo apropiado al momento producido por cada componente de la fuerza. Por ejemplo, al aplicar este método para resolver el problema resuelto 3.2, se observa que ambas componentes de la fuerza tienden a ocasionar una rotación en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj alrededor del punto B. Por tanto, el momento de cada fuerza con respecto a B debe ser representado por un escalar negativo. Entonces, se tiene que el momento total está dado por

$$M_B = -(0.16 \text{ m})(400 \text{ N}) - (0.20 \text{ m})(693 \text{ N}) = -202.6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

2. Cálculo del momento $\mathbf{M}_O$ de una fuerza F en tres dimensiones. Con el método del problema resuelto 3.4, el primer paso del proceso consiste en seleccionar al vector de posición **r** que sea el más conveniente (el más simple). Después, se debe expresar a **F** en términos de sus componentes rectangulares. El último paso consiste en evaluar el producto vectorial $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ para determinar el momento. En la mayoría de los problemas tridimensionales se encontrará que es más fácil calcular el producto vectorial con el uso de la forma de determinante.

3. Determinación de la distancia perpendicular d desde un punto A hasta una línea dada. Primero se supone que la fuerza **F** de magnitud conocida F se encuentra a lo largo de la línea dada. Después se determina su momento con respecto a A formando el producto vectorial $\mathbf{M}_A = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, y calculándolo como se indicó anteriormente. Entonces, se calcula su magnitud M_A. Por último, se sustituyen los valores de F y M_A en la ecuación $M_A = Fd$ y se resuelve para d.

Problemas

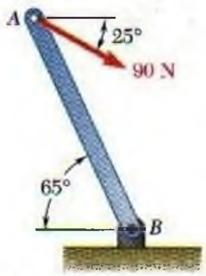


Figura P3.1 y P3.2

3.1 Una fuerza de 90 N se aplica a la varilla de control AB como indica la figura. Si la longitud de la varilla es de 225 mm, determine el momento de la fuerza respecto al punto B descomponiendo la fuerza en sus componentes a lo largo de AB y en una dirección perpendicular a AB.

3.2 Una fuerza de 90 N se aplica a la varilla de control AB como indica la figura. Si la longitud de la varilla es de 225 mm, determine el momento de la fuerza respecto al punto B descomponiendo la fuerza en sus componentes horizontal y vertical.

3.3 Una fuerza **P** de 3 lb se aplica a una palanca que controla la barrena de una barredora de nieve. Determine el momento de **P** respecto a A cuando α es igual a 30°.

3.4 La fuerza **P** se aplica a una palanca que controla la barrena de una barredora de nieve. Determine la magnitud y la dirección de la fuerza **P** mínima que tiene un momento de 19.5 lb · in. en sentido contrario al de las manecillas del reloj respecto a A.

3.5 Una fuerza **P** de 2.9 lb se aplica a una palanca que controla la barrena de una barredora de nieve. Determine el valor de α si el momento de **P** respecto a A es en sentido contrario al de las manecillas del reloj y tiene una magnitud de 17 lb · in.

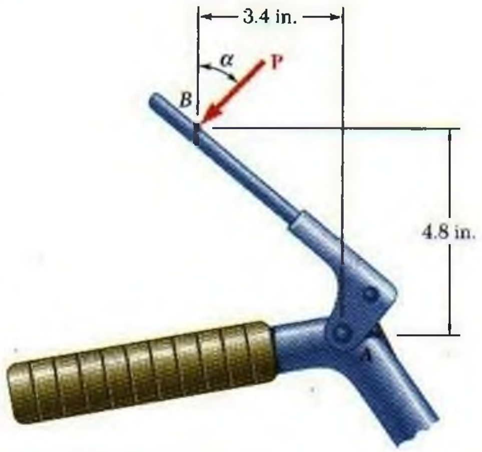


Figura P3.3, *P3.4* y P3.5

3.6 Un rótulo está suspendido de dos cadenas AE y BF. Si la tensión en BF es de 200 N, determine *a*) el momento de la fuerza ejercida por la cadena en B respecto a A, *b*) la fuerza mínima aplicada en C que produce el mismo momento respecto a A.

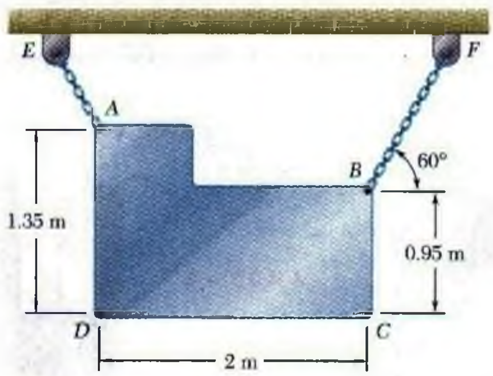


Figura P3.6 y P3.7

3.7 Un rótulo está suspendido de dos cadenas AE y BF. Si la tensión en BF es de 200 N, determine *a*) el momento de la fuerza ejercida por la cadena en B respecto a A, *b*) la magnitud y el sentido de la fuerza vertical aplicada en C que produce el mismo momento respecto de A, *c*) la fuerza mínima aplicada en B que produce el mismo momento respecto de A.

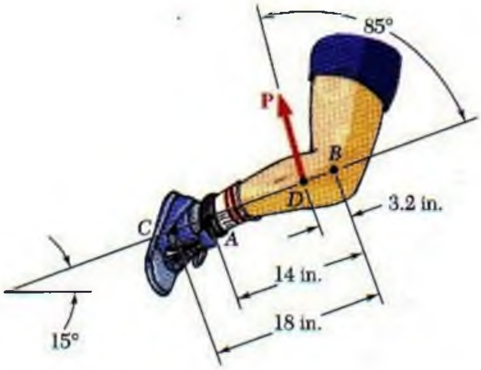


Figura *P3.8*

3.8 Un atleta se está ejercitando mientras carga en el tobillo, A, un peso de 5 lb, como indica la figura. Determine *a*) el momento del peso respecto a la flexión de la rodilla en el punto B, *b*) la magnitud de la fuerza **P** muscular que forma un momento de igual magnitud respecto a B, *c*) la fuerza **F** mínima aplicada en C que crea el mismo momento que el peso respecto a B.

3.9 Un malacate AB se usa para tensar cables a un poste. Si la tensión en el cable BC es de 260 lb y las longitudes a, b, d miden 8, 35 y 76 in., respectivamente, determine el momento, respecto a D, de la fuerza ejercida por el cable C mediante la descomposición en sus componentes horizontal y vertical de la fuerza aplicada en *a*) el punto C, *b*) el punto E.

3.10 Se debe aplicar una fuerza que produzca un momento de 7 840 lb · in. respecto a D para tensar el cable al poste CD. Si $a = 8$ in., $b = 35$ in. y $d = 112$ in., determine la tensión que debe desarrollarse en el cable del malacate AB para crear el momento requerido respecto al punto D.

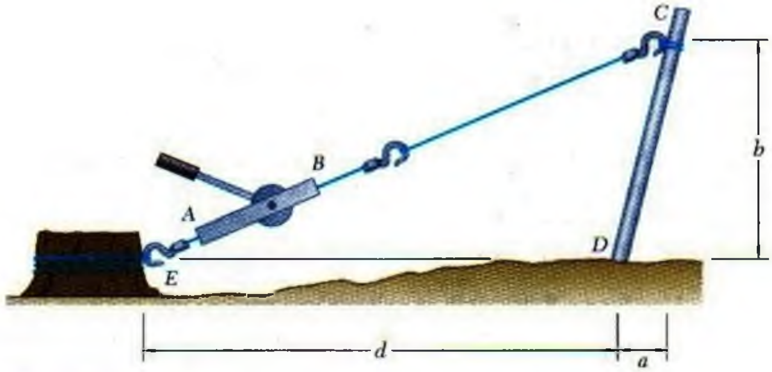


Figura P3.9, P3.10 y *P3.11*

3.11 Se debe aplicar una fuerza que produzca un momento de 1 152 N · m respecto a D para tensar el cable al poste CD. Si la capacidad del malacate AB es de 2 880 N, determine el valor mínimo de la distancia d necesaria para generar el momento especificado respecto a D, suponiendo que $a = 0.24$ m y $b = 1.05$ m.

3.12 y *3.13* La biela AB ejerce sobre la manivela BC una fuerza de 2.5 kN dirigida hacia abajo y hacia el lado izquierdo a lo largo de la línea central de AB. Determine el momento de esa fuerza respecto a C.

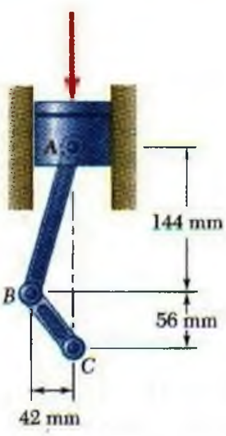


Figura P3.12

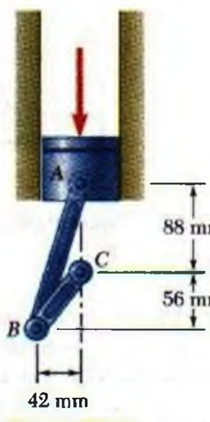


Figura *P3.13*

3.14 Un seguidor B circular con diámetro de 64 mm se sostiene contra la leva A como se muestra en la figura. Si la leva ejerce una fuerza con magnitud de 80 N sobre el seguidor a lo largo de la normal común BC, determine el momento de la fuerza respecto a la articulación colocada en D.

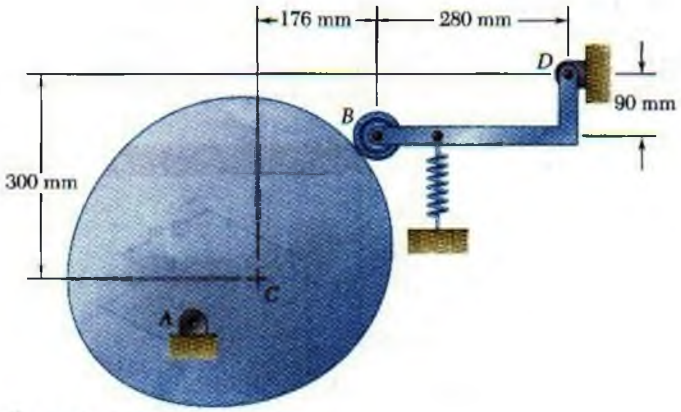


Figura P3.14

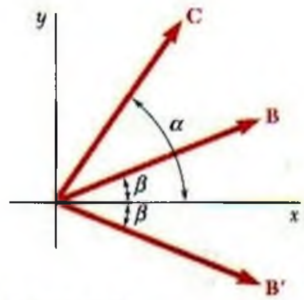


Figura P3.15

3.15 Obtenga los productos vectoriales $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ y $\mathbf{B}' \times \mathbf{C}$, donde $B = B'$, y use los resultados obtenidos para comprobar la identidad

$$\text{sen}\, \alpha \cos \beta = \tfrac{1}{2}\, \text{sen}\, (\alpha + \beta) + \tfrac{1}{2}\, \text{sen}\, (\alpha - \beta).$$

3.16 Una línea pasa por los puntos (630 mm, −225 mm) y (−210 mm, 270 mm). Determine la distancia perpendicular d medida desde la línea hasta el origen O del sistema coordenado.

3.17 Los vectores **A** y **B** están contenidos en el mismo plano. Determine el vector unitario normal al plano si **A** y **B** son iguales, respectivamente, a *a*) $12\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ y $-3\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 7.5\mathbf{k}$, *b*) $-14\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ y $3\mathbf{i} + 1.5\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

3.18 Los vectores **P** y **Q** son dos lados adyacentes de un paralelogramo. Determine el área del paralelogramo si *a*) $\mathbf{P} = (3 \text{ in.})\mathbf{i} + (7 \text{ in.})\mathbf{j} - (2 \text{ in.})\mathbf{k}$ y $\mathbf{Q} = -(5 \text{ in.})\mathbf{i} + (1 \text{ in.})\mathbf{j} + (3 \text{ in.})\mathbf{k}$, *b*) $\mathbf{P} = (2 \text{ in.})\mathbf{i} - (4 \text{ in.})\mathbf{j} - (3 \text{ in.})\mathbf{k}$ y $\mathbf{Q} = (6 \text{ in.})\mathbf{i} - (1 \text{ in.})\mathbf{j} + (5 \text{ in.})\mathbf{k}$.

3.19 Determine el momento respecto al origen O de la fuerza $\mathbf{F} = (7.5 \text{ N})\mathbf{i} + (3 \text{ N})\mathbf{j} - (4.5 \text{ N})\mathbf{k}$ que actúa en el punto A. Suponga que el vector de posición de A es *a*) $\mathbf{r} = -(6 \text{ m})\mathbf{i} + (3 \text{ m})\mathbf{j} + (1.5 \text{ m})\mathbf{k}$, *b*) $\mathbf{r} = (2 \text{ m})\mathbf{i} - (0.75 \text{ m})\mathbf{j} - (1 \text{ m})\mathbf{k}$, *c*) $\mathbf{r} = -(2.5 \text{ m})\mathbf{i} - (1 \text{ m})\mathbf{j} + (1.5 \text{ m})\mathbf{k}$.

3.20 Determine el momento respecto al origen O de la fuerza $\mathbf{F} = (3 \text{ lb})\mathbf{i} - (6 \text{ lb})\mathbf{j} + (4 \text{ lb})\mathbf{k}$ que actúa en el punto A. Suponga que el vector de posición de A es *a*) $\mathbf{r} = -(7.5 \text{ ft})\mathbf{i} + (3 \text{ ft})\mathbf{j} - (6 \text{ ft})\mathbf{k}$, *b*) $\mathbf{r} = -(0.75 \text{ ft})\mathbf{i} + (1.5 \text{ ft})\mathbf{j} - (1 \text{ ft})\mathbf{k}$, *c*) $\mathbf{r} = -(8 \text{ ft})\mathbf{i} + (2 \text{ ft})\mathbf{j} - (14 \text{ ft})\mathbf{k}$.

3.21 Un pequeño bote cuelga de dos grúas, una de las cuales se muestra en la figura. La tensión en la línea $ABAD$ es de 369 N. Determine el momento, respecto a C, de la fuerza resultante $\mathbf{R}_A$ ejercida sobre las grúas en el punto A.

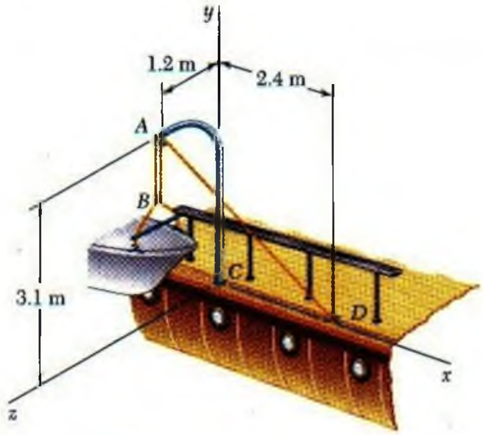


Figura P3.21

3.22 Una fuerza de 36 N se aplica sobre la llave de torsión para enroscar la regadera. Si la línea de acción de la llave es paralela al eje x, determine el momento de la fuerza respecto de A.



Figura *P3.22*

3.23 Antes de colocar un cable telefónico, la cuerda *BAC* se ata a una estaca situada en *B* y se pasa por una polea en *A*. Si el tramo *AC* de la cuerda pertenece a un plano paralelo al plano *xy*, y la magnitud de la tensión **T** en la cuerda es de 62 lb, determine el momento respecto a *O* de la fuerza resultante ejercida por la cuerda sobre la polea.

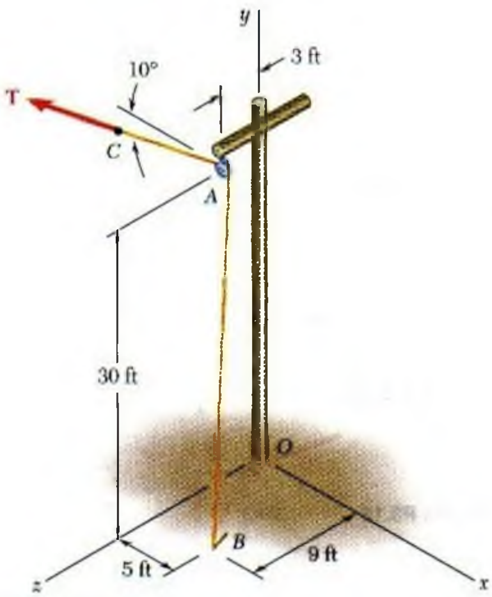


Figura P3.23

3.24 Una sección de una pared de concreto precolado se sostiene por medio de dos cables como se muestra en la figura. Si la tensión en cada cable, *BD* y *FD*, es de 900 y 675 N, respectivamente, determine el momento respecto al punto *O* de la fuerza ejercida por *a*) el cable *BD*, *b*) el cable *FE*.

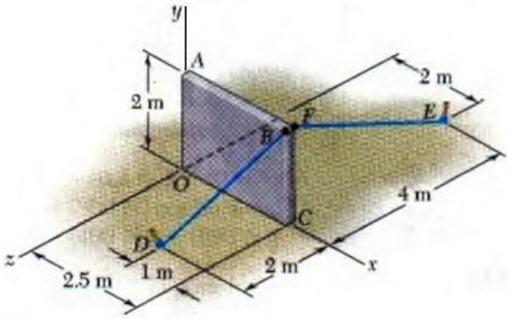


Figura P3.24

3.25 En un concurso de vencidas, uno de los competidores aplica una fuerza **P** sobre la mano de su oponente. Si *AB* = 15.2 in. y *BC* = 16 in., determine el momento de la fuerza respecto a *C*.

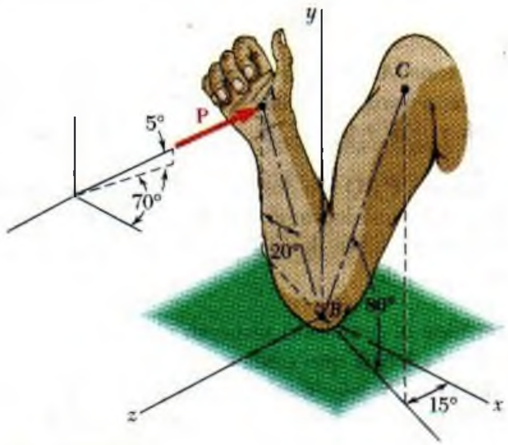


Figura P3.25

3.26 El puntal de madera *AB* se emplea temporalmente para sostener el techo en voladizo que se muestra en la figura. Si el puntal ejerce en *A* una fuerza de 228 N dirigida a lo largo de *BA*, determine el momento de esta fuerza respecto a *C*.

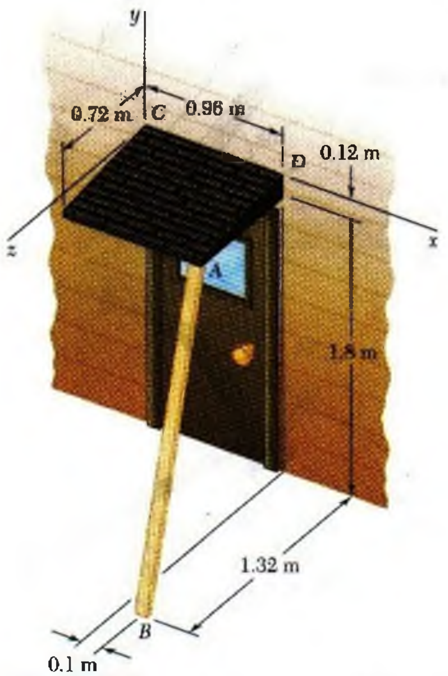


Figura *P3.26*

3.27 En el problema 3.21, determine la distancia perpendicular desde el punto *C* hasta el tramo *AD* de la línea *ABAD*.

3.28 En el problema 3.23, determine la distancia perpendicular desde el punto *O* hasta el tramo *AC* de la cuerda *BAC*.

3.29 En el problema 3.23, determine la distancia perpendicular desde el punto O hasta el tramo AB de la cuerda BAC.

3.30 En el problema 3.24, determine la distancia perpendicular desde el punto C hasta el cable BD.

3.31 En el problema 3.25, determine la distancia perpendicular desde el punto C hasta la línea de acción de la fuerza **P**.

3.32 En el problema 3.26, determine la distancia perpendicular desde el punto D hasta la línea que pasa por los puntos A y B.

3.33 En el problema 3.26, determine la distancia perpendicular desde el punto C hasta la línea que pasa por los puntos A y B.

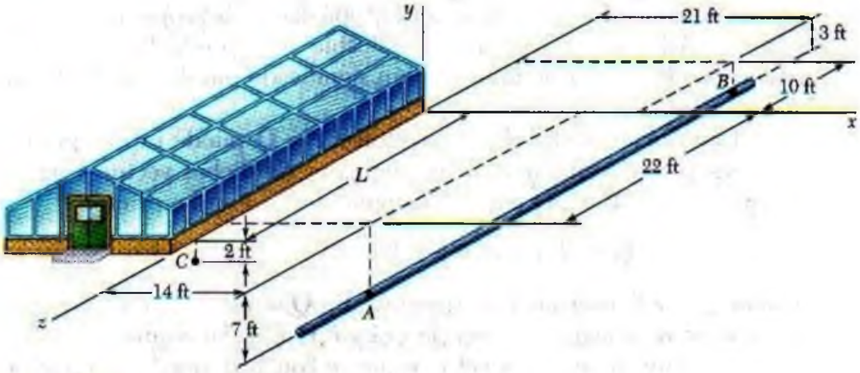


Figura *P3.34*

3.34 Un jardinero desea conectar un tubo hidráulico desde el punto C, que se encuentra en el cimiento de un invernadero de 30 ft de largo, hasta una tubería principal que pasa por los puntos A y B. Determine *a*) el valor de L que minimiza la longitud del tubo hidráulico requerido, *b*) la longitud del tubo requerido.

3.9. PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES

El *producto escalar* de dos vectores **P** y **Q** se define como el producto de las magnitudes de **P** y **Q** y el coseno del ángulo θ formado por **P** y **Q** (figura 3.19). El producto escalar de **P** y **Q** se denota mediante $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$. Entonces, se escribe

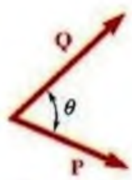


Figura 3.19

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta \qquad (3.24)$$

Advierta que la expresión recién definida no es un vector sino un *escalar*, lo cual explica el nombre de *producto escalar*; en virtud de la notación utilizada, $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ también se conoce como el *producto punto* de los vectores **P** y **Q**.

A partir de su propia definición, se concluye que el producto escalar de dos vectores es *conmutativo*, esto es, que

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P} \qquad (3.25)$$

Para demostrar que el producto escalar también es *distributivo*, se debe probar la relación

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_1 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_2 \qquad (3.26)$$

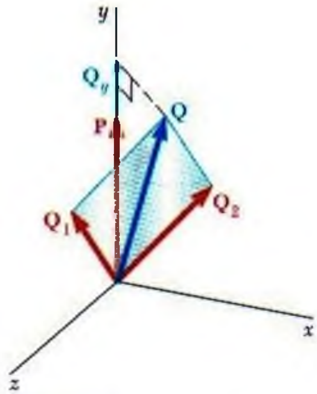


Figura 3.20

Sin perder la generalidad, se puede suponer que **P** está dirigido a lo largo del eje y (figura 3.20). Al denotar por **Q** la suma de $\mathbf{Q}_1$ y $\mathbf{Q}_2$ y por θ_y el ángulo que forma **Q** con el eje y, el término del lado izquierdo de (3.26) se expresa de la siguiente forma:

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta_y = PQ_y \qquad (3.27)$$

donde Q_y es la componente y de **Q**. De manera similar, el término del lado derecho de (3.26) se puede expresar como

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_1 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_2 = P(Q_1)_y + P(Q_2)_y \qquad (3.28)$$

Debido a que **Q** es la suma de $\mathbf{Q}_1$ y $\mathbf{Q}_2$, su componente y debe ser igual a la suma de las componentes en y de $\mathbf{Q}_1$ y $\mathbf{Q}_2$. Por tanto, las expresiones obtenidas en (3.27) y (3.28) son iguales, con lo que queda demostrada la relación (3.26).

En lo concerniente a la tercera propiedad —la propiedad asociativa— se debe señalar que no es aplicable a los productos escalares. De hecho $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{S}$ no tiene ningún significado puesto que $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ no es un vector sino un escalar.

El producto escalar de dos vectores **P** y **Q** puede expresarse en términos de las componentes rectangulares de dichos vectores. Descomponiendo a **P** y a **Q** en sus componentes se escribe primero

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = (P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k}) \cdot (Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + Q_z\mathbf{k})$$

Con el uso de la propiedad distributiva, $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ se expresa como la suma de productos escalares, como $P_x\mathbf{i} \cdot Q_x\mathbf{i}$ y $P_x\mathbf{i} \cdot Q_y\mathbf{j}$. Sin embargo, a partir de la definición del producto escalar se concluye que los productos escalares de los vectores unitarios son iguales a cero o a uno.

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0 \end{array} \qquad (3.29)$$

Por tanto, la expresión obtenida para $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ se reduce a

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z \qquad (3.30)$$

En el caso particular, cuando **P** y **Q** son iguales

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = P^2 \qquad (3.31)$$

Aplicaciones

1. ***Ángulo formado por dos vectores dados.*** Considérese que los dos vectores están dados en términos de sus componentes:

$$\mathbf{P} = P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{Q} = Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + Q_z\mathbf{k}$$

Para determinar el ángulo formado por estos dos vectores, se igualan las expresiones obtenidas para el producto escalar en (3.24) y (3.30) y se escribe

$$PQ \cos \theta = P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z$$

Resolviendo para $\cos \theta$, se tiene

$$\cos \theta = \frac{P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z}{PQ} \qquad (3.32)$$

2. ***Proyección de un vector sobre un eje dado.*** Considérese un vector **P** que forma un ángulo θ con un eje, o línea dirigida, OL (figura 3.21). La *proyección de* **P** *sobre el eje* OL se define como el escalar

$$P_{OL} = P \cos \theta \qquad (3.33)$$

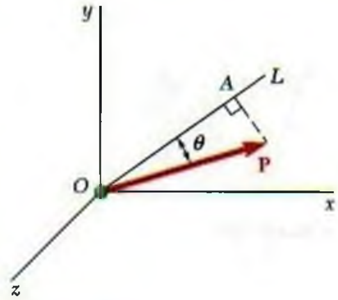


Figura 3.21

Se observa que la proyección P_{OL} es igual en valor absoluto al valor de la longitud del segmento OA; ésta será positiva si OA tiene el mismo sentido que el eje OL, esto es, si θ es agudo, y negativa en caso contrario. Si **P** y OL forman un ángulo recto, la proyección de **P** sobre OL es cero.

Considere ahora un vector **Q** dirigido a lo largo de OL con el mismo sentido que OL (figura 3.22). El producto escalar de **P** y **Q** puede expresarse como

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta = P_{OL}Q \qquad (3.34)$$

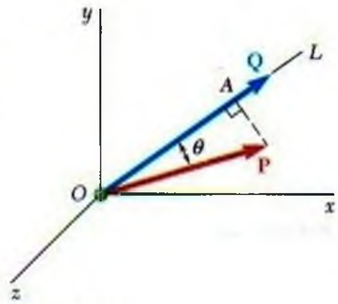


Figura 3.22

por lo que se concluye que

$$P_{OL} = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}}{Q} = \frac{P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z}{Q} \qquad (3.35)$$

En el caso particular, cuando el vector seleccionado a lo largo de OL es el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ (figura 3.23), se escribe

$$P_{OL} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda} \qquad (3.36)$$

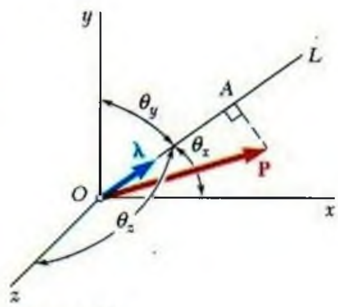


Figura 3.23

Al descomponer **P** y $\boldsymbol{\lambda}$ en sus componentes rectangulares y recordar, de la sección 2.12, que las componentes de $\boldsymbol{\lambda}$ a lo largo de los ejes coordenados son iguales, respectivamente, a los cosenos directores de OL, la proyección de **P** sobre OL se expresa como

$$P_{OL} = P_x \cos \theta_x + P_y \cos \theta_y + P_z \cos \theta_z \qquad (3.37)$$

donde θ_x, θ_y y θ_z representan los ángulos que el eje OL forma con los ejes coordenados.

3.10. PRODUCTO TRIPLE MIXTO DE TRES VECTORES

Se define al *producto triple escalar* o producto triple mixto de tres vectores **S**, **P** y **Q** como la expresión escalar

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \qquad (3.38)$$

la cual se obtiene formando el producto escalar de **S** con el producto vectorial de **P** y **Q**.[1]

[1] En el capítulo 15 se presentará otro tipo de producto triple vectorial: el *producto triple vectorial* **S** × (**P** × **Q**).

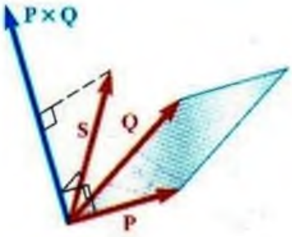


Figura 3.24

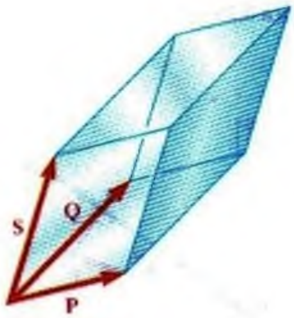


Figura 3.25



Figura 3.26

Al producto triple escalar de **S**, **P** y **Q** se le puede dar una interpretación geométrica simple (figura 3.24). En primer lugar, recuerde de la sección 3.4 que el vector **P** × **Q** es perpendicular al plano que contiene a **P** y a **Q** y que su magnitud es igual al área del paralelogramo que tiene por lados a **P** y a **Q**. Por otro lado, la ecuación (3.34) indica que el producto escalar de **S** y **P** × **Q** se puede obtener multiplicando la magnitud de **P** × **Q** (esto es, el área del paralelogramo definido por **P** y **Q**) por la proyección de **S** sobre el vector **P** × **Q** (esto es, por la proyección de **S** sobre la normal al plano que contiene al paralelogramo). Por tanto, el producto triple escalar es igual en valor absoluto al volumen del paralelepípedo que tiene por lados a los vectores **S**, **P** y **Q** (figura 3.25). Se debe señalar que el signo del producto triple escalar será positivo si **S**, **P** y **Q** forman una tríada a mano derecha, y será negativo si éstos forman una tríada a mano izquierda [esto es, **S** · (**P** × **Q**) será negativo si se observa desde el extremo terminal de **S**, que la rotación que hace a **P** colineal con **Q** va en el sentido de las manecillas del reloj]. El producto triple escalar será igual a cero si **S**, **P** y **Q** son coplanares.

Como el paralelepípedo definido en el párrafo anterior es independiente del orden en que se tomen los tres vectores, todos los seis productos triples escalares que se pueden formar con **S**, **P** y **Q** tendrán el mismo valor absoluto, pero no el mismo signo. Se puede demostrar fácilmente que

$$\begin{aligned}\mathbf{S}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q}) &= \mathbf{P}\cdot(\mathbf{Q}\times\mathbf{S}) = \mathbf{Q}\cdot(\mathbf{S}\times\mathbf{P})\\ &= -\mathbf{S}\cdot(\mathbf{Q}\times\mathbf{P}) = -\mathbf{P}\cdot(\mathbf{S}\times\mathbf{Q}) = -\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{S})\end{aligned} \tag{3.39}$$

Ordenando las letras que representan a los tres vectores en un círculo y en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (figura 3.26), se observa que el signo del producto triple escalar permanece inalterado si se permutan los vectores en forma tal que éstos todavía se puedan leer en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Se dice que una permutación de este tipo es una *permutación circular*. También, a partir de la ecuación (3.39) y de la propiedad conmutativa de los productos escalares, se concluye que el producto triple escalar de **S**, **P** y **Q** se puede definir tan bien con **S** · (**P** × **Q**) como con (**S** × **P**) · **Q**.

El producto triple escalar de los vectores **S**, **P** y **Q** puede ser expresado en términos de las componentes rectangulares de estos vectores. Denotando a **P** × **Q** con **V** y con la fórmula (3.30) para expresar el producto escalar de **S** y **V**, se escribe

$$\mathbf{S}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q}) = \mathbf{S}\cdot\mathbf{V} = S_xV_x + S_yV_y + S_zV_z$$

Si se sustituyen las componentes de **V** a partir de las relaciones (3.9), se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{S}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q}) = S_x(P_yQ_z - P_zQ_y) &+ S_y(P_zQ_x - P_xQ_z)\\ &+ S_z(P_xQ_y - P_yQ_x)\end{aligned} \tag{3.40}$$

Esta expresión se puede escribir en forma más compacta si se observa que representa la expansión de un determinante:

$$\mathbf{S}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q}) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \tag{3.41}$$

Aplicando las reglas que gobiernan a la permutación de renglones en un determinante, pueden verificarse fácilmente las relaciones (3.39) que fueron derivadas a partir de consideraciones geométricas.

3.11. MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN EJE DADO

Ahora que se ha incrementado el conocimiento del álgebra vectorial, se puede introducir un nuevo concepto: *momento de una fuerza con respecto a un eje*. Considérese nuevamente la fuerza **F** que actúa sobre un cuerpo rígido y el momento $\mathbf{M}_O$ de dicha fuerza con respecto a O (figura 3.27). Sea OL un eje a través de O; *el momento M_{OL} de* **F** *con respecto a OL se define como la proyección OC del momento $\mathbf{M}_O$ sobre el eje OL*. Representando al vector unitario a lo largo de OL como $\boldsymbol{\lambda}$ y recordando, de las secciones 3.9 y 3.6, respectivamente, las expresiones (3.36) y (3.11) obtenidas para la proyección de un vector sobre un eje dado y para el momento $\mathbf{M}_O$ de una fuerza **F**, se escribe

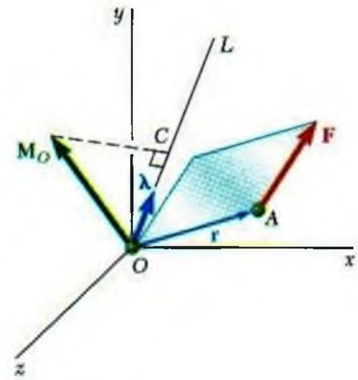


Figura 3.27

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_O = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \qquad (3.42)$$

lo cual demuestra que el momento M_{OL} de **F** con respecto al eje OL es el escalar que se obtiene formando el producto triple escalar de $\boldsymbol{\lambda}$, **r** y **F**. Expresando a M_{OL} en forma de determinante, se escribe

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (3.43)$$

donde $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ = cosenos directores del eje OL
x, y, z = coordenadas del punto de aplicación de **F**
F_x, F_y, F_z = componentes de la fuerza **F**

El significado físico del momento M_{OL} de una fuerza **F** con respecto al eje fijo OL se vuelve más evidente si se descompone a **F** en dos componentes rectangulares $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ con $\mathbf{F}_1$ paralela a OL y $\mathbf{F}_2$, contenida en un plano P perpendicular a OL (figura 3.28). En forma similar, descomponiendo a **r** en dos componentes $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ y sustituyendo a **F** y a **r** en (3.42), se escribe

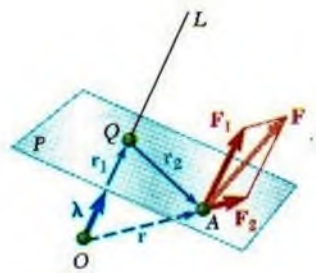


Figura 3.28

$$\begin{aligned} M_{OL} &= \boldsymbol{\lambda} \cdot [(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)] \\ &= \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1) + \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_2) + \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_1) + \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2) \end{aligned}$$

Con excepción del último término del lado derecho, todos los productos triples escalares son iguales a cero, puesto que involucran a vectores que son coplanares cuando se trazan a partir de un origen común (sección 3.10), se tiene

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2) \qquad (3.44)$$

El producto vectorial $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$ es perpendicular al plano P y representa el momento de la componente $\mathbf{F}_2$ de **F** con respecto al punto Q donde OL interseca a P. Por tanto, el escalar M_{OL}, el cual será positivo si $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$ y OL tienen el mismo sentido y negativo en caso contrario, mide la tendencia de $\mathbf{F}_2$ a hacer rotar el cuerpo rígido alrededor de OL. Como la otra componente $\mathbf{F}_1$ de **F** no tiende a hacer rotar el cuerpo alrededor de OL, se concluye que *el momento M_{OL} de* **F** *con respecto a OL mide la tendencia de la fuerza* **F** *de impartirle al cuerpo rígido un movimiento de rotación alrededor del eje fijo OL*.

A partir de la definición del momento de una fuerza con respecto a un eje, se concluye que el momento de **F** con respecto a un eje coordenado es igual a la componente de $\mathbf{M}_O$ a lo largo de dicho eje. Al sustituir $\boldsymbol{\lambda}$ de manera sucesiva en la ecuación (3.42) por cada uno de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**, se observa que las expresiones así obtenidas para los *momentos de* **F** *con respecto a los ejes coordenados* son iguales, respectivamente, a las expresiones obtenidas en la sección 3.8 para las componentes del momento $\mathbf{M}_O$ de **F** con respecto a O:

$$M_x = yF_z - zF_y \qquad M_y = zF_x - xF_z \qquad M_z = xF_y - yF_x \tag{3.18}$$

Se aprecia que de la misma forma que las componentes F_x, F_y y F_z de una fuerza **F** que actúa sobre un cuerpo rígido miden, respectivamente, la tendencia de **F** a mover el cuerpo rígido en las direcciones de x, y y z, los momentos M_x, M_y y M_z de **F** con respecto a los ejes coordenados miden, respectivamente, la tendencia de **F** a impartirle al cuerpo rígido un movimiento de rotación alrededor de los ejes x, y y z.

En general, el momento de una fuerza **F** aplicada en A con respecto a un eje que no pasa a través del origen, se obtiene seleccionando un punto arbitrario B sobre dicho eje (figura 3.29) y determinando la proyección sobre el eje BL del momento M_B de **F** con respecto a B. Entonces, se escribe

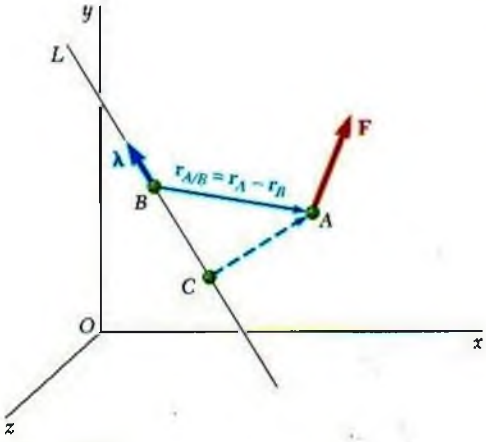


Figura 3.29

$$M_{BL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_B = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F}) \tag{3.45}$$

donde $\mathbf{r}_{A/B} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ representa al vector trazado desde B hasta A. Expresando a M_{BL} en forma de determinante, se tiene

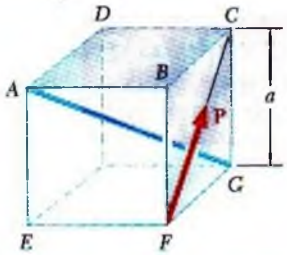
$$M_{BL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.46}$$

donde $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ = cosenos directores del eje BL
$x_{A/B} = x_A - x_B \qquad y_{A/B} = y_A - y_B \qquad z_{A/B} = z_A - z_B$
F_x, F_y, F_z = componentes de la fuerza **F**

Se debe observar que el resultado obtenido es independiente del punto B seleccionado sobre el eje dado. De hecho, denotando con M_{CL} el resultado obtenido con un punto C diferente, se tiene

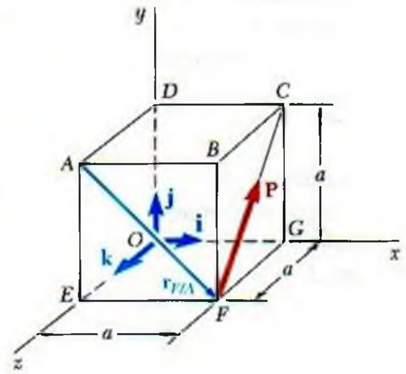
$$\begin{aligned} M_{CL} &= \boldsymbol{\lambda} \cdot [(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{F}] \\ &= \boldsymbol{\lambda} \cdot [(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}] + \boldsymbol{\lambda} \cdot [(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{F}] \end{aligned}$$

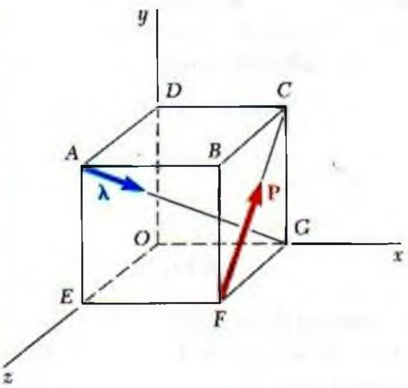
Pero como los vectores $\boldsymbol{\lambda}$ y $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C$ son colineales, el volumen del paralelepípedo que tiene por lados a los vectores $\boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C$ y **F** es igual a cero, al igual que el producto triple escalar de dichos vectores (sección 3.10). Entonces, la expresión obtenida para M_{CL} se reduce a su primer término, el cual es la expresión empleada anteriormente para definir a M_{BL}. De manera adicional, a partir de la sección 3.6 se concluye que cuando se calcula el momento de **F** con respecto a un eje dado, A puede ser cualquier punto a lo largo de la línea de acción de **F**.

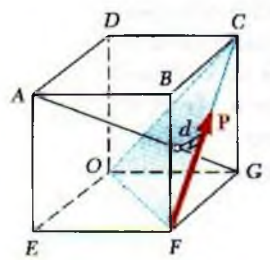


PROBLEMA RESUELTO 3.5

Sobre el cubo de lado a actúa una fuerza **P**, como se muestra en la figura. Determine el momento de **P**: *a*) con respecto a *A*, *b*) con respecto a la arista *AB* y *c*) con respecto a la diagonal *AG* del cubo; *d*) con el resultado del inciso *c*), determine la distancia perpendicular entre *AG* y *FC*.







SOLUCIÓN

***a*) Momento con respecto a *A*.** Al seleccionar los ejes x, y y z como se muestra en la figura, la fuerza **P** y el vector $\mathbf{r}_{F/A} = \overrightarrow{AF}$, trazado desde *A* hasta el punto de aplicación *F* de **P**, se descomponen en sus componentes rectangulares.

$$\mathbf{r}_{F/A} = a\mathbf{i} - a\mathbf{j} = a(\mathbf{i} - \mathbf{j})$$
$$\mathbf{P} = (P/\sqrt{2})\mathbf{j} - (P/\sqrt{2})\mathbf{k} = (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

El momento de **P** con respecto a *A* es igual a

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{F/A} \times \mathbf{P} = a(\mathbf{i} - \mathbf{j}) \times (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k})$$
$$\mathbf{M}_A = (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \quad \blacktriangleleft$$

***b*) Momento con respecto a *AB*.** Proyectando a $\mathbf{M}_A$ sobre *AB*, se escribe

$$M_{AB} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{M}_A = \mathbf{i} \cdot (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$
$$M_{AB} = aP/\sqrt{2} \quad \blacktriangleleft$$

Se verifica que, como *AB* es paralela al eje x, M_{AB} también es la componente del momento $\mathbf{M}_A$.

***c*) Momento con respecto a la diagonal *AG*.** El momento de **P** con respecto a *AG* se obtiene proyectando a $\mathbf{M}_A$ sobre *AG*. Denotando con $\boldsymbol{\lambda}$ el vector unitario a lo largo de *AG*, se tiene

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\overrightarrow{AG}}{AG} = \frac{a\mathbf{i} - a\mathbf{j} - a\mathbf{k}}{a\sqrt{3}} = (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})$$
$$M_{AG} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_A = (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$
$$M_{AG} = (aP/\sqrt{6})(1 - 1 - 1) \qquad M_{AG} = -aP/\sqrt{6} \quad \blacktriangleleft$$

Método alternativo. El momento de **P** con respecto a *AG* también se puede expresar en forma de determinante:

$$M_{AG} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{F/A} & y_{F/A} & z_{F/A} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ a & -a & 0 \\ 0 & P/\sqrt{2} & -P/\sqrt{2} \end{vmatrix} = -aP/\sqrt{6}$$

***d*) Distancia perpendicular entre *AG* y *FC*.** Primero se observa que **P** es perpendicular a la diagonal *AG*. Esto se puede comprobar con el producto escalart $\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda}$ y verificar que dicho producto es igual a cero:

$$\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda} = (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) = (P\sqrt{6})(0 - 1 + 1) = 0$$

Entonces, el momento M_{AG} puede ser expresado como $-Pd$, donde d es la distancia perpendicular desde *AG* hasta *FC*. (El signo negativo se usa puesto que para un observador ubicado en *G*, la rotación impartida al cubo por **P** tiene el sentido del movimiento de las manecillas del reloj.) Recordando el valor encontrado para M_{AG} en el inciso *c*), se tiene

$$M_{AG} = -Pd = -aP/\sqrt{6} \qquad d = a/\sqrt{6} \quad \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los problemas correspondientes a esta sección, se aplicará el *producto escalar* o *producto punto* de dos vectores para determinar el *ángulo formado por dos vectores dados* y para *determinar la proyección de una fuerza sobre un eje dado*. También se utilizará el *producto triple escalar* de tres vectores para encontrar el *momento de una fuerza con respecto a un eje dado* y para *determinar la distancia perpendicular entre dos líneas*.

1. Cálculo del ángulo formado por dos vectores dados. Primero se expresa cada uno de los vectores en términos de sus componentes y se determinan las magnitudes de los dos vectores. Después, se obtiene el coseno del ángulo buscado con la división del producto escalar de los dos vectores entre el producto de sus respectivas magnitudes [ecuación (3.32)].

2. Cálculo de la proyección de un vector P sobre un eje dado OL. En general, se comienza con la expresión en términos de sus componentes de **P** y del vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ que define la dirección del eje. Se debe tener cuidado de que $\boldsymbol{\lambda}$ tenga el sentido correcto (esto es, de que $\boldsymbol{\lambda}$ esté dirigido desde O hasta L). Entonces, la proyección buscada es igual al producto escalar $\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda}$. Sin embargo, si se conoce el ángulo θ que forman **P** y $\boldsymbol{\lambda}$, la proyección también se puede calcular como $P \cos \theta$.

3. Determinación del momento M_{OL} de una fuerza con respecto a un eje dado OL. Se definió a M_{OL} como

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_O = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \tag{3.42}$$

donde $\boldsymbol{\lambda}$ es el vector unitario a lo largo de OL y **r** es el vector de posición *desde cualquier punto* sobre la línea OL *hasta cualquier punto* sobre la línea de acción de **F**. Como fue el caso para el momento de una fuerza con respecto a un punto, elegir el vector de posición más conveniente simplificará los cálculos. Además, también se debe recordar la advertencia de la lección anterior: los vectores **r** y **F** deben tener el sentido correcto y ser colocados en la fórmula en el orden apropiado. El procedimiento que se debe seguir cuando se calcula el momento de una fuerza con respecto a un eje se ilustra en el inciso *c*) del problema resuelto 3.5. Los dos pasos esenciales en este procedimiento son: expresar primero a $\boldsymbol{\lambda}$, **r** y **F** en términos de sus componentes rectangulares para después evaluar el producto triple escalar $\boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$ con el fin de determinar el momento con respecto al eje. En la mayoría de los problemas tridimensionales, la forma más conveniente para calcular el producto triple escalar es emplear un determinante.

Como se mencionó anteriormente, cuando $\boldsymbol{\lambda}$ está dirigido a lo largo de uno de los ejes coordenados, M_{OL} es igual al componente escalar de $\mathbf{M}_O$ a lo largo de ese eje.

4. *Determinación de la distancia perpendicular entre dos líneas.* Se debe recordar que la componente perpendicular $\mathbf{F}_2$ de la fuerza $\mathbf{F}$ es la que tiende a hacer que el cuerpo rígido gire alrededor de un eje dado OL (figura 3.28). Entonces se concluye que

$$M_{OL} = F_2 d$$

donde M_{OL} es el momento de $\mathbf{F}$ alrededor del eje OL y d es la distancia perpendicular entre OL y la línea de acción de $\mathbf{F}$. Esta última ecuación proporciona una técnica simple para determinar d. Primero, supóngase que la fuerza $\mathbf{F}$ de magnitud conocida F se encuentra a lo largo de una de las líneas dadas y que el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ se ubica a lo largo de la otra línea. Después, calcule el momento M_{OL} de la fuerza $\mathbf{F}$ con respecto a la segunda línea con el método que se presentó en los párrafos anteriores. La magnitud de la componente paralela de $\mathbf{F}$, F_1 se obtiene utilizando el producto escalar:

$$F_1 = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\lambda}$$

El valor de F_2 se determina a partir de

$$F_2 = \sqrt{F^2 - F_1^2}$$

Por último, se sustituyen los valores de M_{OL} y F_2 en la ecuación $M_{OL} = F_2 d$ y se resuelve para d.

Ahora se puede comprender que el cálculo de la distancia perpendicular en el inciso *d)* del problema resuelto 3.5 se simplificó debido a que $\mathbf{P}$ era perpendicular a la diagonal AG. Como, en general, las dos líneas dadas no serán perpendiculares, la técnica recién descrita se debe emplear cuando se desee determinar la distancia perpendicular entre ellas.

Problemas

3.35 Dados los vectores $\mathbf{P} = -4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = 9\mathbf{i} - \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$, y $\mathbf{S} = 5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, encuentre los productos escalares $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$, $\mathbf{P} \cdot \mathbf{S}$ y $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}$.

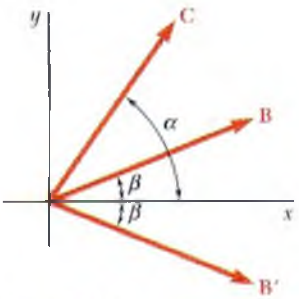


Figura P3.36

3.36 Obtenga los productos escalares $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ y $\mathbf{B}' \cdot \mathbf{C}$, donde $B = B'$, y utilice los resultados obtenidos para demostrar la identidad

$$\cos \alpha \cos \beta = \tfrac{1}{2} \cos (\alpha + \beta) + \tfrac{1}{2} \cos (\alpha - \beta).$$

3.37 Se utilizan tres cables para sostener un contenedor como se muestra en la figura. Determine el ángulo formado por los cables AB y AD.

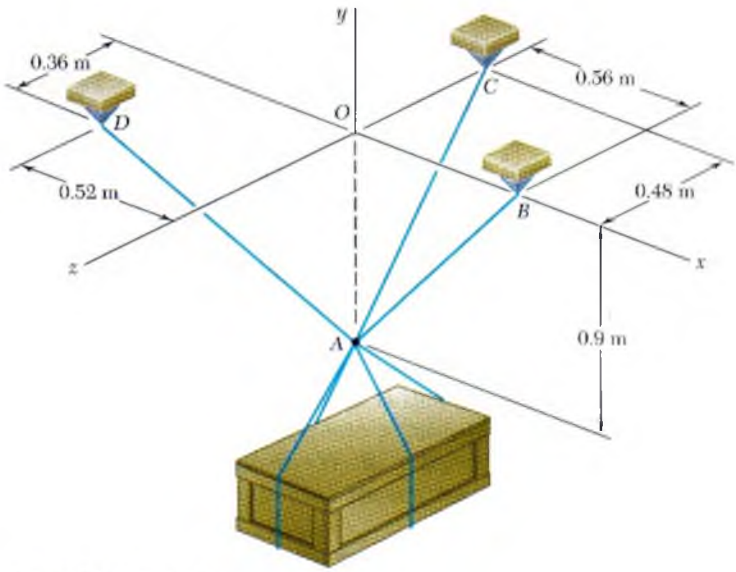


Figura P3.37 y *P3.38*

3.38 Para sostener un contenedor, como se muestra en la figura, se utilizan tres cables. Determine el ángulo formado por los cables AC y AD.

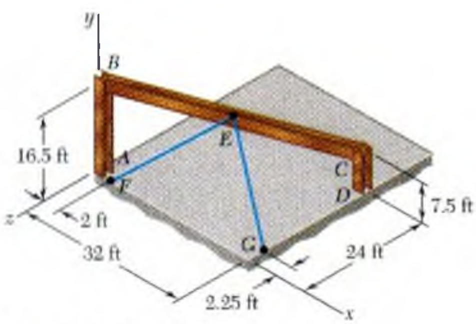


Figura P3.39 y P3.40

3.39 Los elementos AB, BC y CD del marco de acero mostrado en la figura están unidos en B y C, asegurados mediante los cables EF y EG. Si E es el punto medio de BC y la tensión en el cable EF es de 110 lb, determine *a*) el ángulo entre EF y el elemento BC, *b*) la proyección sobre BC de la fuerza ejercida por el cable EF en el punto E.

3.40 Los elementos AB, BC y CD del marco de acero mostrado en la figura están unidos en B y C, asegurados mediante los cables EF y EG. Si E es el punto medio de BC y la tensión en el cable EG es de 178 lb, determine *a*) el ángulo entre EG y el elemento BC, *b*) la proyección sobre BC de la fuerza ejercida por el cable EG en el punto E.

3.41 En la figura se muestra un mástil y parte de los aparejos de un velero. Los elementos CD y EF pertenecen al mismo plano, CD tiene longitud de 7.5 m y forma un ángulo de 45° con una línea vertical que pasa por C. Si cuando $\theta = 15°$ la tensión en la cuerda AB es de 230 N, determine *a*) el ángulo entre las cuerdas AB y BD, *b*) la proyección sobre BD de la fuerza ejercida por la cuerda AB en el punto B.

3.42 En la figura se muestra un mástil y parte de los aparejos de un velero. Los elementos CD y EF pertenecen al mismo plano, CD tiene longitud de 7.5 m y forma un ángulo de 45° con una línea vertical que pasa por C. Si cuando $\theta = 10°$ a tensión en la cuerda BD es de 250 N, determine *a*) el ángulo entre la cuerda BD y el arpón CD, *b*) la proyección sobre CD de la fuerza ejercida por la cuerda BD en el punto D.

3.43 Determine el volumen del paralelepípedo de la figura 3.25 si *a*) $\mathbf{P} = (3 \text{ in.})\mathbf{i} - (4 \text{ in.})\mathbf{j} + (1 \text{ in.})\mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = -(7 \text{ in.})\mathbf{i} + (6 \text{ in.})\mathbf{j} - (8 \text{ in.})\mathbf{k}$ y $\mathbf{S} = (9 \text{ in.})\mathbf{i} - (2 \text{ in.})\mathbf{j} - (3 \text{ in.})\mathbf{k}$, *b*) $\mathbf{P} = -(5 \text{ in.})\mathbf{i} - (7 \text{ in.})\mathbf{j} + (4 \text{ in.})\mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = (6 \text{ in.})\mathbf{i} - (2 \text{ in.})\mathbf{j} + (5 \text{ in.})\mathbf{k}$, y $\mathbf{S} = -(4 \text{ in.})\mathbf{i} + (8 \text{ in.})\mathbf{j} - (9 \text{ in.})\mathbf{k}$.

3.44 Dados los vectores $\mathbf{P} = -3\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ y $\mathbf{S} = 8\mathbf{i} + S_y\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$, determine el valor de S_y para el que los tres vectores son coplanares.

3.45 La plataforma rectangular tiene bisagras en A y B y se sostiene mediante un cable que pasa, sin fricción, por un gancho colocado en E. Si la tensión en el cable es de 1 349 N, determine el momento de la fuerza ejercida por el cable en C respecto a cada uno de los ejes coordenados.

3.46 La plataforma rectangular tiene bisagras en A y B y se sostiene mediante un cable que pasa, sin fricción, por un gancho colocado en E. Si la tensión en el cable es de 1 349 N, determine el momento de la fuerza ejercida por el cable en D respecto a cada uno de los ejes coordenados.

3.47 Una cerca consiste en postes de madera y un cable de acero sujeto a cada poste y anclado al suelo en los puntos A y D. Si la suma de momentos, respecto al eje z, de las fuerzas ejercidas por el cable sobre los postes ubicados en B y C es de -48 lb · ft, determine la magnitud de $\mathbf{T}_{CD}$ cuando $T_{BA} = 14$ lb.

3.48 Una cerca consiste en postes de madera y un cable de acero sujeto a cada poste y anclado al suelo en los puntos A y D. Si la suma de momentos, respecto al eje y, de las fuerzas ejercidas por el cable sobre los postes ubicados en B y C es de 156 lb · ft, determine la magnitud de $\mathbf{T}_{BA}$ cuando $T_{CD} = 7.5$ lb.

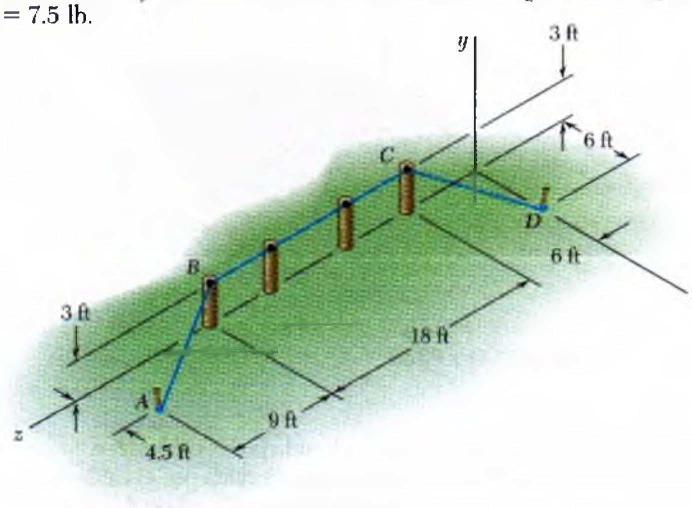


Figura P3.47 y *P3.48*

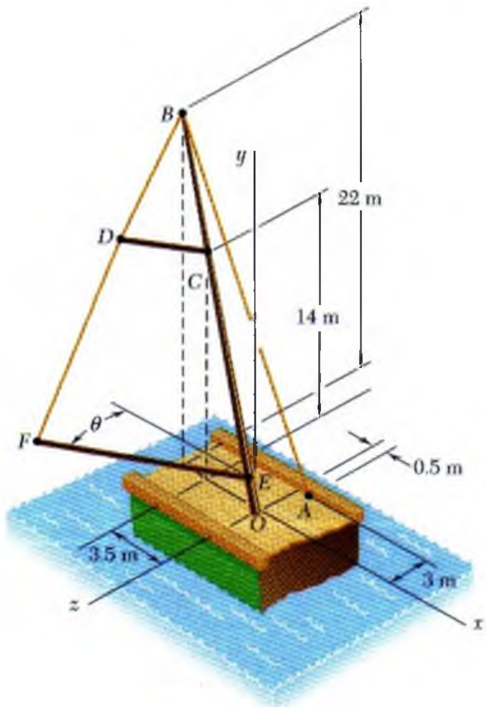


Figura *P3.41* y P3.42

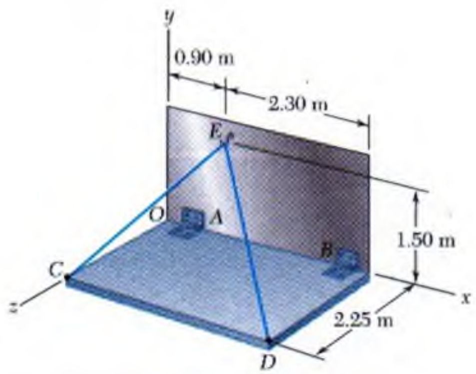


Figura P3.45 y P3.46

3.49 Una fuerza **P** se aplica a la palanca de un tornillo de presión. Si **P** pertenece a un plano paralelo al plano yz y $M_x = 26$ N · m, $M_y = -23$ N · m y $M_z = -4$ N · m, determine la magnitud de **P** y los valores de ϕ y θ.

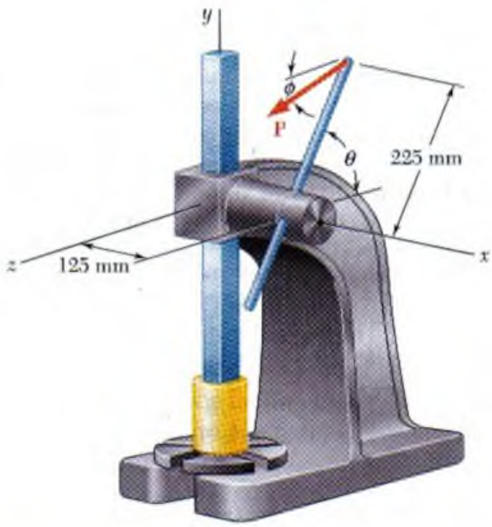


Figura P3.49 y P3.50

3.50 Una fuerza **P** se aplica a la palanca de un tornillo de presión. Si **P** pertenece a un plano paralelo al plano yz y $M_y = -20$ N · m y $M_z = -3.5$ N · m, determine el momento de M_x de **P** respecto al eje x cuando $\theta = 60°$.

3.51 El poste utilitario BC está retenido por el cable AB como se muestra en la figura. Si la magnitud de la fuerza ejercida por el cable en B es de 70 lb, y el momento de esa fuerza respecto al eje x es de -763 lb · ft, determine la longitud del poste.

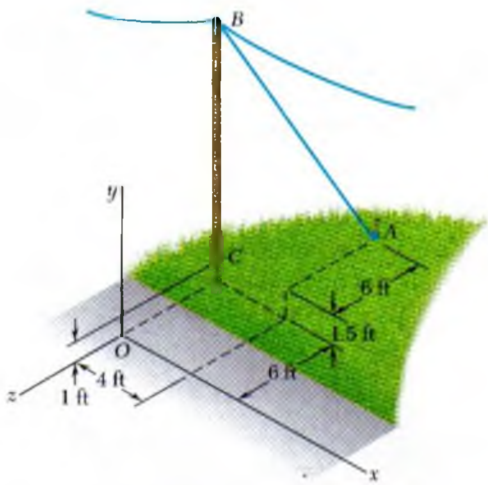


Figura *P3.51* y P3.52

3.52 El poste utilitario BC está retenido por el cable AB como se muestra en la figura. Si los momentos de la fuerza ejercida por el cable en el punto B respecto a los ejes x y z son, respectivamente, de -900 lb · ft y -315 lb · ft, determine la longitud del poste.

3.53 El marco ACD está articulado en A y D y se sostiene mediante un cable, el cual pasa por un anillo colocado en B y está unido a ganchos en G y H. Si la tensión en el cable es de 1 125 N, determine el momento, respecto a la diagonal AD, de la fuerza ejercida sobre el marco por el tramo BH del cable.

3.54 El marco ACD está articulado en A y D y se sostiene mediante un cable, el cual pasa por un anillo colocado en B y está unido a ganchos en G y H. Si la tensión en el cable es de 1 125 N, determine el momento, respecto a la diagonal AD, de la fuerza ejercida sobre el marco por el tramo BG del cable.

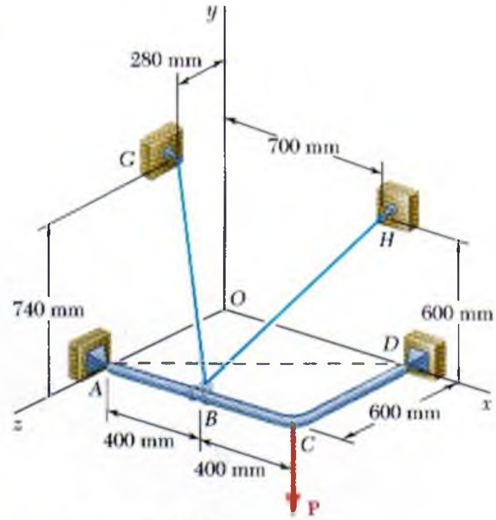


Figura P3.53 y P3.54

3.55 La sección $ABCD$ de una pasarela inclinada en voladizo mide 2.4 m de ancho y está parcialmente sostenida por los elementos EF y GH. Si la fuerza compresiva ejercida por el elemento EF sobre la pasarela en el punto F es de 24.3 kN, determine el momento de esa fuerza respecto al borde AD.

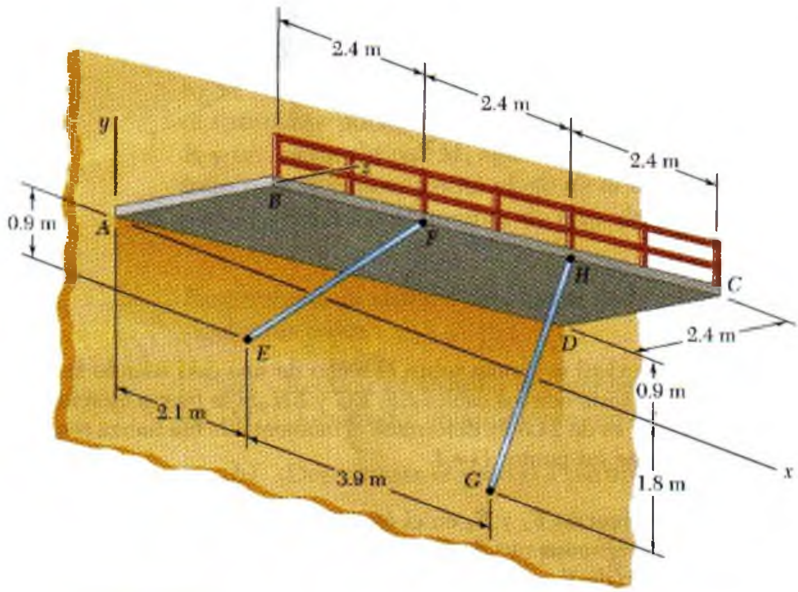


Figura P3.55 y P3.56

3.56 La sección $ABCD$ de una pasarela inclinada en voladizo mide 2.4 m de ancho y está parcialmente sostenida por los elementos EF y GH. Si la fuerza compresiva ejercida por el elemento GH sobre la pasarela en el punto H es de 21.3 kN, determine el momento de esa fuerza respecto al borde AD.

3.57 Un tetraedro rectangular tiene seis lados de longitud a. Si una fuerza **P** se aplica a lo largo del borde BC como indica la figura, determine el momento de la fuerza **P** respecto al borde OA.

3.58 Un tetraedro rectangular tiene seis lados de longitud a. *a*) Demuestre que dos bordes opuestos, como OA y BC, son mutuamente perpendiculares. *b*) Use esta propiedad y el resultado obtenido en el problema 3.57 para determinar la distancia perpendicular entre los bordes OA y BC.

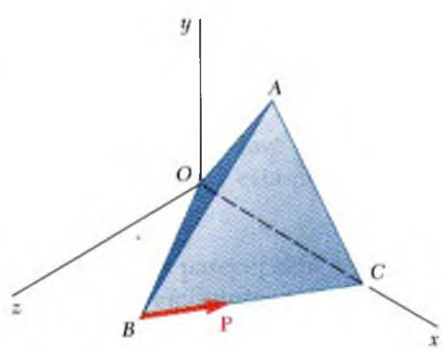


Figura P3.57 y P3.58

3.59 Un mástil se monta sobre el techo de una casa usando la ménsula *ABCD* y lo sostienen los cables *EF*, *EG* y *EH*. Si la fuerza ejercida por el cable *EF* en el punto *E* es de 29.7 lb, determine el momento de esa fuerza respecto a la línea que une los puntos *D* e *I*.

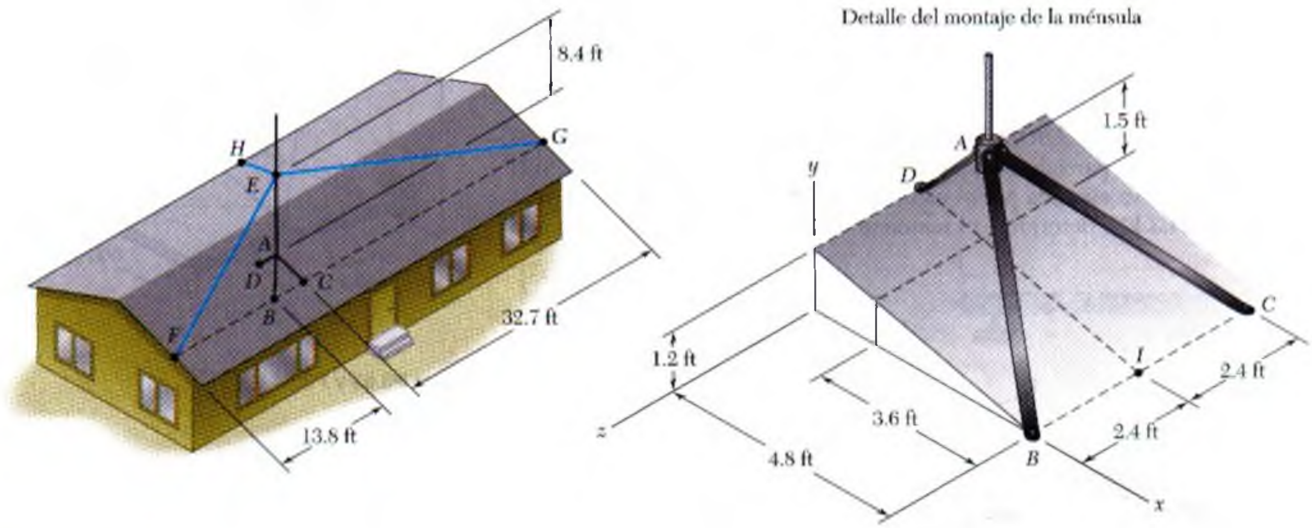


Figura ***P3.59*** **y P3.60**

3.60 Un mástil se monta sobre el techo de una casa usando la ménsula *ABCD* y lo sostienen los cables *EF*, *EG* y *EH*. Si la fuerza ejercida por el cable *EG* en *E* es de 24.6 lb, determine el momento de esa fuerza respecto a la línea que une los puntos *D* e *I*.

3.61 Dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ en el espacio tienen la misma magnitud *F*. Demuestre que el momento de $\mathbf{F}_1$ respecto a la línea de acción de $\mathbf{F}_2$ es igual al momento de $\mathbf{F}_2$ respecto a la línea de acción de $\mathbf{F}_1$.

***3.62** En el problema 3.53, determine la distancia perpendicular entre el tramo *BH* del cable y la diagonal *AD*.

****3.63*** En el problema 3.54, determine la distancia perpendicular entre el tramo *BG* del cable y la diagonal *AD*.

***3.64** En el problema 3.59, determine la distancia perpendicular entre el cable *EF* y la línea que une los puntos *D* e *I*.

***3.65** En el problema 3.60, determine la distancia perpendicular entre el cable *EG* y la línea que une los puntos *D* e *I*.

****3.66*** En el problema 3.55, determine la distancia perpendicular entre el elemento *EF* y el borde *AD* de la pasarela.

***3.67** En el problema 3.56, determine la distancia perpendicular entre el elemento *GH* y el borde *AD* de la pasarela.

3.12. MOMENTO DE UN PAR

Se dice que *dos fuerzas* **F** *y* −**F** *que tienen la misma magnitud, líneas de acción paralelas y sentidos opuestos forman un par* (figura 3.30). Obviamente, la suma de las componentes de las dos fuerzas en cualquier dirección es igual a cero. Sin embargo, la suma de los momentos de las dos fuerzas con respecto a un punto dado no es cero. Aunque las dos fuerzas no originarán una traslación del cuerpo sobre el que están actuando, éstas sí tenderán a hacerlo rotar.

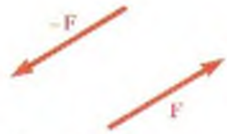


Figura 3.30

Al representar con $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$, respectivamente, a los vectores de posición de los puntos de aplicación de **F** y −**F** (figura 3.31), se encuentra que la suma de los momentos de las dos fuerzas con respecto a *O* es

$$\mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$$

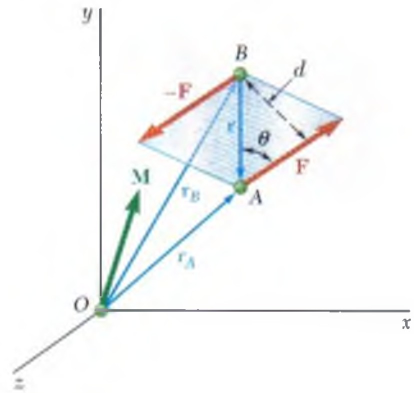


Figura 3.31

Si se define $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B = \mathbf{r}$, donde **r** es el vector que une los puntos de aplicación de las dos fuerzas, se concluye que la suma de los momentos de **F** y −**F**, con respecto a *O*, está representado por el vector

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{3.47}$$

El vector **M** se conoce como el *momento del par*; se trata de un vector perpendicular al plano que contiene las dos fuerzas y su magnitud está dada por

$$M = rF \operatorname{sen} \theta = Fd \tag{3.48}$$

donde *d* es la distancia perpendicular entre las líneas de acción de **F** y −**F**. El sentido de **M** está definido por la regla de la mano derecha.

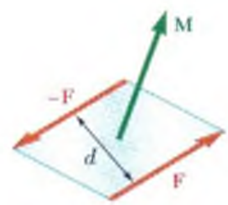


Figura 3.32

Como el vector **r** en (3.47) es independiente de la elección del origen *O* de los ejes coordenados, se observa que se obtendría el mismo resultado si los momentos de **F** y −**F** se hubieran calculado con respecto a un punto *O'*. Por tanto, el momento **M** de un par es un *vector libre* (sección 2.3) que puede ser aplicado en cualquier punto (figura 3.32).

A partir de la definición del momento de un par también se concluye que dos pares, uno constituido por las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$, y el otro constituido por las fuerzas $\mathbf{F}_2$ y $-\mathbf{F}_2$ (figura 3.33) tendrán momentos iguales si

$$F_1 d_1 = F_2 d_2 \tag{3.49}$$

y si los dos pares se encuentran en planos paralelos (o en el mismo plano) y tienen el mismo sentido.



Fotografía 3.1 Las fuerzas paralelas de igual magnitud ejercidas hacia arriba y hacia abajo sobre los brazos de la cruceta, son ejemplo de un par.

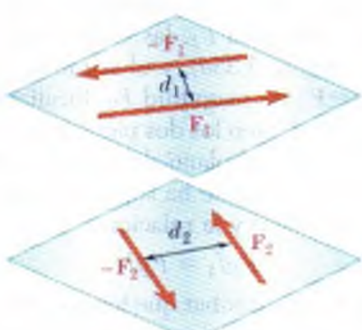


Figura 3.33

3.13. PARES EQUIVALENTES

La figura 3.34 muestra tres pares que actúan de manera sucesiva sobre la misma caja rectangular. Como se vio en la sección anterior, el único movimiento que un par le puede impartir a un cuerpo rígido es una rotación. Como cada uno de los tres pares mostrados tiene el mismo momento **M** (la misma dirección y la misma magnitud $M = 120$ lb · in.), se puede esperar que los tres pares tengan el mismo efecto sobre la caja.

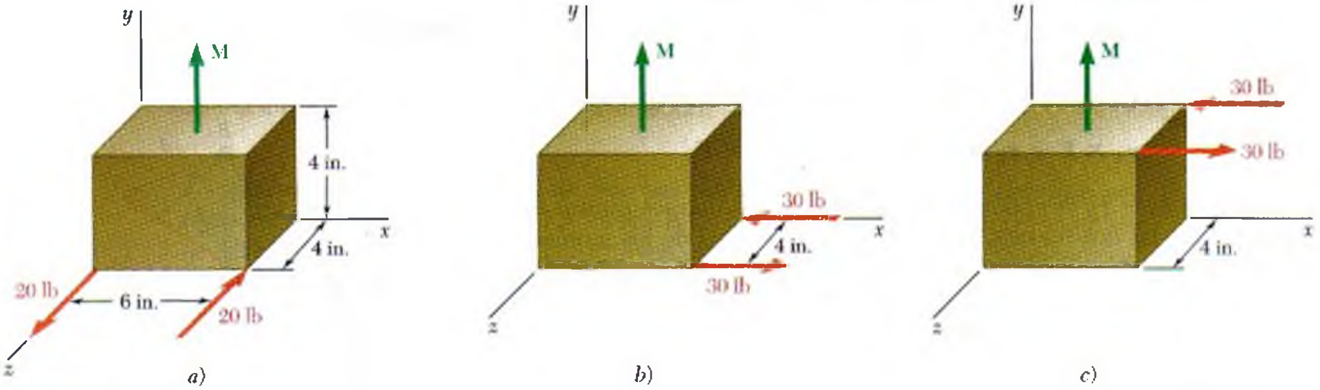


Figura 3.34

Por más razonable que parezca esta conclusión, no debe aceptarse de inmediato. Aunque la intuición es de gran ayuda en el estudio de la mecánica, no debe ser aceptada como un sustituto del razonamiento lógico. Antes de establecer que dos sistemas (o grupos) de fuerzas tienen el mismo efecto sobre un cuerpo rígido, esto debe demostrarse con base en la evidencia experimental que se ha presentado hasta este momento. Esta evidencia consiste en la ley del paralelogramo para la suma de dos fuerzas (sección 2.2) y en el principio de transmisibilidad (sección 3.3). Por tanto, se establecerá que *dos sistemas de fuerzas equivalentes* (esto es, que dichos sistemas tienen el mismo efecto sobre un cuerpo rígido) *sí pueden transformar a uno de ellos en el otro por medio de una o varias de las siguientes operaciones*: 1) reemplazar dos fuerzas que actúan sobre la misma partícula por su resultante, 2) descomponer a una fuerza en dos componentes, 3) cancelar dos fuerzas iguales y opuestas que actúan sobre la misma partícula, 4) unir a la misma partícula dos fuerzas iguales y opuestas y 5) mover una fuerza a lo largo de su línea de acción. Cada una de estas operaciones se justifica fácilmente con base en la ley del paralelogramo o en el principio de transmisibilidad.

Ahora se procede a demostrar que *dos pares que tienen el mismo momento* **M** *son equivalentes*. Primero se consideran dos pares contenidos en el mismo plano y se supone que dicho plano coincide con el plano de la figura (figura 3.35). El primer par está constituido por las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$ de magnitud F_1, las cuales están localizadas a una distancia d_1 entre sí (figura 3.35*a*), y el segundo par está constituido por las fuerzas $\mathbf{F}_2$ y $-\mathbf{F}_2$ de magnitud F_2, localizadas a una distancia d_2 entre sí (figura 3.35*d*). Como los dos pares tienen el mismo momento **M**, que es perpendicular al plano de la figura, ambos pares deben tener el mismo sentido (el cual se ha supuesto contrario al movimiento de las manecillas del reloj) y la relación

$$F_1 d_1 = F_2 d_2 \tag{3.49}$$

debe ser satisfecha. Para comprobar que los dos pares son equivalentes, se debe demostrar que el primer par puede ser transformado en el segundo por medio de las operaciones enumeradas con anterioridad.

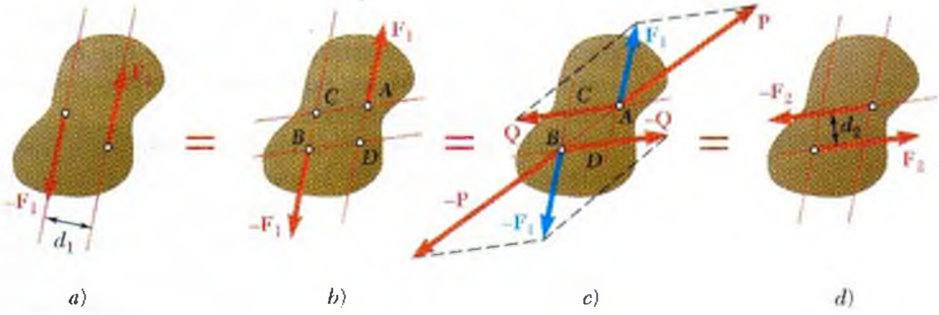


Figura 3.35

Al representar con A, B, C y D los puntos de intersección de las líneas de acción de los dos pares, se deslizan primero las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$ hasta que estén unidas, respectivamente, a A y B, como se muestra en la figura 3.35*b*. Entonces, la fuerza $\mathbf{F}_1$ se descompone en una componente $\mathbf{P}$ a lo largo de la línea AB y una componente $\mathbf{Q}$ a lo largo de AC (figura 3.35*c*); similarmente, la fuerza $-\mathbf{F}_1$ se descompone en $-\mathbf{P}$ a lo largo de AB y en $-\mathbf{Q}$ a lo largo de BD. Las fuerzas $\mathbf{P}$ y $-\mathbf{P}$ tienen la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos; tales fuerzas pueden moverse a lo largo de su línea de acción común hasta aparecer aplicadas en el mismo punto para que, entonces, puedan ser canceladas. Por tanto, el par formado por $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$ se reduce al par constituido por $\mathbf{Q}$ y $-\mathbf{Q}$.

A continuación se comprueba que las fuerzas $\mathbf{Q}$ y $-\mathbf{Q}$ son iguales, respectivamente, a las fuerzas $-\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_2$. El momento del par formado por $\mathbf{Q}$ y $-\mathbf{Q}$ puede obtenerse calculando el momento de $\mathbf{Q}$ con respecto a B; en forma similar, el momento del par formado por $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$ es el momento de $\mathbf{F}_1$ con respecto a B. Pero, por el teorema de Varignon, el momento de $\mathbf{F}_1$ es igual a la suma de los momentos de sus componentes $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$. Como el momento de $\mathbf{P}$ con respecto a B es igual a cero, el momento del par formado por $\mathbf{Q}$ y $-\mathbf{Q}$ debe ser igual al momento del par formado por $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$. Recordando (3.49), se escribe

$$Qd_2 = F_1d_1 = F_2d_2 \qquad \text{y} \qquad Q = F_2$$

Por tanto, las fuerzas $\mathbf{Q}$ y $-\mathbf{Q}$ son iguales, respectivamente, a las fuerzas $-\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_2$, y el par de la figura 3.35*a* es equivalente al par de la figura 3.35*d*.

Considere ahora dos pares contenidos en planos paralelos P_1 y P_2; a continuación se demostrará que dichos pares son equivalentes si tienen el mismo momento. En virtud de lo que se ha presentado hasta ahora, se puede suponer que ambos pares están constituidos por fuerzas que tienen la misma magnitud F y que actúan a lo largo de líneas paralelas (figura 3.36*a* y *d*). Se pretende demostrar que el par contenido en el plano P_1 puede ser transformado en el par contenido en el plano P_2 por medio de las operaciones estándar que ya se mencionaron.

Considere dos planos definidos, respectivamente, por las líneas de acción de $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_2$ y por las líneas de acción de $-\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ (figura 3.36*b*). En un punto sobre la línea de intersección de los dos planos se unen dos fuerzas $\mathbf{F}_3$ y $-\mathbf{F}_3$, que son iguales, respectivamente, a $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$. El par formado por $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_3$ puede ser reemplazado por un par constituido por $\mathbf{F}_3$ y $-\mathbf{F}_2$ (figura 3.36*c*) puesto que, obviamente, ambos pares tienen el mismo momento y están contenidos en el mismo plano. En forma análoga, el par formado por $-\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_3$ puede ser reemplazado por un par constituido por $-\mathbf{F}_3$ y $\mathbf{F}_2$. Cancelando las dos fuerzas igua-

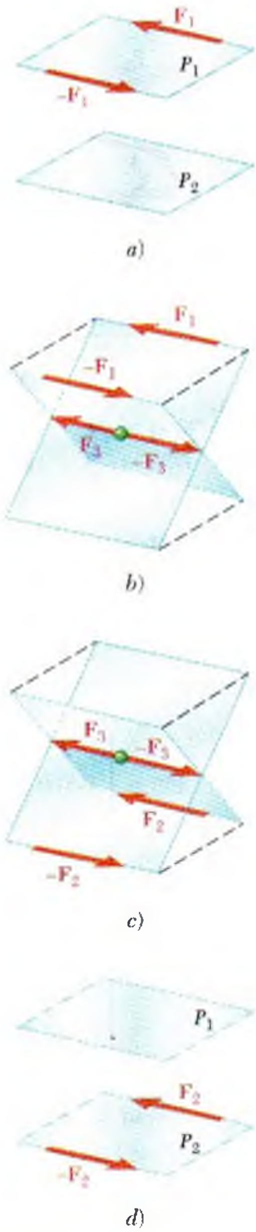


Figura 3.36

les y opuestas $\mathbf{F}_3$ y $-\mathbf{F}_3$, se obtiene el par deseado en el plano P_2 (figura 3.36*d*). En este sentido, se concluye que dos pares que tienen el mismo momento **M** son equivalentes si están contenidos en el mismo plano o en planos paralelos.

La propiedad que se acaba de establecer es muy importante para entender correctamente la mecánica de los cuerpos rígidos. Esta propiedad indica que cuando un par actúa sobre un cuerpo rígido, es irrelevante dónde actúan las dos fuerzas que forman al par o cuáles son la magnitud y la dirección que esas fuerzas tienen. Lo único que importa es el *momento* del par (su magnitud y dirección). Los pares con el mismo momento tendrán el mismo efecto sobre el cuerpo rígido.

3.14. ADICIÓN O SUMA DE PARES

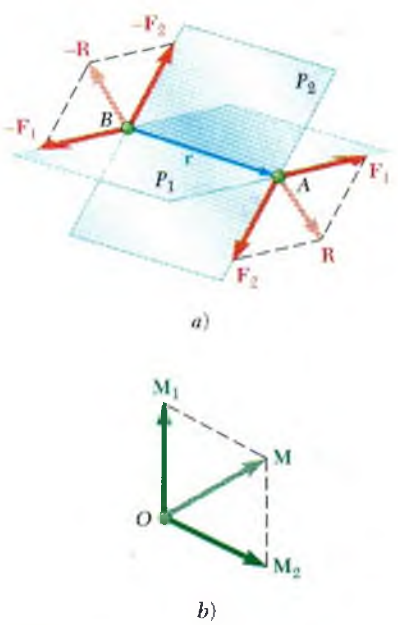


Figura 3.37

Considere dos planos P_1 y P_2 que se intersecan y dos pares que actúan, respectivamente, en P_1 y P_2. Se puede suponer, sin perder la generalidad, que el par en P_1 consta de dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$ perpendiculares a la línea de intersección de los dos planos y que actúan, respectivamente, en A y B (figura 3.37*a*). En forma similar, se supone que el par en P_2 consta de dos fuerzas $\mathbf{F}_2$ y $-\mathbf{F}_2$ perpendiculares a AB y que actúan, respectivamente, en A y B. Es obvio que la resultante $\mathbf{R}$ de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ y la resultante $-\mathbf{R}$ de $-\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_2$ forman un par. Si se representa con $\mathbf{r}$ el vector que une a B con A y si recordamos la definición de par (sección 3.12), el momento $\mathbf{M}$ del par resultante queda expresado como sigue:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)$$

y, por el teorema de Varignon,

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2$$

Pero el primer término en la expresión obtenida representa al momento $\mathbf{M}_1$ del par en P_1 y el segundo término representa al momento $\mathbf{M}_2$ del par en P_2. Así se tiene

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 \tag{3.50}$$

y se concluye que la suma de dos pares cuyos momentos son iguales a $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ es un par de momento $\mathbf{M}$ igual a la suma vectorial de $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ (figura 3.37*b*).

3.15. LOS PARES PUEDEN REPRESENTARSE POR MEDIO DE VECTORES

Como se vio en la sección 3.13, los pares que tienen el mismo momento, sin importar si actúan en el mismo plano o en planos paralelos, son equivalentes. Por tanto, no hay necesidad de dibujar las fuerzas que en realidad forman un par dado con el propósito de definir el efecto que dicho par tiene sobre un cuerpo rígido (figura 3.38*a*). Es suficiente dibujar una flecha igual en magnitud y dirección al momento **M** del par (figura 3.38*b*). Por otra parte, en la sección 3.14 quedó expresado que la suma de dos pares es otro par y que el momento **M** del par resultante puede obtenerse mediante la suma vectorial los momentos $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$, de los pares dados. Por consiguiente, los pares obedecen la ley para la adición de vectores y la flecha usada en la figura 3.38*b* para representar al par definido en la figura 3.38*a* puede considerarse como un vector verdadero.

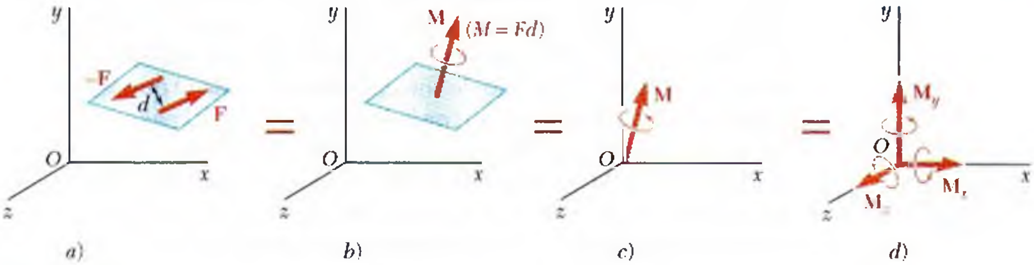


Figura 3.38

El vector que representa un par recibe el nombre de *vector de par*. Obsérvese que en la figura 3.38 se usó una flecha roja para distinguir al vector de par, *la cual representa al par mismo*, del *momento* del par, que se representó con una flecha verde en figuras anteriores. Nótese también que se ha agregado el símbolo ↰ a esta flecha roja con el fin de evitar cualquier confusión con los vectores que representan fuerzas. El vector de par, como el momento de un par, es un vector libre. Por tanto, su punto de aplicación puede ser elegido en el origen del sistema de coordenadas si así se desea (figura 3.38*c*). Además, el vector del momento **M** se puede descomponer en componentes vectoriales $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$ y $\mathbf{M}_z$, las cuales están dirigidas a lo largo de los ejes coordenados (figura 3.38*d*). Esas componentes vectoriales representan pares que actúan, respectivamente, en los planos yz, zx y xy.

3.16. DESCOMPOSICIÓN DE UNA FUERZA DADA EN UNA FUERZA EN *O* Y UN PAR

Considere una fuerza **F** que actúa sobre un cuerpo rígido en un punto A definido por el vector de posición **r** (figura 3.39*a*). Suponga que por alguna razón se quiere que la fuerza actúe en el punto O. Aunque **F** se puede mover a lo largo de su línea de acción (principio de transmisibilidad), no es posible moverla al punto O, que no se encuentra sobre la línea de acción original de la fuerza, sin modificar el efecto que **F** tiene sobre el cuerpo rígido.

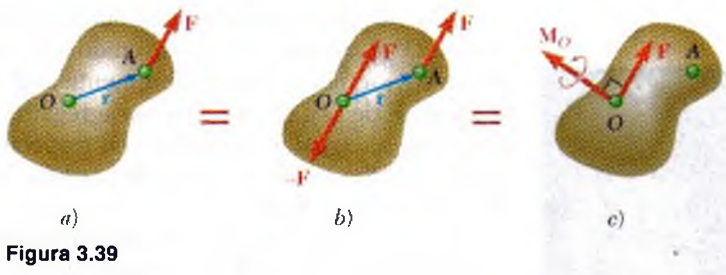


Figura 3.39

Sin embargo, pueden unirse dos fuerzas al punto O, una igual a **F** y otra igual a −**F**, sin modificar el efecto que la fuerza original tiene sobre el cuerpo rígido (figura 3.39*b*). Como una consecuencia de esta transformación, ahora una fuerza **F** se aplica en O; las otras dos fuerzas

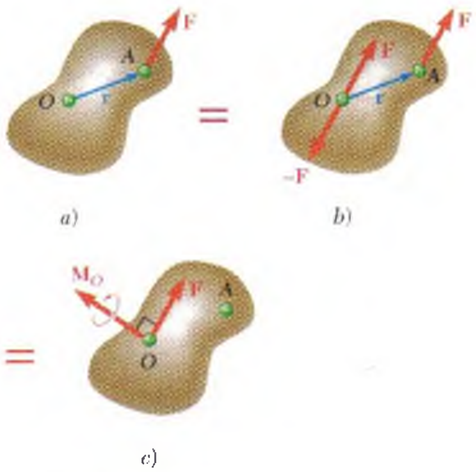


Figura 3.39 (***repetida***)

forman un par con un momento $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Por tanto, *cualquier fuerza* **F** *que actúe sobre un cuerpo rígido puede ser trasladada a un punto arbitrario O siempre y cuando se agregue un par cuyo momento sea igual al momento de* **F** *con respecto a O*. El par tiende a impartirle al cuerpo rígido el mismo movimiento de rotación alrededor de O que la fuerza **F** ocasionaba antes de que fuera trasladada al punto O. El par se representa por el vector de par $\mathbf{M}_O$ que es perpendicular al plano que contiene a **r** y a **F**. Como $\mathbf{M}_O$ es un vector libre, puede ser aplicado en cualquier lugar; sin embargo, por conveniencia, usualmente el vector de par se fija en O, junto con **F**, y se hace referencia a la combinación obtenida como un *sistema fuerza-par* (figura 3.39*c*).

Si la fuerza **F** se hubiera trasladado del punto A a un punto diferente O' (figura 3.40*a* y *c*), se tendría que calcular el momento $\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{r}' \times \mathbf{F}$ de **F** con respecto a O' y se hubiera fijado a O' un nuevo sistema fuerza-par constituido por **F** y por el vector de par $\mathbf{M}_{O'}$. La relación que existe entre los momentos de **F** con respecto a O y a O' se obtiene

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{r}' \times \mathbf{F} = (\mathbf{r} + \mathbf{s}) \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} + \mathbf{s} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + \mathbf{s} \times \mathbf{F} \tag{3.51}$$

donde **s** es el vector que une a O' con O. De esta manera, el momento $\mathbf{M}_{O'}$ de **F** con respecto a O' se obtiene sumándole al momento $\mathbf{M}_O$ de **F** con respecto a O el producto vectorial $\mathbf{s} \times \mathbf{F}$ que representa el momento con respecto a O' de la fuerza **F** aplicada en O.

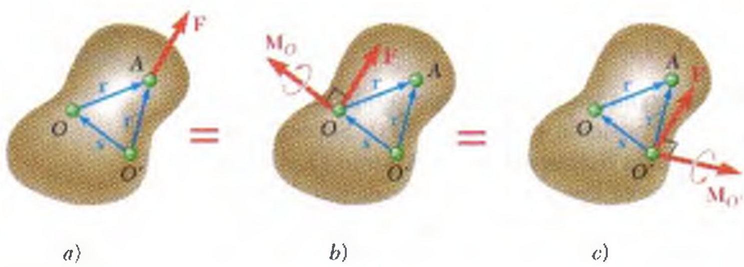


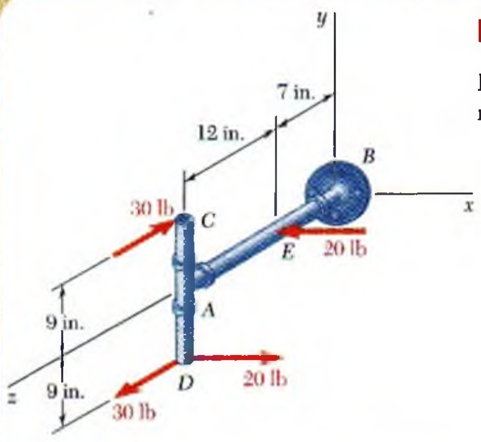
Figura 3.40

Este resultado también pudo obtenerse observando que, para trasladar a O' al sistema fuerza-par unido a O (figura 3.40*b* y *c*), el vector de par $\mathbf{M}_O$ se puede mover libremente a O'; sin embargo, para mover la fuerza **F** de O a O' es necesario agregarle a **F** un vector de par cuyo momento sea igual al momento con respecto a O' de la fuerza **F** aplicada en O. Por tanto, el vector de par $\mathbf{M}_{O'}$ debe ser igual a la suma de $\mathbf{M}_O$ y el vector $\mathbf{s} \times \mathbf{F}$.

Como ya se ha mencionado, el sistema fuerza-par obtenido a partir de trasladar una fuerza **F** de un punto A a un punto O consta de un vector de fuerza **F** y de un vector de par $\mathbf{M}_O$ perpendicular a **F**. Por el contrario, cualquier sistema fuerza-par que conste de una fuerza **F** y de un vector de par $\mathbf{M}_O$ que sean *mutuamente perpendiculares*, puede ser reemplazado por una sola fuerza equivalente. Esto se lleva a cabo moviendo la fuerza **F** en el plano perpendicular a $\mathbf{M}_O$ hasta que su momento con respecto a O sea igual al momento del par que se desea eliminar.

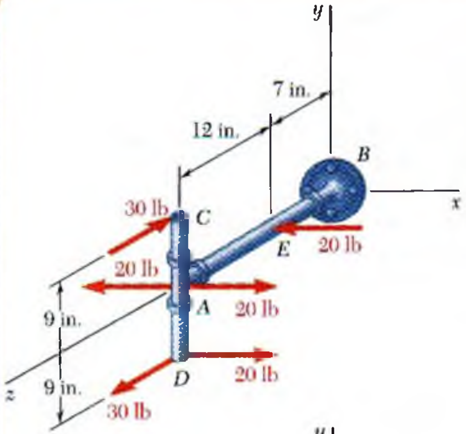


Fotografía 3.2 La fuerza ejercida por cada mano sobre la llave puede reemplazarse por un sistema equivalente fuerza-par que actúa sobre la tuerca.



PROBLEMA RESUELTO 3.6

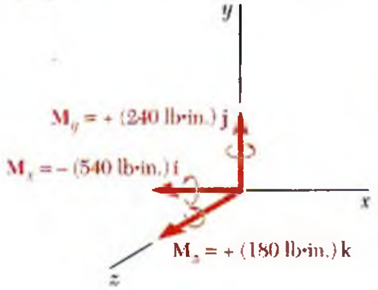
Determine las componentes del par simple que es equivalente a los dos pares mostrados.



SOLUCIÓN

Los cálculos se simplificarán si se fijan en A dos fuerzas de 20 lb iguales y opuestas. Esto permitirá reemplazar al par original de las fuerzas de 20 lb por dos nuevos pares originados por fuerzas de 20 lb, uno de los cuales se encuentra en el plano zx; el otro se encuentra en un plano paralelo al plano xy. Los tres pares mostrados en el croquis adjunto pueden ser representados por tres vectores de par $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$ y $\mathbf{M}_z$ dirigidos a lo largo de los ejes coordenados. Los momentos correspondientes son

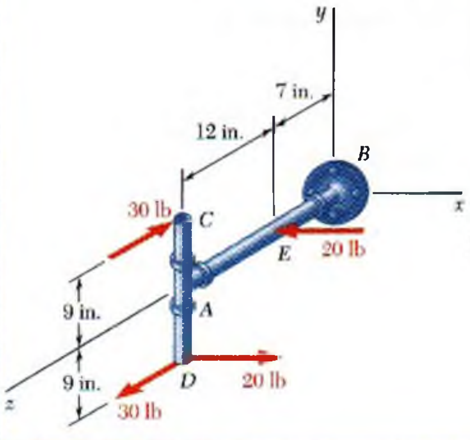
$$M_x = -(30 \text{ lb})(18 \text{ in.}) = -540 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$
$$M_y = +(20 \text{ lb})(12 \text{ in.}) = +240 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$
$$M_z = +(20 \text{ lb})(9 \text{ in.}) = +180 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$



Estos tres momentos representan las componentes del par simple **M**, equivalente a los pares dados. Así, se escribe

$$\mathbf{M} = -(540 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{i} + (240 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{j} + (180 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

Solución alternativa. Las componentes del par equivalente simple **M** también pueden ser determinadas calculando la suma de los momentos de las cuatro fuerzas dadas con respecto a un punto arbitrario. Si se elige al punto D, se escribe

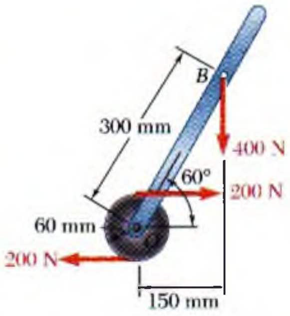


$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_D = (18 \text{ in.})\mathbf{j} \times (-30 \text{ lb})\mathbf{k} + [(9 \text{ in.})\mathbf{j} - (12 \text{ in.})\mathbf{k}] \times (-20 \text{ lb})\mathbf{i}$$

y después de calcular los diversos productos cruz se tiene

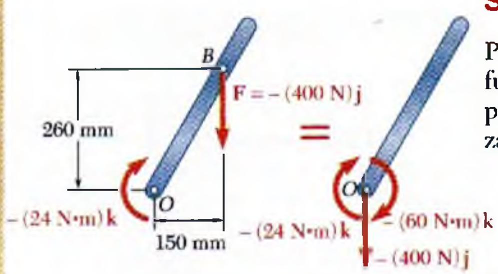
$$\mathbf{M} = -(540 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{i} + (240 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{j} + (180 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESUELTO 3.7



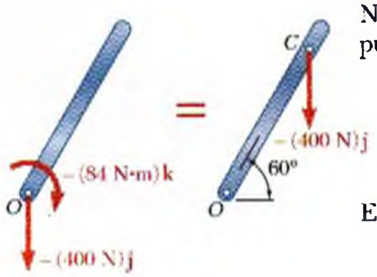
Reemplace el par y la fuerza mostrados en la figura por una sola fuerza equivalente aplicada a la palanca. Determine la distancia desde el eje hasta el punto de aplicación de esta fuerza equivalente.

SOLUCIÓN



Primero se reemplazan la fuerza y el par dados por un sistema equivalente fuerza-par en O. La fuerza $\mathbf{F} = -(400\ \text{N})\mathbf{j}$ se mueve a O y al mismo tiempo se agrega un momento $\mathbf{M}_O$ igual al momento con respecto a O, de la fuerza en su posición original.

$$\mathbf{M}_O = \overrightarrow{OB} \times \mathbf{F} = [(0.150\ \text{m})\mathbf{i} + (0.260\ \text{m})\mathbf{j}] \times (-400\ \text{N})\mathbf{j}$$
$$= -(60\ \text{N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$$

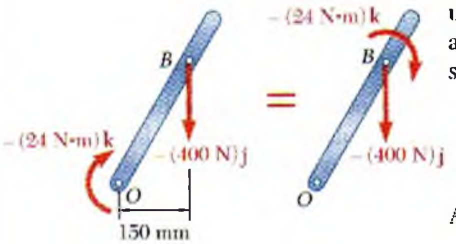


Este par se suma al par formado por las dos fuerzas de 200 N, cuyo momento es igual a $-(24\ \text{N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$ y se obtiene un par cuyo momento es igual a $-(84\ \text{N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$. Este último par puede ser eliminado aplicando la fuerza $\mathbf{F}$ en un punto C seleccionado de manera que

$$-(84\ \text{N} \cdot \text{m})\mathbf{k} = \overrightarrow{OC} \times \mathbf{F}$$
$$= [(OC) \cos 60°\mathbf{i} + (OC) \sin 60°\mathbf{j}] \times (-400\ \text{N})\mathbf{j}$$
$$= -(OC) \cos 60°(400\ \text{N})\mathbf{k}$$

Entonces, se concluye

$$(OC) \cos 60° = 0.210\ \text{m} = 210\ \text{mm} \qquad OC = 420\ \text{mm} \blacktriangleleft$$

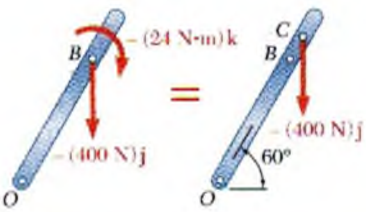


Solución alternativa. Como el efecto de un par no depende de su ubicación, el par cuyo momento es igual a $-(24\ \text{N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$ puede trasladarse a B; por tanto, se obtiene un sistema fuerza-par en B. Ahora el par puede ser eliminado aplicando la fuerza $\mathbf{F}$ en un punto C elegido de manera que

$$-(24\ \text{N} \cdot \text{m})\mathbf{k} = \overrightarrow{BC} \times \mathbf{F}$$
$$= -(BC) \cos 60°(400\ \text{N})\mathbf{k}$$

Así, se concluye que

$$(BC) \cos 60° = 0.060\ \text{m} = 60\ \text{mm} \qquad BC = 120\ \text{mm}$$
$$OC = OB + BC = 300\ \text{mm} + 120\ \text{mm} \qquad OC = 420\ \text{mm} \blacktriangleleft$$



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se estudiaron las propiedades de los *pares*. Para resolver los problemas que se presentan a continuación es necesario recordar que el efecto neto de un par consiste en producir un momento **M**. Como dicho momento es independiente del punto con respecto al cual se calcula, **M** es un *vector libre* y, por tanto, permanece inalterado a medida que se mueve de un punto a otro. Además, dos pares son *equivalentes* (esto es, ambos tienen el mismo efecto sobre un cuerpo rígido dado) si producen el mismo momento.

Al determinar el momento de un par, pueden aplicarse todas las técnicas vistas anteriormente para calcular momentos. Además, como el momento de un par es un vector libre, debe ser determinado empleando el punto que resulte más conveniente.

En virtud de que el único efecto de un par es producir un momento, es posible representar un par por medio de un vector, el *vector de par*, que es igual al momento del par. El vector de par es un vector libre y será representado por un símbolo especial, ↺ para distinguirlo de los vectores de fuerza.

Al resolver los problemas propuestos de esta lección se tendrán que llevar a cabo las siguientes operaciones:

1. ***Sumar dos o más pares.*** Esto resulta en un nuevo par cuyo momento se obtiene con la suma vectorial de los momentos de los pares dados [problema resuelto 3 6].

2. ***Reemplazar a una fuerza por un sistema equivalente fuerza-par en un punto especificado.*** Como se explicó en la sección 3.16, la fuerza del sistema fuerza-par es igual a la fuerza original, mientras que el vector de par requerido es igual al momento de la fuerza original con respecto al punto dado. Además, es importante señalar que la fuerza y el vector de par son perpendiculares entre sí. Por el contrario, se concluye que un sistema fuerza-par se puede reducir a una sola fuerza sólo si la fuerza y el vector de par son mutuamente perpendiculares (véase el siguiente párrafo).

3. ***Reemplazar un sistema fuerza-par (con F perpendicular a M) con una sola fuerza equivalente.*** Obsérvese que el requisito de que **F** y **M** sean mutuamente perpendiculares se cumplirá en todos los problemas bidimensionales. La fuerza equivalente única es igual a **F** y se aplica en forma tal que su momento con respecto al punto original de aplicación sea igual a **M** [problema resuelto 3.7].

Problemas

3.68 Una placa de acero está sometida a la acción de dos pares, según muestra la figura. Determine *a*) el momento del par formado por las dos fuerzas de 40 N, *b*) el valor de α si $d = 820$ mm, y la resultante de los dos pares es de 8 N · m en sentido contrario al de las manecillas del reloj, *c*) la distancia perpendicular entre las dos fuerzas de 24 N si la resultante de los dos pares es cero.

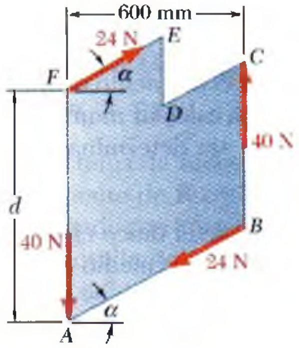


Figura P3.68

3.69 Una pieza de madera laminada en la que se están taladrando sucesivamente varios orificios se asegura a un banco de trabajo por medio de dos clavos. Si el taladro ejerce un par de 12 N · m sobre la pieza de madera, determine la magnitud de las fuerzas resultantes aplicadas a los clavos si éstos se encuentran *a*) en *A* y *B*, *b*) en *B* y *C*, *c*) en *A* y *C*.

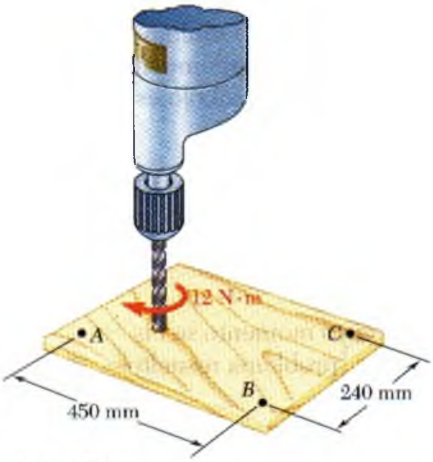


Figura P3.69

3.70 La placa de acero mostrada en la figura sostiene seis rodillos tensores de 2 in. de diámetro montados sobre la placa. Dos bandas planas pasan alrededor de los rodillos, de los cuales *A* y *D* se ajustan para que la tensión en cada banda sea de 10 lb. Determine *a*) el par resultante que actúa sobre la placa si $a = 8$ in., *b*) el valor de *a* para el cual el par resultante que actúa sobre la placa es de 480 lb · in. en el mismo sentido que las manecillas del reloj.

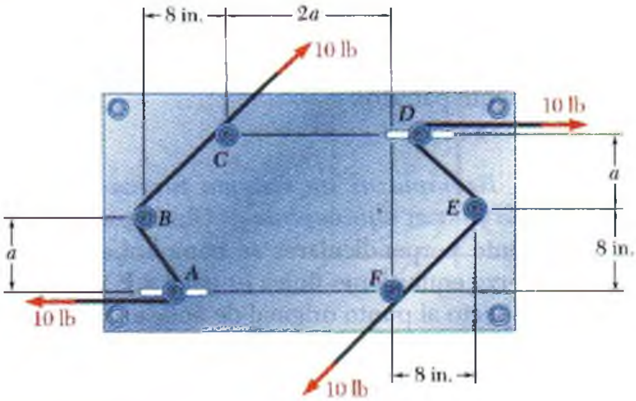


Figura P3.70

3.71 Dos clavijas de 2.4 in. de diámetro están montadas en A y C sobre una placa de acero, y dos barras están conectadas a la placa en B y D. Se pasa una cuerda alrededor de las clavijas y se jala como indica la figura, mientras que las barras ejercen fuerzas de 2.5 lb sobre la placa tal como se muestra. *a*) Determine el par resultante que actúa sobre la placa si $T = 9$ lb. *b*) Si únicamente se usa la cuerda, ¿en qué dirección debería jalarse para generar el mismo par con la mínima tensión? *c*) Determine el valor de esa tensión mínima.

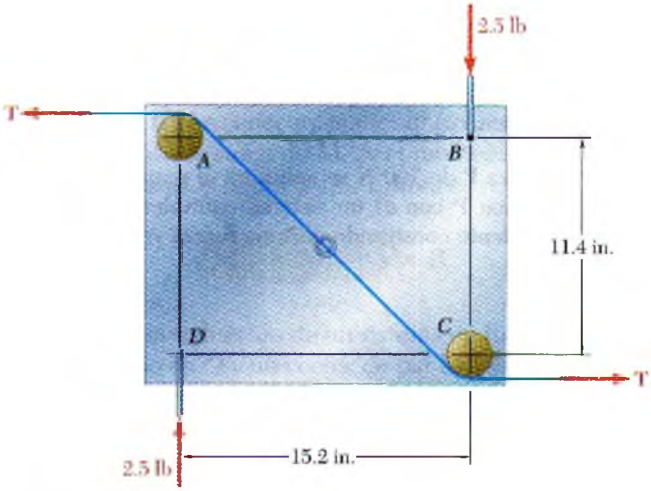


Figura P3.71

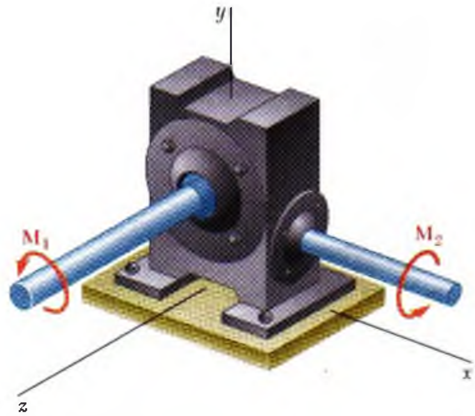


Figura P3.72

3.72 Los dos ejes de un reductor de velocidad están sometidos a la acción de los pares $M_1 = 18$ N · m y $M_2 = 7.5$ N · m, respectivamente. Reemplace ambos pares por un solo par equivalente y especifique su magnitud y la dirección de su eje.

***3.73* y 3.74** Si $P = 0$, reemplace los dos pares restantes por un solo par equivalente; especifique su magnitud y la dirección de su eje.

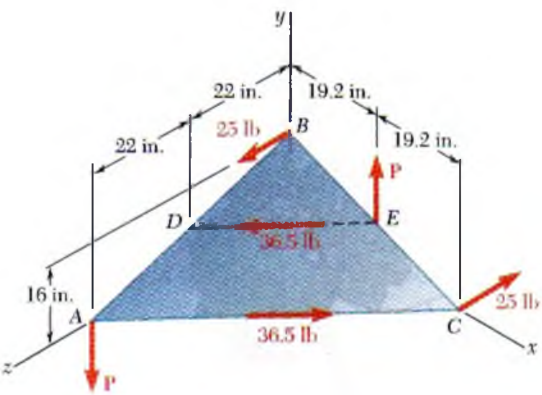


Figura *P3.73* y P3.76

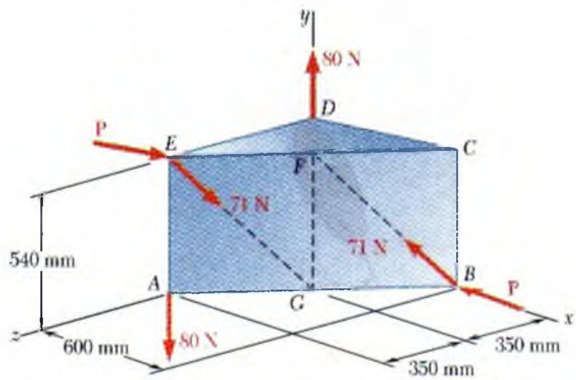


Figura P3.74 y P3.75

3.75 Si $P = 90$ N, reemplace los tres pares por un solo par equivalente; especifique su magnitud y la dirección de su eje.

3.76 Si $P = 52.5$ lb, reemplace los tres pares por un solo par equivalente; especifique su magnitud y la dirección de su eje.

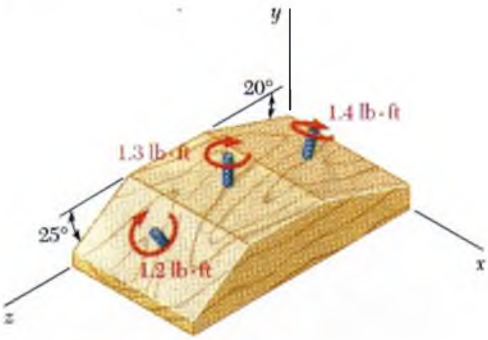


Figura *P3.77*

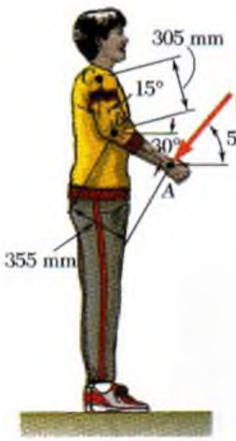


Figura *P3.78*

3.77 Durante un proceso de manufactura, se taladran simultáneamente tres agujeros en una pieza de trabajo. Si los agujeros son perpendiculares a la superficie de la pieza de trabajo, reemplace los pares aplicados a las brocas por un solo par equivalente; especifique su magnitud y la dirección de su eje.

3.78 Una fuerza **P** con magnitud de 160 N se aplica a la mano de un hombre como se muestra en la figura. Sustituya **P** con un sistema equivalente fuerza-par en *a*) el codo *B*, *b*) el hombro *C*.

3.79 Una fuerza vertical **P** de 135 N se aplica en *A* a la ménsula que se muestra en la figura, la cual se sostiene por medio de los tornillos colocados en *B* y *C*. *a*) Reemplace **P** con un sistema fuerza-par equivalente en *B*. *b*) Encuentre las dos fuerzas horizontales en *B* y *C* que son equivalentes al par obtenido en el inciso *a*).

3.80 Una fuerza **P** de 700 N se aplica en el punto *A* de un elemento estructural. Reemplace **P** con *a*) un sistema equivalente fuerza-par en *C*, *b*) un sistema equivalente constituido por una fuerza vertical en *B* y una segunda fuerza en *D*.

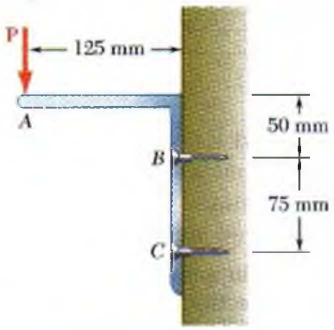


Figura P3.79

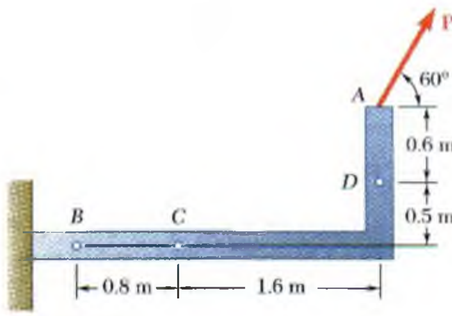


Figura *P3.80*

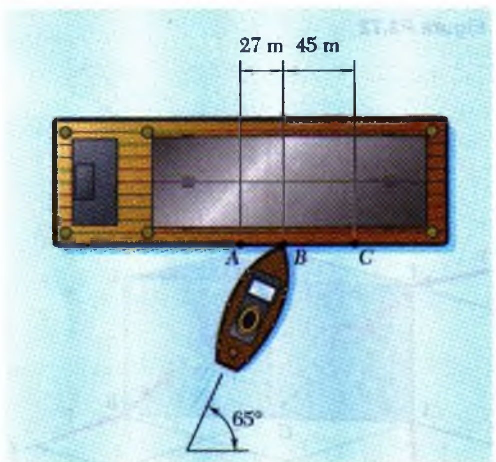


Figura P3.81

3.81 Un remolcador ejerce una fuerza de 2.8 kN a lo largo de su eje, en el punto *B*, sobre una barcaza. Reemplace la fuerza aplicada en *B* con un sistema equivalente formado por dos fuerzas paralelas aplicadas en *A* y *C*.

3.82 Un diseñador de jardines trata de colocar en posición vertical un árbol aplicando una fuerza de 54 lb, como indica la figura. Después, dos ayudantes intentan hacer lo mismo jalando, uno de ellos, en *B* y, el otro, empu-

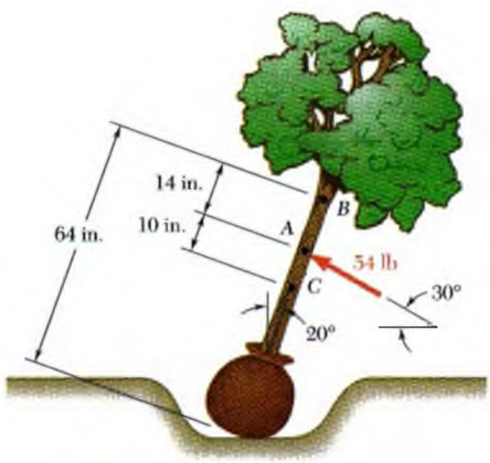


Figura P3.82

jando con una fuerza paralela en *C*. Determine estas dos fuerzas de tal forma que sean equivalentes a la fuerza única de 54 lb mostrada.

3.83 Un diseñador de jardines trata de colocar en posición vertical el árbol de la figura P3.82 al aplicar una fuerza de 54 lb. *a*) Reemplace esta fuerza con un sistema equivalente fuerza-par aplicado en *C*. *b*) Dos ayudantes intentan hacer lo mismo con el árbol, uno aplica una fuerza horizontal en *C* y el otro jala en *B*. Determine estas dos fuerzas si son equivalentes a la fuerza única del inciso *a*).

3.84 Una fuerza y un par se aplican a una viga. *a*) Reemplace este sistema con una sola fuerza **F** aplicada en el punto *G*, y determine la distancia *d*. *b*) Resuelva el inciso *a*) suponiendo que se intercambian las direcciones de las dos fuerzas de 150 lb.

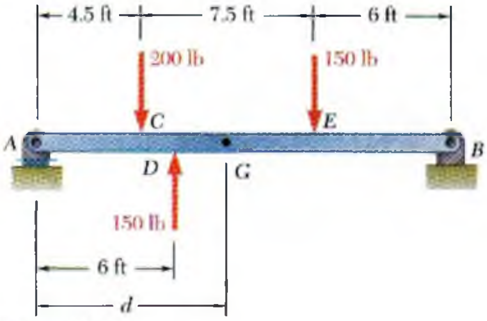


Figura P3.84

3.85 Tres trabajadores tratan de mover una caja de madera de 1 × 1 × 1.2 m aplicando las tres fuerzas horizontales que se muestran en la figura. *a*) Si $P = 240$ N, reemplace las tres fuerzas con un sistema fuerza-par equivalente en *A*. *b*) Reemplace el sistema fuerza-par del inciso *a*) por una sola fuerza, y determine el lugar del lado *AB* sobre el que debería aplicarse. *c*) Determine la magnitud de **P**, de tal forma que las tres fuerzas puedan reemplazarse por una sola fuerza aplicada en *B*.

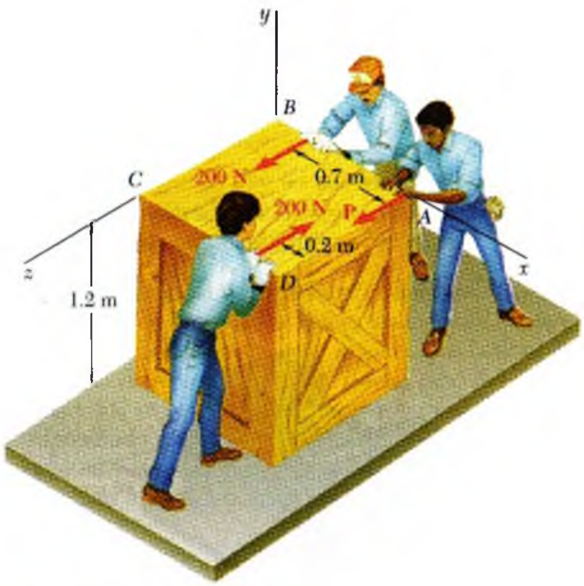


Figura *P3.85*

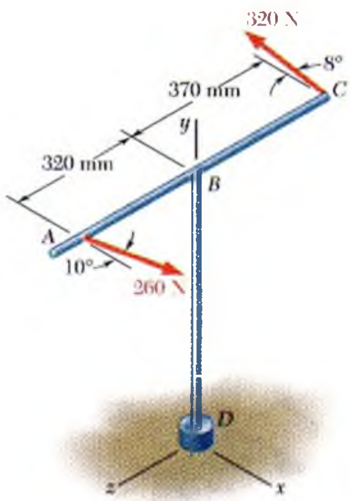


Figura P3.86

3.86 Para abrir una válvula de agua instalada en el suelo, dos trabajadores aplican las fuerzas horizontales indicadas en la figura sobre la manija de la válvula roscada. Muestre que estas fuerzas son equivalentes a una sola fuerza y especifique, si es posible, el punto de aplicación de dicha fuerza sobre la manija *ABC*.

3.87 Tres cables conectados a un disco ejercen sobre éste las fuerzas indicadas en la figura. *a*) Reemplace las tres fuerzas con un sistema fuerza-par equivalente en *A*. *b*) Determine la fuerza única que es equivalente al sistema fuerza-par obtenido en el inciso *a*), y especifique su punto de aplicación sobre la línea que pasa por los puntos *A* y *D*.

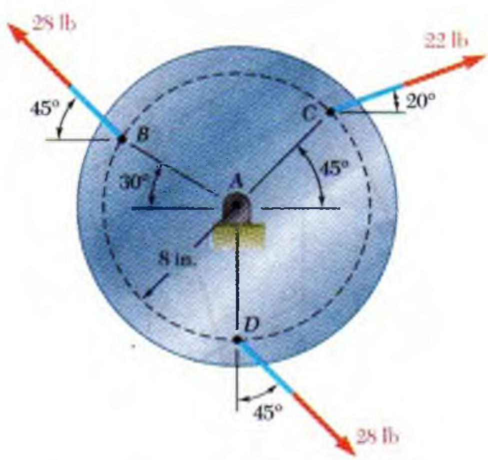


Figura P3.87

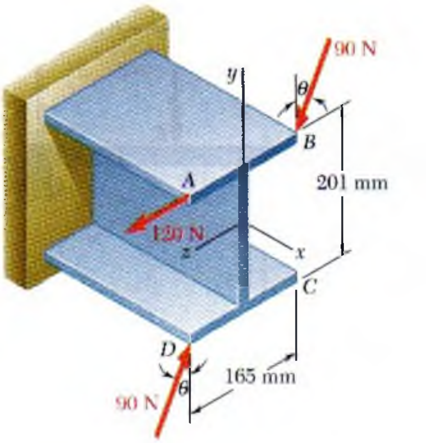


Figura P3.88

3.88 Una fuerza y un par que pertenecen al plano yz se aplican al extremo de una viga de patín ancho en voladizo. Este sistema debe reemplazarse por una sola fuerza equivalente. *a*) Para $\theta = 15°$, determine la magnitud y la línea de acción de la fuerza equivalente. *b*) Determine el valor de θ si la línea de acción de la fuerza equivalente debe intersecar a la línea que pasa por los puntos B y C a 40 mm por arriba de C.

3.89 Una placa trapezoidal está sometida a la fuerza **P** y al par que se muestran en la figura. Determine *a*) el punto de aplicación sobre la placa de la fuerza **F** mínima equivalente al sistema dado, *b*) la magnitud y la dirección de **F**.

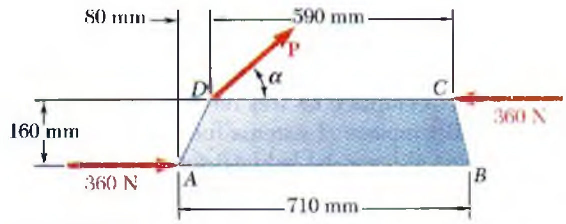


Figura *P3.89*

3.90 Una fuerza excéntrica y compresiva **P** de 250 kN se aplica al extremo de una columna. Reemplace **P** con un sistema fuerza-par equivalente en G.

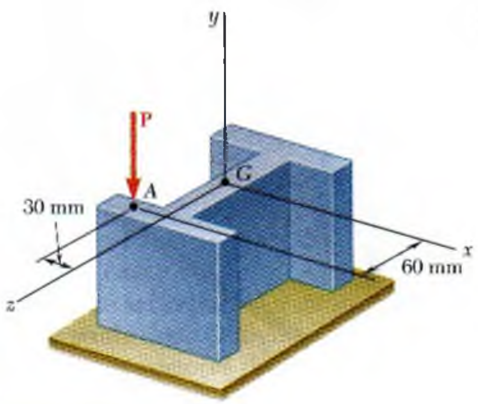


Figura P3.90

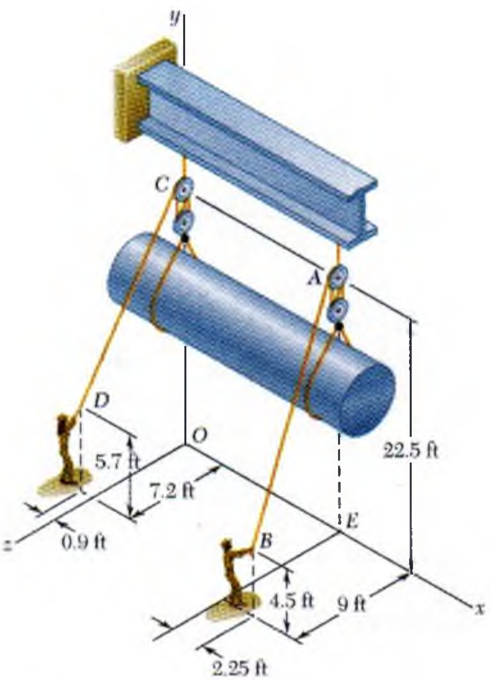


Figura P3.91 y *P3.92*

3.91 Dos trabajadores usan bloques y polipastos conectados a la parte inferior de una viga I para elevar un gran tanque cilíndrico. Si la tensión en la cuerda AB es de 54 lb, reemplace la fuerza ejercida en A por la cuerda AB con un sistema equivalente fuerza-par en E.

3.92 Dos trabajadores usan bloques y polipastos conectados a la parte inferior de una viga I para elevar un gran tanque cilíndrico. Si la tensión en la cuerda CD es de 61 lb, reemplace la fuerza ejercida en C por la cuerda CD con un sistema equivalente fuerza-par en O.

3.93 La grúa de brazo mostrada en la figura se orienta de manera que su aguilón AD sea paralelo al eje x y se utiliza para mover una caja pesada. Si la tensión en el cable AB es de 10.5 kN, reemplace la fuerza ejercida por el cable en A con un sistema equivalente fuerza-par en el centro O de la base de la grúa.

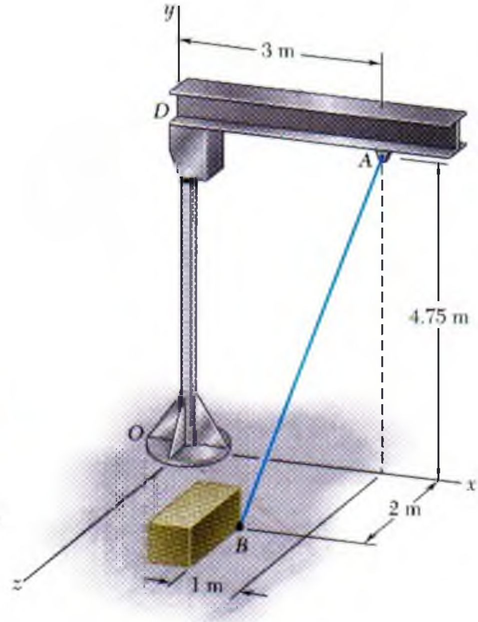


Figura P3.93

3.94 Un plomero aplica una fuerza de 220 N sobre el mango de una llave, mientras retira una conexión del extremo de un tubo. Si la llave y la fuerza pertenecen a un plano vertical paralelo al plano yz, reemplace la fuerza con un sistema equivalente fuerza-par en el origen del sistema coordenado.

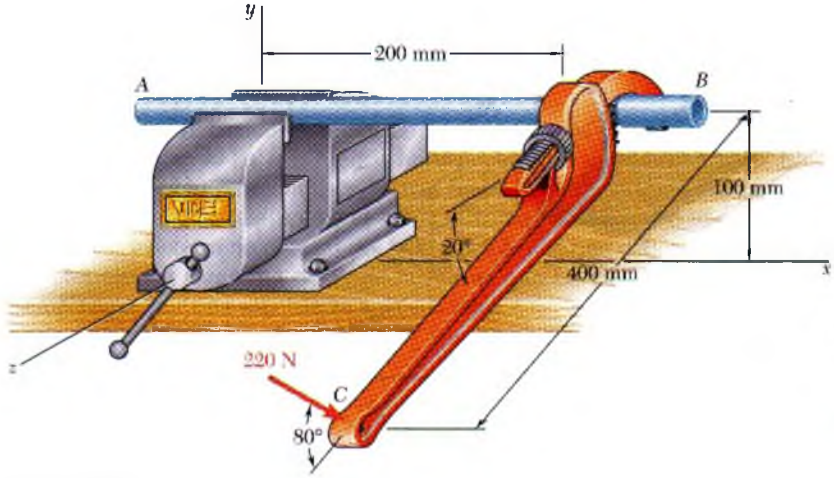


Figura P3.94

3.95 Una fuerza **F** de 63 lb y un par **M** de 560 lb · in. se aplican a la esquina A del bloque mostrado en la figura. Reemplace el sistema fuerza-par dado con un sistema equivalente fuerza-par en la esquina D.

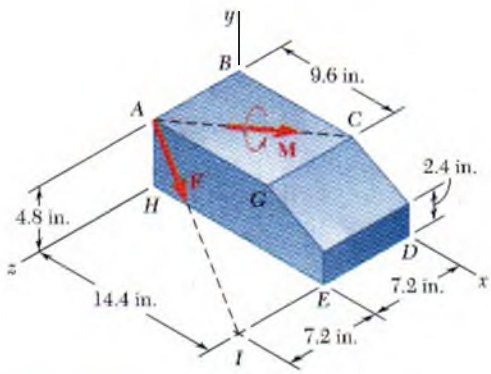


Figura P3.95

3.96 El pulidor manual de una rectificadora industrial en miniatura pesa 2.4 N y su centro de gravedad está localizado sobre el eje y. La cabeza del pulidor está desviada del plano xz de manera que la línea BC forma un ángulo de 25° con la dirección x. Muestre que el peso del pulidor manual y los dos pares $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ se pueden reemplazar con una sola fuerza equivalente. Además, suponiendo que $M_1 = 0.068$ N · m y $M_2 = 0.065$ N · m, determine *a*) la magnitud y la dirección de la fuerza equivalente, *b*) el punto donde su línea de acción interseca al plano xz.

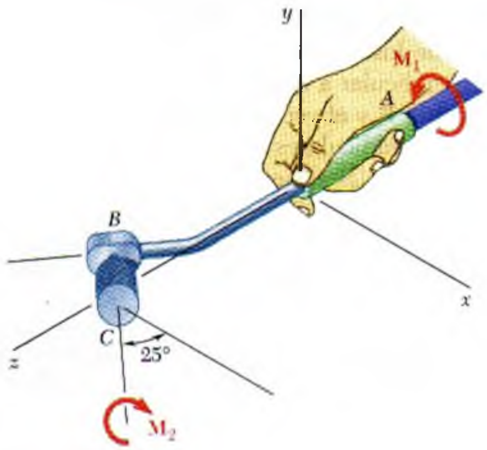


Figura P3.96

3.97 Una fuerza $\mathbf{F}_1$ de 20 lb y un par $\mathbf{M}_1$ de 40 lb · ft se aplican en la esquina E de la placa doblada que se muestra en la figura. Si $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{M}_1$ deben reemplazarse por un sistema equivalente fuerza-par ($\mathbf{F}_2$, $\mathbf{M}_2$) en la esquina B y si $(M_2)_z = 0$, determine: *a*) la distancia d y *b*) $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{M}_2$.

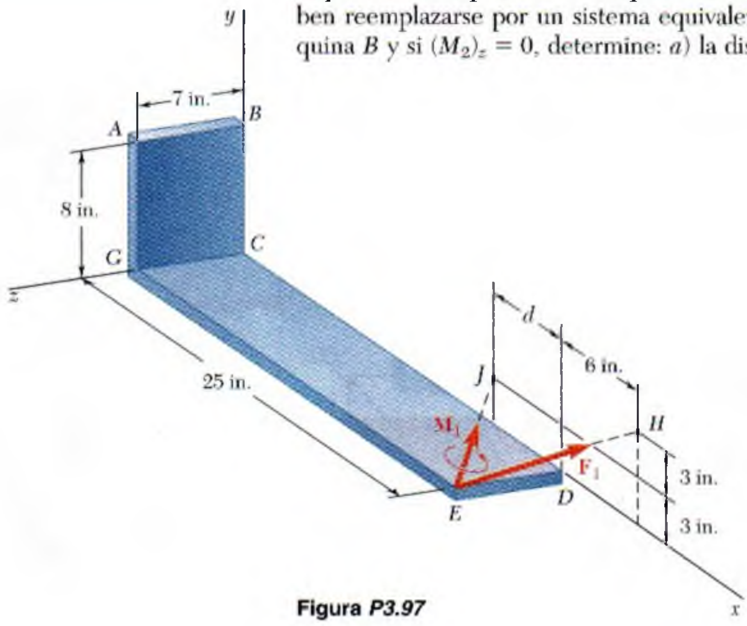


Figura P3.97

3.17. REDUCCIÓN DE UN SISTEMA DE FUERZAS A UNA FUERZA Y UN PAR

Considérese un sistema de fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, . . . que actúan sobre un cuerpo rígido en los puntos A_1, A_2, A_3, . . . *definidos por los vectores de posición* $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$, *etc.* (figura 3.41*a*). Como se vio en la sección anterior, $\mathbf{F}_1$ puede ser trasladada de A_1 a un punto dado O, si se agrega al sistema original de fuerzas un par de momento $\mathbf{M}_1$, igual al momento $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1$ de $\mathbf{F}_1$ con respecto a O. Si se repite este procedimiento con $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, . . . , se obtiene el sistema mostrado en la figura 3.41*b*, que consta de: las fuerzas originales, ahora actuando en O, y los vectores de par que han sido agregados. Como ahora las fuerzas son concurrentes, pueden ser sumadas vectorialmente y reemplazadas por su resultante $\mathbf{R}$. De manera similar, los vectores de par $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$, . . . pueden sumarse vectorialmente y ser reemplazados por un solo vector de par $\mathbf{M}_O^R$. Por tanto, cualquier sistema de fuerzas, sin importar qué tan complejo sea, puede ser reducido a un *sistema equivalente fuerza-par que actúa en un punto dado O* (figura 3.41*c*). Se debe observar que mientras cada uno de los vectores de par $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$, . . . , en la figura 3.41*b* es perpendicular a la fuerza que le corresponde, en general la fuerza resultante $\mathbf{R}$ y el vector de par resultante $\mathbf{M}_O^R$ en la figura 3.41*c* no serán perpendiculares entre sí.

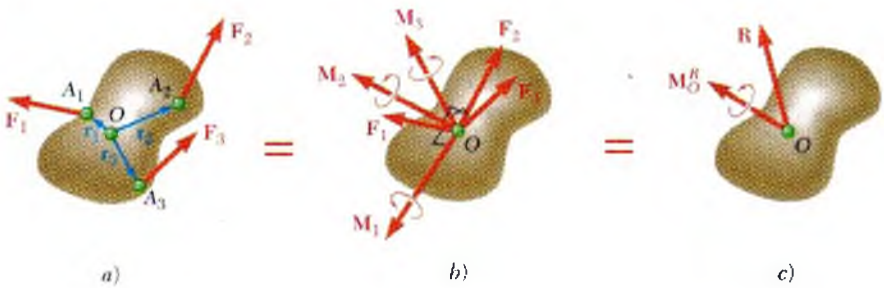


Figura 3.41

El sistema equivalente fuerza-par está definido por las ecuaciones

$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F} \qquad \mathbf{M}_O^R = \Sigma\mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \tag{3.52}$$

las cuales expresan que la fuerza **R** se obtiene sumando todas las fuerzas del sistema, mientras que el momento del vector de par resultante $\mathbf{M}_O^R$, denominado *momento resultante* del sistema, se obtiene sumando los momentos de todas las fuerzas del sistema con respecto a O.

Una vez que un sistema de fuerzas dado se ha reducido a una fuerza y un par que actúa en el punto O, dicho sistema puede reducirse a una fuerza y un par actuando en cualquier otro punto O'. Mientras que la fuerza resultante **R** permanecerá inalterada, el nuevo momento resultante $\mathbf{M}_{O'}^R$ será igual a la suma de $\mathbf{M}_O^R$ y el momento con respecto a O' de la fuerza **R** unida a O (figura 3.42). Entonces se tiene

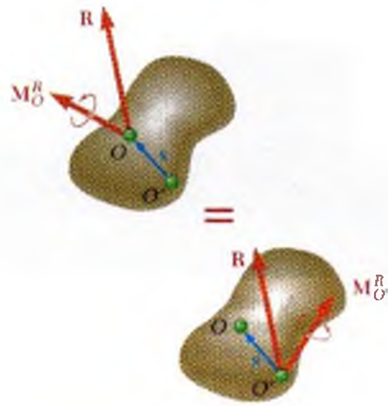


Figura 3.42

$$\mathbf{M}_{O'}^R = \mathbf{M}_O^R + \mathbf{s} \times \mathbf{R} \tag{3.53}$$

En la práctica, la reducción de un sistema de fuerzas dado a una sola fuerza **R** actuando en O y un vector de par $\mathbf{M}_O^R$ será llevada a cabo en términos de las componentes. Descomponiendo cada vector **r** y cada fuerza **F** del sistema en sus componentes rectangulares, se escribe

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{3.54}$$
$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \tag{3.55}$$

Al sustituir **r** y **F** en (3.52) y factorizar a los vectores unitarios **i**, **j** y **k**, se obtiene la siguiente expresión para **R** y $\mathbf{M}_O^R$:

$$\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k} \qquad \mathbf{M}_O^R = M_x^R\mathbf{i} + M_y^R\mathbf{j} + M_z^R\mathbf{k} \tag{3.56}$$

Las componentes R_x, R_y, R_z representan, respectivamente, las sumas de las componentes x, y y z de las fuerzas dadas y miden la tendencia del sistema a impartir al cuerpo rígido un movimiento de traslación en la dirección de x, y o z. Asimismo, las componentes M_x^R, M_y^R, M_z^R representan la suma de los momentos de las fuerzas dadas con respecto a, respectivamente, los ejes x, y y z y miden la tendencia del sistema a impartir al cuerpo rígido un movimiento de rotación alrededor de los ejes, x, y o z.

Si se desea conocer la magnitud y la dirección de la fuerza **R**, éstas se pueden obtener a partir de las componentes R_x, R_y y R_z por medio de las relaciones (2.18) y (2.19) de la sección 2.12; cálculos similares proporcionarán la magnitud y la dirección del vector de par $\mathbf{M}_O^R$.

3.18. SISTEMAS EQUIVALENTES DE FUERZAS

En la sección anterior se vio que cualquier sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo rígido puede reducirse a un sistema fuerza-par actuando en un punto dado O. Este sistema equivalente fuerza-par caracteriza completamente el efecto del sistema de fuerzas dado sobre el cuerpo rígido. *Por tanto, dos sistemas de fuerzas son equivalentes si pueden ser reducidos al mismo sistema fuerza-par en un punto dado* O. Recuérdese que el sistema fuerza par en O se define por medio de las relaciones (3.52), se establece que *dos sistemas de fuerzas* $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$,



Fotografía 3.3 Al analizar el movimiento del barco, las fuerzas ejercidas sobre éste por la cuerda de remolque y por el remolcador de la parte trasera se pueden reemplazar por un sistema equivalente fuerza-par.

$\mathbf{F}_3, \ldots,$ y $\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2, \mathbf{F}'_3, \ldots,$ *que actúan sobre el mismo cuerpo rígido son equivalentes si, y sólo si, respectivamente, las sumas de las fuerzas y las sumas de los momentos con respecto a un punto dado O de las fuerzas de los dos sistemas son iguales*. Expresadas en forma matemática, las condiciones necesarias y suficientes para que los dos sistemas de fuerzas sean equivalentes son las siguientes

$$\Sigma\mathbf{F} = \Sigma\mathbf{F}' \qquad \text{y} \qquad \Sigma\mathbf{M}_O = \Sigma\mathbf{M}'_O \tag{3.57}$$

Obsérvese que para demostrar que dos sistemas de fuerzas son equivalentes, la segunda de las relaciones (3.57) se debe establecer con respecto a *un solo punto* O. Sin embargo, ésta se cumplirá con respecto a *cualquier punto* si los dos sistemas de fuerzas son equivalentes.

Al descomponer las fuerzas y los momentos de (3.57) en sus elementos rectangulares, pueden expresarse las condiciones necesarias y suficientes para la equivalencia de dos sistemas de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lll} \Sigma F_x = \Sigma F'_x & \Sigma F_y = \Sigma F'_y & \Sigma F_z = \Sigma F'_z \\ \Sigma M_x = \Sigma M'_x & \Sigma M_y = \Sigma M'_y & \Sigma M_z = \Sigma M'_z \end{array} \tag{3.58}$$

Estas ecuaciones tienen una interpretación física simple; expresan que dos sistemas de fuerzas son equivalentes si tienden a impartirle al cuerpo rígido 1) la misma traslación en las direcciones de x, y y z y 2) la misma rotación alrededor de los ejes x, y y z respectivamente.

3.19. SISTEMAS EQUIPOLENTES DE VECTORES

Cuando dos sistemas de vectores satisfacen las ecuaciones (3.57) o (3.58), esto es, cuando respectivamente sus resultantes y sus momentos resultantes con respecto a un punto arbitrario O son iguales, se dice que los dos sistemas son *equipolentes*. Por tanto, el resultado que se acaba de establecer en la sección anterior se puede enunciar como sigue: *si dos sistemas de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido son equipolentes, entonces ambos también son equivalentes*.

Es importante señalar que este enunciado no se aplica a *cualquier* sistema de vectores. Considérese, por ejemplo, un sistema de fuerzas que actúan sobre un conjunto independiente de partículas que *no* forman un cuerpo rígido. Es posible que un sistema de fuerzas diferentes que actúan sobre las mismas partículas pueda ser equipolente al primero, esto es, que dicho sistema tenga la misma resultante y el mismo momento resultante. Sin embargo, como ahora actuarán diferentes fuerzas sobre cada una de las partículas, los efectos de dichas fuerzas sobre estas partículas serán diferentes; en un caso similar, aunque los dos sistemas de fuerzas sean equipolentes, *no* son *equivalentes*.

3.20. OTRAS REDUCCIONES DE UN SISTEMA DE FUERZAS

En la sección 3.17 se vio que cualquier sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo rígido puede ser reducido a un sistema equivalente fuerza-par en O, que consta de una fuerza $\mathbf{R}$ igual a la suma de fuer-

zas del sistema y de un vector de par $\mathbf{M}_O^R$ cuyo momento es igual al momento resultante del sistema.

Cuando $\mathbf{R} = 0$, el sistema fuerza-par se reduce a un vector de par $\mathbf{M}_O^R$. Entonces, el sistema de fuerzas dado puede ser reducido a un solo par, que recibe el nombre de ***par resultante*** del sistema.

A continuación se procede a investigar las condiciones necesarias para que un sistema dado de fuerzas pueda ser reducido a una sola fuerza. A partir de la sección 3.16 se concluye que un sistema fuerza-par en *O* puede ser reemplazado por una sola fuerza **R** que actúa a lo largo de una nueva línea de acción si **R** y $\mathbf{M}_O^R$ son mutuamente perpendiculares. Por tanto, los sistemas de fuerzas que pueden ser reducidos a una sola fuerza o ***resultante***, son aquellos sistemas para los cuales la fuerza **R** y el vector de par $\mathbf{M}_O^R$ son mutuamente perpendiculares. Aunque, ***en general***, esta condición ***no se cumplirá*** para sistemas de fuerzas en el espacio, ***sí se cumplirá*** para sistemas constituidos por 1) fuerzas concurrentes, 2) fuerzas coplanares o 3) fuerzas paralelas. Estos tres casos se estudiarán en forma separada.

1. Las *fuerzas concurrentes* están aplicadas en el mismo punto y, por tanto, pueden ser sumadas directamente para obtener su resultante **R**. Por consiguiente, éstas siempre se reducen a una sola fuerza. Las fuerzas concurrentes se analizan en detalle en el capítulo 2.
2. Las *fuerzas coplanares* actúan en el mismo plano, el cual se puede suponer que es el plano de la figura (figura 3.43*a*). La suma **R** de las fuerzas del sistema también estará en el plano de la figura, mientras que el momento de cada fuerza con respecto al *O* y, por consiguiente, el momento resultante $\mathbf{M}_O^R$, serán perpendiculares a dicho plano. De esta forma, el sistema fuerza-par en *O* está constituido por una fuerza **R** y por un vector de par $\mathbf{M}_O^R$ que son mutuamente perpendiculares (figura 3.43*b*).[†] Estas fuerzas pueden reducirse a una sola fuerza **R**, moviendo **R** en el plano de la figura hasta que su momento con respecto a *O* sea igual a $\mathbf{M}_O^R$. La distancia desde *O* hasta la línea de acción de **R** es $d = M_O^R/R$ (figura 3.43*c*).



Fotografía 3.4 Las fuerzas coplanares ejercidas por los cuatro remolcadores sobre el barco estadounidense *Pasadena* podrían reemplazarse con una sola fuerza equivalente ejercida por un remolcador.

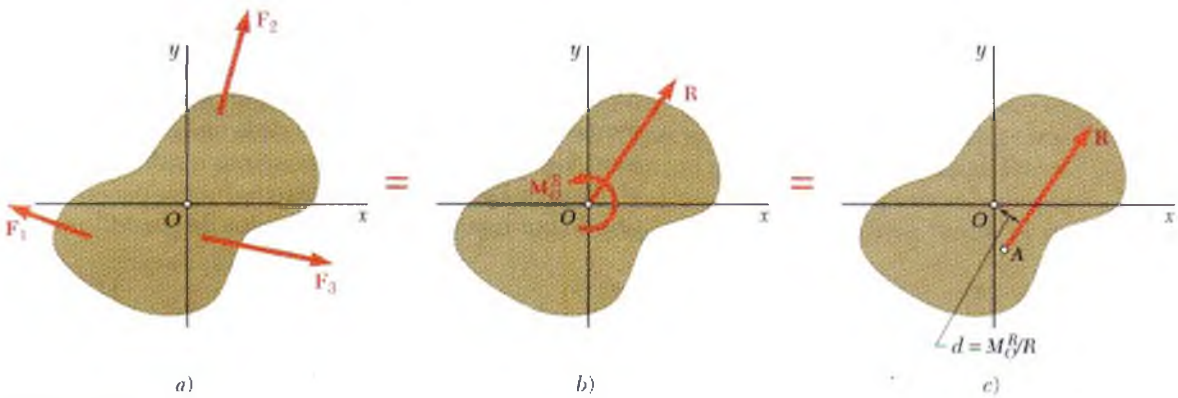


Figura 3.43

[†]Como el vector $\mathbf{M}_O^R$ es perpendicular al plano de la figura, éste se ha representado por el símbolo ↺. Un par con sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj ↺ representa a un vector que apunta hacia fuera del plano de papel y un par con el sentido de las manecillas del reloj ↻ representa a un vector que apunta hacia adentro del plano de papel.

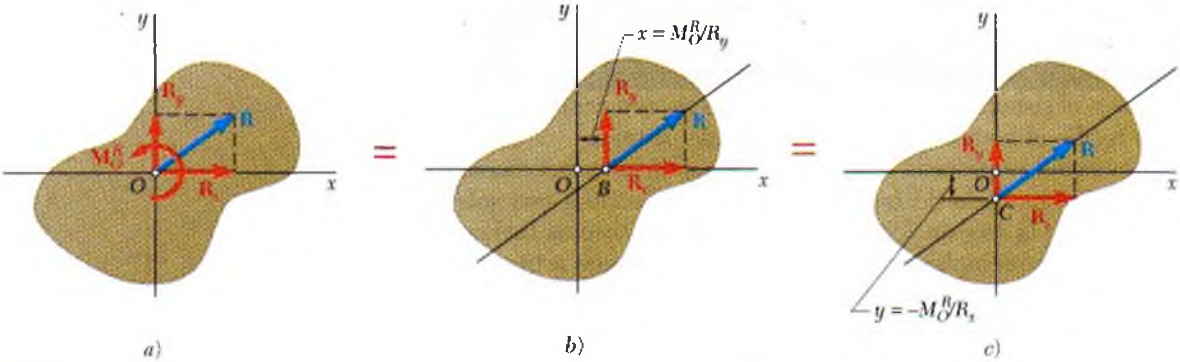


Figura 3.44

Como se señaló en la sección 3.17, la reducción de un sistema de fuerzas se simplifica considerablemente si las fuerzas se descomponen en sus componentes rectangulares. De esta manera, el sistema fuerza-par en O está caracterizado por las componentes (figura 3.44*a*).

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad M_z^R = M_O^R = \Sigma M_O \qquad (3.59)$$

Para reducir el sistema de fuerzas a una sola fuerza **R**, se expresa que el momento de **R** con respecto a O debe ser igual a $\mathbf{M}_O^R$. Representando con x y y las coordenadas del punto de aplicación de la resultante y teniendo en cuenta la fórmula (3.22) de la sección 3.8, se escribe

$$xR_y - yR_x = M_O^R$$

la cual representa la ecuación de la línea de acción de **R**. También pueden determinarse en forma directa las intersecciones con el eje x y con el eje y de la línea de acción de la resultante, se observa que $\mathbf{M}_O^R$ debe ser igual al momento con respecto a O de la componente y de **R** cuando **R** está unida a B (figura 3.44*b*) e igual también al momento de la componente x cuando **R** está unida a C (figura 3.44*c*).

3. Las *fuerzas paralelas* tienen líneas de acción paralelas y pueden o no tener el mismo sentido. Suponga que las fuerzas son paralelas al eje y (figura 3.45*a*), se observa que su suma **R** también será paralela al eje y. Por otra parte, como el momento de una fuerza dada debe ser perpendicular a dicha fuerza, el momento con respecto a O de cada una de las fuerzas del sistema y, por consiguiente, el momento resultante $\mathbf{M}_O^R$ estará en el plano zx. De esta forma el sistema fuerza-par en O está constituido por una fuerza **R** y un vector de par $\mathbf{M}_O^R$ mutuamente

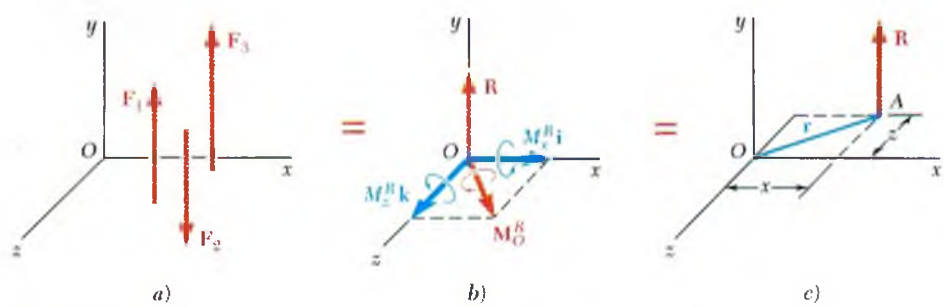


Figura 3.45

perpendiculares (figura 3.45*b*). Estas fuerzas se pueden reducir a una sola fuerza **R** (figura 3.45*c*) o, si $\mathbf{R} = 0$, a un solo par cuyo momento sea igual a $\mathbf{M}_O^R$.

En la práctica, el sistema fuerza-par en O está caracterizado por las componentes

$$R_y = \Sigma F_y \qquad M_x^R = \Sigma M_x \qquad M_z^R = \Sigma M_z \tag{3.60}$$

La reducción del sistema a una sola fuerza puede efectuarse moviendo **R** a un nuevo punto de aplicación $A(x, 0, z)$ seleccionado de manera que el momento de **R** con respecto a O sea igual a $\mathbf{M}_O^R$, el cual se escribe

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R$$
$$(x\mathbf{i} + z\mathbf{k}) \times R_y\mathbf{j} = M_x^R\mathbf{i} + M_z^R\mathbf{k}$$

Al calcular los productos vectoriales e igualar los coeficientes de los vectores unitarios correspondientes en ambos miembros de la ecuación se obtienen dos ecuaciones escalares que definen las coordenadas de A:

$$-zR_y = M_x^R \qquad xR_y = M_z^R$$

Estas ecuaciones expresan que los momentos de **R** con respecto a los ejes x y z deben ser iguales a M_x^R y M_z^R, respectivamente.



Fotografía 3.5 Las fuerzas paralelas del viento que actúan sobre los señalamientos de la carretera, pueden reducirse a una sola fuerza equivalente. La determinación de esta fuerza puede simplificar el cálculo de las fuerzas que actúan sobre los soportes del marco que sostiene los señalamientos.

*3.21. REDUCCIÓN DE UN SISTEMA DE FUERZAS A UNA LLAVE DE TORSIÓN O TORSOR

En el caso general de un sistema de fuerzas en el espacio, el sistema equivalente fuerza-par en O consta de una fuerza **R** y un vector de par $\mathbf{M}_O^R$, ambos distintos de cero, que no son perpendiculares entre sí (figura 3.46*a*). Por tanto, el sistema de fuerzas *no puede* ser reducido a una sola fuerza o a un solo par. Sin embargo, el vector de par puede ser reemplazado por otros dos vectores de par obtenidos al descomponer $\mathbf{M}_O^R$ en una componente $\mathbf{M}_1$ a lo largo de **R** y una componente $\mathbf{M}_2$ en un plano perpendicular a **R** (figura 3.46*b*). Entonces, el vector de par $\mathbf{M}_2$ y la fuerza **R** pueden reemplazarse por una sola fuerza **R** que actúa a lo largo de una nueva línea de acción. Por tanto, el sistema original de fuerzas se reduce a **R** y al par vector $\mathbf{M}_1$ (figura 3.46*c*), de esta forma, el sistema se reduce a **R** y un par que actúa en el plano perpendicular a **R**. A este sistema fuerza-par, en particular, se le conoce como *llave de torsión* debido a que la combinación resultante de empuje y torsión es la misma que se encuentra en las operaciones de per-

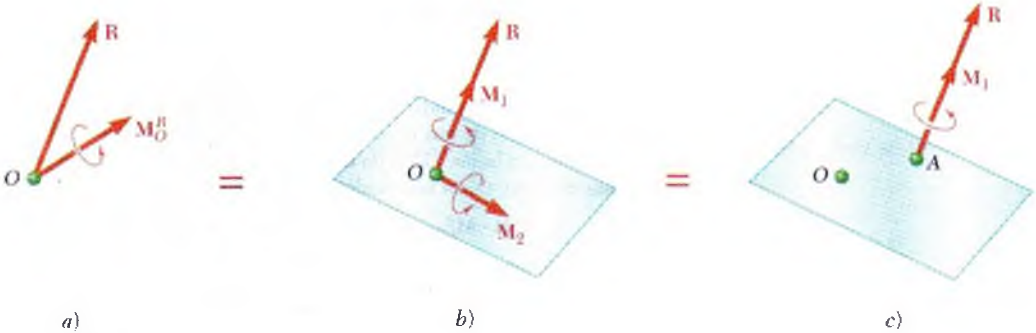


Figura 3.46

foración y enroscado, así como en apretar o aflojar tornillos. A la línea de acción de **R** se le conoce como *eje de la llave de torsión* y a la razón $p = M_1/R$ se le denomina *paso* de la llave de torsión. Por consiguiente, una llave de torsión está constituida por dos vectores colineales, específicamente, una fuerza **R** y un vector de par

$$\mathbf{M}_1 = p\mathbf{R} \tag{3.61}$$

Recuerde la expresión (3.35), obtenida en la sección 3.9 para la proyección de un vector sobre la línea de acción de otro vector, se observa que la proyección de $\mathbf{M}_O^R$ sobre la línea de acción de **R** es igual a

$$M_1 = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R}$$

Por tanto, el paso de una llave de torsión puede ser expresado como[†]

$$p = \frac{M_1}{R} = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R^2} \tag{3.62}$$



Fotografía 3.6 La acción de empujar y girar, asociadas con la operación de apretar un tornillo ilustra las líneas de acción colineales de la fuerza y el vector de par que constituyen una llave de torsión o torsor.

Para definir el eje de una llave de torsión se puede escribir una relación que involucre al vector de posición **r** de un punto arbitrario P localizado sobre dicho eje. Fijando la fuerza resultante **R** y el vector de par $\mathbf{M}_1$ en P (figura 3.47) y expresando que el momento con respecto a O de este sistema fuerza-par, es igual al momento resultante $\mathbf{M}_O^R$ del sistema original de fuerzas, se escribe

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R \tag{3.63}$$

o, de acuerdo con la ecuación (3.61),

$$p\mathbf{R} + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R \tag{3.64}$$

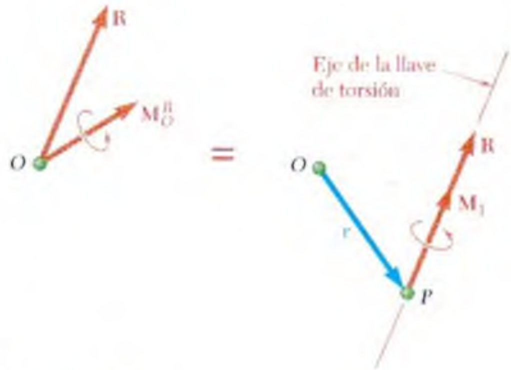


Figura 3.47

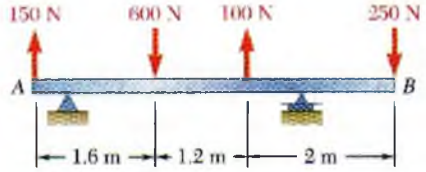
[†]Las expresiones obtenidas para la proyección del vector de par sobre la línea de acción de **R** y para el paso de una llave de torsión son independientes de la selección del punto O. Utilizando la relación (3.53) de la sección 3.17, se observa que si se hubiera empleado un punto diferente O', el numerador en (3.62) hubiera sido

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_{O'}^R = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{M}_O^R + \mathbf{s} \times \mathbf{R}) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R + \mathbf{R} \cdot (\mathbf{s} \times \mathbf{R})$$

Como el triple producto escalar $\mathbf{R} \cdot (\mathbf{s} \times \mathbf{R})$ es igual a cero, se tiene que

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_{O'}^R = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R$$

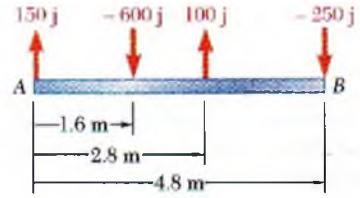
Por tanto, el producto escalar $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R$ es independiente de la selección del punto O.



PROBLEMA RESUELTO 3.8

Una viga de 4.80 m de longitud está sujeta a las fuerzas mostradas en la figura. Redúzcase el sistema de fuerzas dado a: *a*) un sistema equivalente fuerza-par en *A*, *b*) un sistema equivalente fuerza-par en *B* y *c*) una sola fuerza o resultante.

Nota: Como las reacciones en los apoyos no están incluidas en el sistema de fuerzas dado, el sistema no mantendrá la viga en equilibrio.





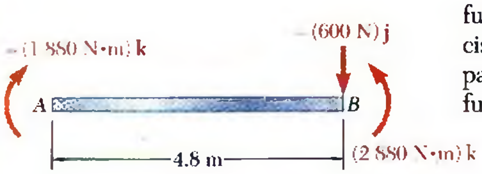
SOLUCIÓN

***a*) Sistema fuerza-par en *A*.** El sistema fuerza-par en *A* equivalente al sistema de fuerzas dado consta de una fuerza **R** y de un par $\mathbf{M}_A^R$ definidos como sigue:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R} &= \Sigma\mathbf{F} \\
&= (150\text{ N})\mathbf{j} - (600\text{ N})\mathbf{j} + (100\text{ N})\mathbf{j} - (250\text{ N})\mathbf{j} = -(600\text{ N})\mathbf{j} \\
\mathbf{M}_A^R &= \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \\
&= (1.6\mathbf{i}) \times (-600\mathbf{j}) + (2.8\mathbf{i}) \times (100\mathbf{j}) + (4.8\mathbf{i}) \times (-250\mathbf{j}) \\
&= -(1\,880\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

Por tanto, el sistema equivalente fuerza-par en *A* está dado por

$$\mathbf{R} = 600\text{ N}\downarrow \qquad \mathbf{M}_A^R = 1\,880\text{ N}\cdot\text{m} \circlearrowright \quad ◀$$



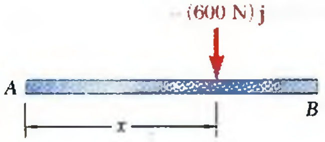


***b*) Sistema fuerza-par en *B*.** Se pretende encontrar un sistema fuerza par en *B* equivalente al sistema fuerza-par en *A* determinado en el inciso *a*). La fuerza **R** permanece inalterada, pero se debe determinar un nuevo par $\mathbf{M}_B^R$ cuyo momento sea igual al momento con respecto a *B* del sistema fuerza-par encontrado en el inciso *a*). Por tanto, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}_B^R &= \mathbf{M}_A^R + \overrightarrow{BA} \times \mathbf{R} \\
&= -(1\,880\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} + (-4.8\text{ m})\mathbf{i} \times (-600\text{ N})\mathbf{j} \\
&= -(1\,880\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} + (2\,880\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} = +(1\,000\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

De esta forma, el sistema fuerza-par en *B* está dado por

$$\mathbf{R} = 600\text{ N}\downarrow \qquad \mathbf{M}_B^R = 1\,000\text{ N}\cdot\text{m} \circlearrowleft \quad ◀$$

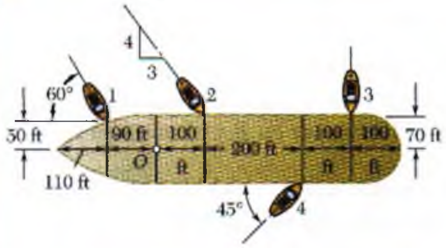


***c*) Fuerza única o resultante.** La resultante del sistema de fuerzas dado es igual a **R** y su punto de aplicación debe ser tal que el momento de **R** con respecto a *A* sea igual a $\mathbf{M}_A^R$. El cual se escribe

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} \times \mathbf{R} &= \mathbf{M}_A^R \\
x\mathbf{i} \times (-600\text{ N})\mathbf{j} &= -(1\,880\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} \\
-x(600\text{ N})\mathbf{k} &= -(1\,880\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

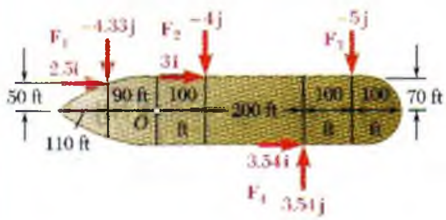
y se concluye que $x = 3.13$ m. Por tanto, la fuerza única equivalente al sistema dado está definida como

$$\mathbf{R} = 600\text{ N}\downarrow \qquad x = 3.13\text{ m} \quad ◀$$



PROBLEMA RESUELTO 3.9

Se usan cuatro remolcadores para llevar a un trasatlántico a su muelle. Cada remolcador ejerce una fuerza de 5 000 lb en la dirección mostrada en la figura. Determine: *a*) el sistema equivalente fuerza-par en el mástil mayor *O* y *b*) el punto sobre el casco donde un solo remolcador más potente debería empujar al barco para producir el mismo efecto que los cuatro remolcadores originales.

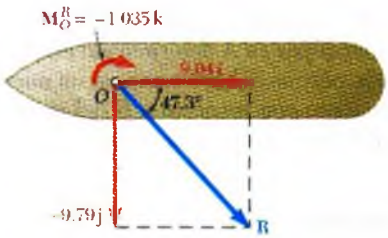


SOLUCIÓN

***a*) Sistema fuerza-par en *O*.** Cada una de las fuerzas se descompone en sus componentes en el diagrama mostrado (las unidades empleadas son kips). El sistema fuerza-par en *O* equivalente al sistema de fuerzas dado consta de una fuerza $\mathbf{R}$ y de un par $\mathbf{M}_O^R$ definidos como sigue:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R} &= \Sigma\mathbf{F} \\
&= (2.50\mathbf{i} - 4.33\mathbf{j}) + (3.00\mathbf{i} - 4.00\mathbf{j}) + (-5.00\mathbf{j}) + (3.54\mathbf{i} + 3.54\mathbf{j}) \\
&= 9.04\mathbf{i} - 9.79\mathbf{j}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}_O^R &= \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \\
&= (-90\mathbf{i} + 50\mathbf{j}) \times (2.50\mathbf{i} - 4.33\mathbf{j}) \\
&\quad + (100\mathbf{i} + 70\mathbf{j}) \times (3.00\mathbf{i} - 4.00\mathbf{j}) \\
&\quad + (400\mathbf{i} + 70\mathbf{j}) \times (-5.00\mathbf{j}) \\
&\quad + (300\mathbf{i} - 70\mathbf{j}) \times (3.54\mathbf{i} + 3.54\mathbf{j}) \\
&= (390 - 125 - 400 - 210 - 2\,000 + 1\,062 + 248)\mathbf{k} \\
&= -1\,035\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

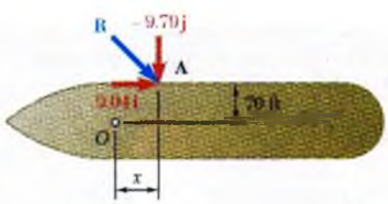


Por tanto, el sistema equivalente fuerza-par en *O* está dado por

$$\mathbf{R} = (9.04 \text{ kips})\mathbf{i} - (9.79 \text{ kips})\mathbf{j} \qquad \mathbf{M}_O^R = -(1\,035 \text{ kips} \cdot \text{ft})\mathbf{k}$$

o $\qquad \mathbf{R} = 13.33 \text{ kips} \measuredangle 47.3° \qquad \mathbf{M}_O^R = 1\,035 \text{ kips} \cdot \text{ft} \circlearrowright$ ◀

Comentario. Como todas las fuerzas están contenidas en el plano de la figura, podría haberse anticipado que la suma de sus momentos iba a ser perpendicular a dicho plano. Obsérvese que el momento de la componente de cada fuerza pudo obtenerse directamente a partir del diagrama mostrado que forma, primero, el producto de la magnitud de dicha componente con una distancia perpendicular hasta *O* y luego le asigna a este producto un signo positivo o negativo según el sentido del momento.

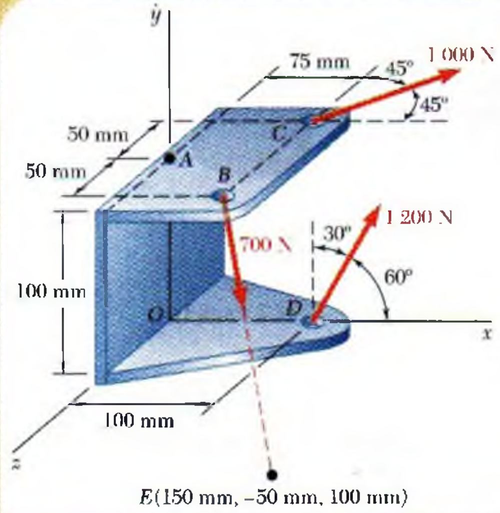


***b*) Remolcador único.** La fuerza ejercida por un solo remolcador debe ser igual a $\mathbf{R}$ y su punto de aplicación *A* debe ser tal que el momento de $\mathbf{R}$ con respecto a *O* sea igual a $\mathbf{M}_O^R$. Si se observa que el vector de posición de *A* es

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + 70\mathbf{j}$$

se escribe

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} \times \mathbf{R} &= \mathbf{M}_O^R \\
(x\mathbf{i} + 70\mathbf{j}) \times (9.04\mathbf{i} - 9.79\mathbf{j}) &= -1\,035\mathbf{k} \\
-x(9.79)\mathbf{k} - 633\mathbf{k} &= -1\,035\mathbf{k} \qquad x = 41.1 \text{ ft} \blacktriangleleft
\end{aligned}
$$



PROBLEMA RESUELTO 3.10

Tres cables están unidos a una ménsula, como se muestra en la figura. Reemplace las fuerzas que ejercen los cables por un sistema equivalente fuerza-par en A.

SOLUCIÓN

Primero se determinan los vectores de posición relativa trazados desde el punto A hasta los puntos de aplicación de cada una de las fuerzas y se descomponen las fuerzas en sus componentes rectangulares. Observe que $\mathbf{F}_B = (700\text{ N})\boldsymbol{\lambda}_{BE}$, donde

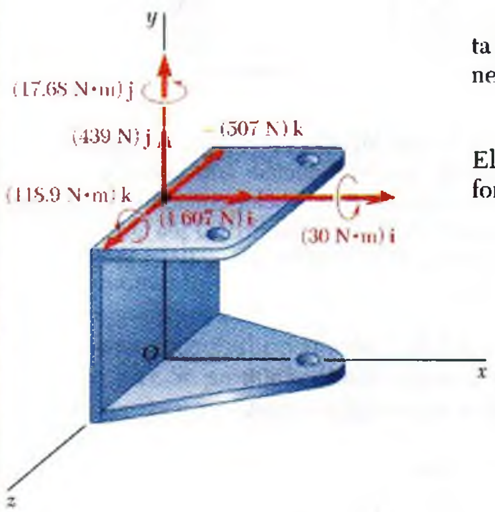
$$\boldsymbol{\lambda}_{BE} = \frac{\overrightarrow{BE}}{BE} = \frac{75\mathbf{i} - 150\mathbf{j} + 50\mathbf{k}}{175}$$

Con el uso de metros y newtons se tiene

$$\mathbf{r}_{B/A} = \overrightarrow{AB} = 0.075\mathbf{i} + 0.050\mathbf{k} \qquad \mathbf{F}_B = 300\mathbf{i} - 600\mathbf{j} + 200\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_{C/A} = \overrightarrow{AC} = 0.075\mathbf{i} - 0.050\mathbf{k} \qquad \mathbf{F}_C = 707\mathbf{i} - 707\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_{D/A} = \overrightarrow{AD} = 0.100\mathbf{i} - 0.100\mathbf{j} \qquad \mathbf{F}_D = 600\mathbf{i} + 1\ 039\mathbf{j}$$

El sistema fuerza-par en A, equivalente al sistema de fuerzas dado, consta de una fuerza $\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F}$ y de un par $\mathbf{M}_A^R = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$. La fuerza $\mathbf{R}$ se obtiene fácil al sumar, respectivamente, las componentes x, y y z de las fuerzas:

$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F} = (1\ 607\text{ N})\mathbf{i} + (439\text{ N})\mathbf{j} - (507\text{ N})\mathbf{k} \quad ◀$$



El cálculo de $\mathbf{M}_A^R$ se simplifica si los momentos de las fuerzas se expresan en forma de determinantes (sección 3.8):

$$\mathbf{r}_{B/A} \times \mathbf{F}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.075 & 0 & 0.050 \\ 300 & -600 & 200 \end{vmatrix} = 30\mathbf{i} \qquad -45\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F}_C = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.075 & 0 & -0.050 \\ 707 & 0 & -707 \end{vmatrix} = \qquad 17.68\mathbf{j}$$

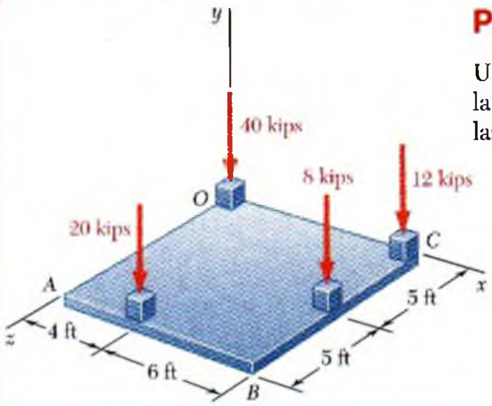
$$\mathbf{r}_{D/A} \times \mathbf{F}_D = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.100 & -0.100 & 0 \\ 600 & 1\ 039 & 0 \end{vmatrix} = \qquad 163.9\mathbf{k}$$

Con la suma de las expresiones obtenidas, se tiene

$$\mathbf{M}_A^R = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = (30\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{i} + (17.68\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{j} + (118.9\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} \quad ◀$$

Las componentes rectangulares de la fuerza $\mathbf{R}$ y del par $\mathbf{M}_A^R$ se muestran en el croquis adjunto.

PROBLEMA RESUELTO 3.11

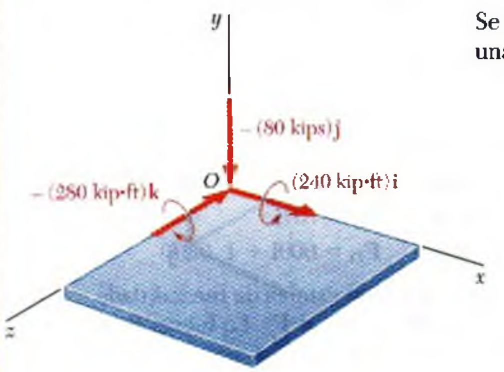


Una losa de cimentación cuadrada soporta las cuatro columnas mostradas en la figura. Determine la magnitud y el punto de aplicación de la resultante de las cuatro cargas.

SOLUCIÓN

Primero, el sistema de fuerzas se reduce a un sistema fuerza-par en el origen del sistema de coordenadas O. Este sistema fuerza-par consta de una fuerza $\mathbf{R}$ y un vector de par $\mathbf{M}_O^R$ que se definen de la siguiente forma:

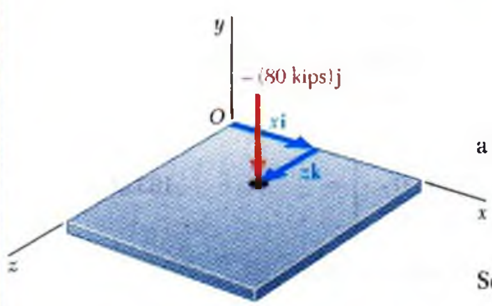
$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F} \qquad \mathbf{M}_O^R = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$



Se determinan los vectores de posición de los puntos de aplicación de cada una de las fuerzas y los cálculos se arreglan en forma tabular.

r, ft	F, kips	r × F, kip · ft
0	$-40\mathbf{j}$	0
$10\mathbf{i}$	$-12\mathbf{j}$	$-120\mathbf{k}$
$10\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$	$-8\mathbf{j}$	$40\mathbf{i} - 80\mathbf{k}$
$4\mathbf{i} + 10\mathbf{k}$	$-20\mathbf{j}$	$200\mathbf{i} - 80\mathbf{k}$
	$\mathbf{R} = -80\mathbf{j}$	$\mathbf{M}_O^R = 240\mathbf{i} - 280\mathbf{k}$

Como la fuerza $\mathbf{R}$ y el vector de par $\mathbf{M}_O^R$ son mutuamente perpendiculares, el sistema fuerza-par obtenido puede reducirse aún más a una sola fuerza $\mathbf{R}$. El nuevo punto de aplicación de $\mathbf{R}$ será seleccionado en el plano de la losa de manera que el momento de $\mathbf{R}$ con respecto a O sea igual a $\mathbf{M}_O^R$. Si se representa con $\mathbf{r}$ al vector de posición del punto de aplicación deseado y con x y z a sus coordenadas, se escribe



$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R$$
$$(x\mathbf{i} + z\mathbf{k}) \times (-80\mathbf{j}) = 240\mathbf{i} - 280\mathbf{k}$$
$$-80x\mathbf{k} + 80z\mathbf{i} = 240\mathbf{i} - 280\mathbf{k}$$

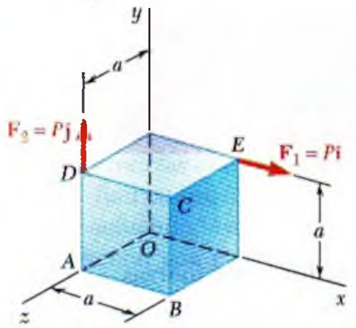
a partir de lo escrito, se encuentra que

$$-80x = -280 \qquad 80z = 240$$
$$x = 3.50 \text{ ft} \qquad z = 3.00 \text{ ft}$$

Se concluye que la resultante del sistema de fuerzas dado es igual a

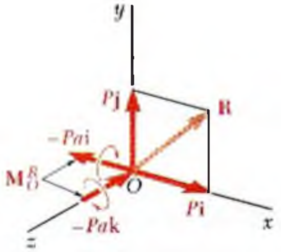
$\mathbf{R} = 80 \text{ kips}\downarrow$ en $x = 3.50$ ft, $z = 3.00$ ft ◀

PROBLEMA RESUELTO 3.12

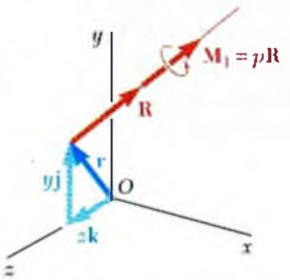


Dos fuerzas de la misma longitud P actúan sobre un cubo con aristas de igual longitud, como se muestra en la figura. Reemplace las dos fuerzas por una llave de torsión equivalente y determine: *a*) la magnitud y dirección de la fuerza resultante **R**, *b*) el paso de la llave de torsión y *c*) el punto donde el eje de la llave de torsión interseca al plano yz.

SOLUCIÓN



=



Sistema equivalente fuerza-par en O. Primero se determina el sistema equivalente fuerza-par en el origen O. Se observa que los vectores de posición de los puntos de aplicación E y D de las dos fuerzas dadas son: $\mathbf{r}_E = a\mathbf{i} + a\mathbf{j}$ y $\mathbf{r}_D = a\mathbf{j} + a\mathbf{k}$. La resultante **R** de las dos fuerzas y el momento resultante $\mathbf{M}_O^R$ de dichas fuerzas con respecto a O están dados por

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = P\mathbf{i} + P\mathbf{j} = P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \qquad (1)$$

$$\mathbf{M}_O^R = \mathbf{r}_E \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_D \times \mathbf{F}_2 = (a\mathbf{i} + a\mathbf{j}) \times P\mathbf{i} + (a\mathbf{j} + a\mathbf{k}) \times P\mathbf{j}$$
$$= -Pa\mathbf{k} - Pa\mathbf{i} = -Pa(\mathbf{i} + \mathbf{k}) \qquad (2)$$

***a*) Fuerza resultante R.** A partir de la ecuación (1) y del croquis adjunto se concluye que la fuerza resultante **R** tiene una magnitud $R = P\sqrt{2}$, se encuentra en el plano xy y forma ángulos de 45° con los ejes x y y. Por tanto,

$$R = P\sqrt{2} \qquad \theta_x = \theta_y = 45° \qquad \theta_z = 90° \quad ◀$$

***b*) Paso de la llave de torsión.** De acuerdo con la fórmula (3.62) de la sección 3.21 y las ecuaciones (1) y (2) que se acaban de presentar, se escribe

$$p = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R^2} = \frac{P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot (-Pa)(\mathbf{i} + \mathbf{k})}{(P\sqrt{2})^2} = \frac{-P^2a(1 + 0 + 0)}{2P^2} \qquad p = -\frac{a}{2} \quad ◀$$

***c*) Eje de la llave de torsión.** A partir de los resultados anteriores y de la ecuación (3.61), se concluye que la llave de torsión consta de la fuerza **R** encontrada en (1) y del vector de par

$$\mathbf{M}_1 = p\mathbf{R} = -\frac{a}{2}P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = -\frac{Pa}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \qquad (3)$$

Para determinar el punto donde el eje de la llave de torsión interseca al plano yz, se expresa que el momento de la llave de torsión con respecto a O es igual al momento resultante $\mathbf{M}_O^R$ del sistema original:

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R$$

o, al notar que $\mathbf{r} = y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y sustituir **R**, $\mathbf{M}_O^R$ y $\mathbf{M}_1$ a partir de las ecuaciones (1), (2) y (3),

$$-\frac{Pa}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) + (y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \times P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = -Pa(\mathbf{i} + \mathbf{k})$$

$$-\frac{Pa}{2}\mathbf{i} - \frac{Pa}{2}\mathbf{j} - Py\mathbf{k} + Pz\mathbf{j} - Pz\mathbf{i} = -Pa\mathbf{i} - Pa\mathbf{k}$$

Si se igualan los coeficientes de **k** y, después, los coeficientes de **j**, se encuentra que

$$y = a \qquad z = a/2 \quad ◀$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Esta lección estuvo dedicada a la reducción y simplificación de sistemas de fuerzas. Al momento de resolver los problemas propuestos, se pide que se lleven a cabo las operaciones que se describen a continuación.

1. Reducción de un sistema de fuerzas dado a una fuerza y un par que actúan en un punto dado A. La fuerza **R** es la *resultante* del sistema y se obtiene sumando las fuerzas que lo constituyen; el momento del par es el *momento resultante* del sistema y se obtiene sumando los momentos con respecto a *A* de las fuerzas que lo constituyen. Así, se tiene que

$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F} \qquad \mathbf{M}_A^R = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

donde el vector de posición **r** se traza desde *A* hasta *cualquier punto* a lo largo de la línea de acción de **F**.

2. Traslación de un sistema fuerza-par desde un punto A hasta un punto B. Si después de que se había reducido a un sistema fuerza-par en el punto *A* se desea reducir un sistema de fuerzas dado a un sistema fuerza-par en el punto *B*, no se necesita llevar a cabo el cálculo de los momentos de las fuerzas con respecto a *B*. La resultante **R** permanece inalterada y el nuevo momento resultante $\mathbf{M}_B^R$ se puede obtener sumándole a $\mathbf{M}_A^R$ el momento con respecto a *B* de la fuerza **R** aplicada en *A* [problema resuelto 3.8]. Si se representa con **s** el vector trazado desde *B* hasta *A*, se puede escribir

$$\mathbf{M}_B^R = \mathbf{M}_A^R + \mathbf{s} \times \mathbf{R}$$

3. Verificación de que dos sistemas de fuerzas sean equivalentes o no. Primero se reduce cada sistema de fuerzas a un sistema fuerza-par *en el mismo punto arbitrario A* (como se explicó en el párrafo 1). Los dos sistemas son equivalentes (esto es, tienen el mismo efecto sobre el cuerpo rígido en consideración) si los dos sistemas fuerza-par que se obtuvieron son idénticos, esto es, si

$$\Sigma\mathbf{F} = \Sigma\mathbf{F}' \qquad \text{y} \qquad \Sigma\mathbf{M}_A = \Sigma\mathbf{M}'_A$$

Se debe reconocer que si no se cumple la primera de estas ecuaciones, esto es, si los dos sistemas no tienen la misma resultante **R**, estos sistemas no pueden ser equivalentes y, por tanto, no hay necesidad de verificar si se cumple o no la segunda ecuación.

4. Reducción de un sistema de fuerzas dado a una sola fuerza. Primero se reduce el sistema de fuerzas dado a un sistema fuerza-par en un punto conveniente *A* donde dicho sistema consta de la resultante **R** y del vector de par $\mathbf{M}_A^R$ (esto se lleva a cabo como se explicó en el punto 1). Se recordará, de la lección anterior, que es posible reducir aún más el sistema a una sola fuerza *sólo si la fuerza* **R** *y el*

vector de par $\mathbf{M}_A^R$ *son mutuamente perpendiculares*. Con toda seguridad, éste será el caso para sistemas de fuerzas constituidos por fuerzas que son *concurrentes*, *coplanares* o *paralelas*. En este sentido, la fuerza única que se desea encontrar puede obtenerse del mismo modo que se hizo en varios problemas de la lección anterior, moviendo **R** hasta que su momento con respecto a A sea igual a $\mathbf{M}_A^R$. Con más formalidad se puede escribir que el vector de posición **r** trazado desde A hasta cualquier punto a lo largo de la línea de acción de **R** debe satisfacer la ecuación

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_A^R$$

Este procedimiento fue utilizado en los problemas resueltos 3.8, 3.9 y 3.11.

5. *Reducción de un sistema de fuerzas dado a una llave de torsión.* Si el sistema de fuerzas dado está constituido por fuerzas que son concurrentes, coplanares o paralelas, el sistema equivalente fuerza-par en un punto A consistirá de una fuerza **R** y de un vector de par $\mathbf{M}_A^R$ que, en general, *no van a ser mutuamente perpendiculares*. (Para verificar si **R** y $\mathbf{M}_A^R$ son mutuamente perpendiculares, se forma su producto escalar. Si este producto es igual a cero, entonces los vectores en cuestión son mutuamente perpendiculares; de lo contrario, no son perpendiculares entre sí.) Si **R** y $\mathbf{M}_A^R$ son mutuamente perpendiculares, el sistema fuerza-par (por tanto, el sistema de fuerzas dado) *no se puede reducir a una sola fuerza*. Sin embargo, el sistema se puede reducir a una llave de torsión —la combinación de una fuerza **R** y un vector de par $\mathbf{M}_1$ que están dirigidos a lo largo de una línea de acción común que se conoce como el *eje de la llave de torsión* (figura 3.47)—. El cociente $p = M_1/R$ recibe el nombre de *paso* de la llave de torsión.

Para reducir un sistema de fuerzas dado a una llave de torsión, se deben seguir los siguientes pasos:

a) Reducir el sistema de fuerzas dado a un sistema equivalente fuerza-par $(\mathbf{R}, \mathbf{M}_O^R)$, localizado, comúnmente, en el origen O.

b) Determinar el paso p a partir de la ecuación (3.62)

$$p = \frac{M_1}{R} = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R^2} \qquad (3.62)$$

y el vector de par a partir de $\mathbf{M}_1 = p\mathbf{R}$.

c) Expresar que el momento con respecto a O de la llave de torsión es igual al momento resultante $\mathbf{M}_O^R$ del sistema fuerza-par en O:

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R \qquad (3.63)$$

Esta ecuación permite determinar el punto donde la línea de acción de la llave de torsión interseca un plano especificado puesto que el vector de posición **r** está dirigido desde O hasta dicho punto.

Estos pasos se muestran en el problema resuelto 3.12. Aunque pueda parecer difícil la determinación de una llave de torsión y del punto donde su eje interseca a un plano, el proceso es simplemente la aplicación de varias de las ideas y técnicas que han sido desarrolladas en este capítulo. Por tanto, una vez que se ha dominado completamente todo lo relacionado con la llave de torsión, se puede confiar en que se ha comprendido una buena parte del capítulo 3.

Problemas

3.98 Una viga de 5 m de longitud se somete a cierta diversidad de cargas. *a*) Reemplace cada tipo de carga con un sistema equivalente fuerza-par en el extremo *B* de la viga. *b*) ¿Cuáles de las cargas mostradas son equivalentes?

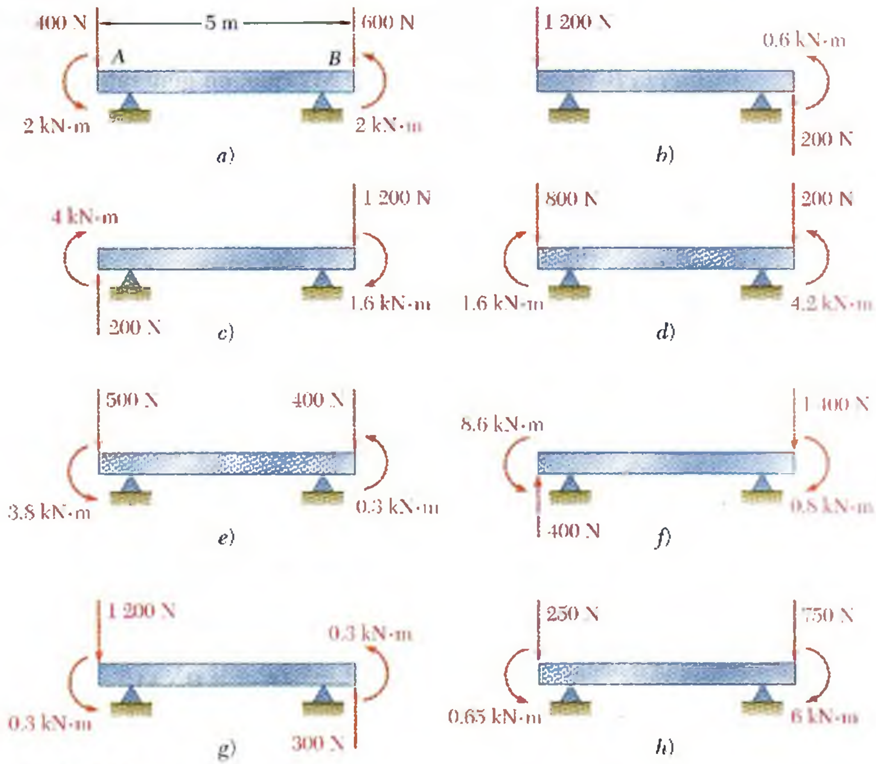


Figura P3.98

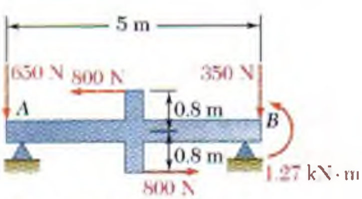


Figura P3.99

3.99 Una viga de 5 m de longitud se carga de la forma indicada en la figura. Determine qué carga del problema 3.98 es equivalente a esta carga.

3.100 Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, determine la fuerza única equivalente y la distancia desde el extremo *A* hasta su línea de acción. Considere *a*) $\mathbf{F}_B = 200$ N ↓, $M_B = 100$ N · m, *b*) $\mathbf{F}_B = 100$ N ↑, $M_B = -600$ N · m, *c*) $\mathbf{F}_B = 100$ N ↓, $M_B = -200$ N · m.

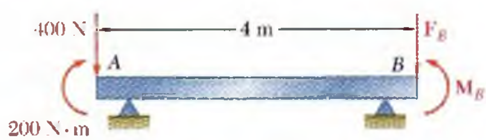


Figura P3.100

3.101 Cinco sistemas fuerza-par diferentes actúan en las esquinas del bloque de metal moldeado de la forma que muestra la figura. Determine cuál de estos sistemas es equivalente a la fuerza $\mathbf{F} = (2 \text{ lb})\mathbf{j}$ y al par de momento $\mathbf{M} = (48 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{i} + (32 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{k}$ ubicado en el punto A.

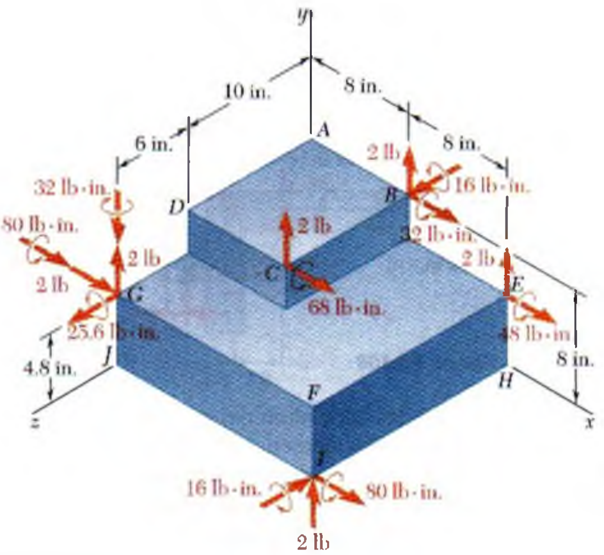


Figura P3.101

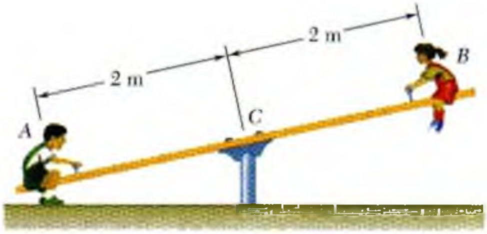


Figura P3.102

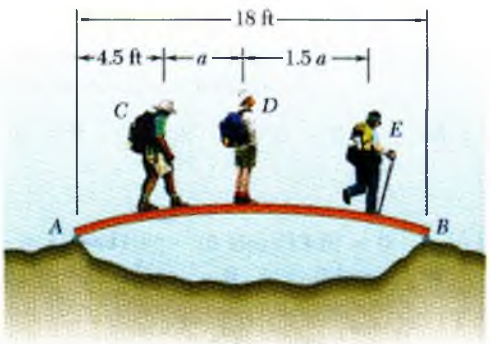


Figura P3.103

3.102 Las masas de dos niños sentados en los extremos A y B de un balancín son de 38 y 29 kg, respectivamente. Determine dónde debe sentarse un tercer niño si la resultante de las fuerzas de los pesos de los tres niños debe pasar por C, y si la masa de la niña es de *a*) 27 kg, *b*) 24 kg.

3.103 La figura muestra a tres excursionistas cruzando un puente. Si sus pesos en los puntos C, D y E son de 200, 175 y 135 lb, respectivamente, determine *a*) la distancia horizontal desde A hasta la línea de acción de la resultante de los tres pesos si $a = 3.3$ ft, *b*) el valor de a cuando las cargas sobre los soportes del puente en A y B son iguales.

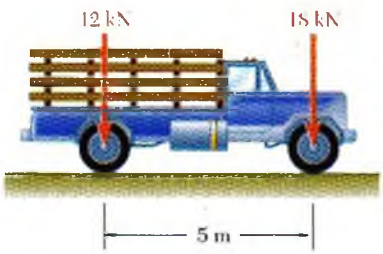


Figura P3.104

3.104 Al conducir un camión sobre una báscula, se determinó que las cargas sobre los ejes delantero y trasero eran de 18 y 12 kN, respectivamente, cuando el camión se encontraba vacío. Determine el peso y la ubicación de la carga más pesada que puede transportar el camión si la carga sobre cada eje no debe sobrepasar de 40 kN.

3.105 El arreglo $ABCD$ se utiliza para aplicar fuerzas a modelos fotoelásticos de componentes mecánicos. Para el modelo y las fuerzas que se muestran en la figura, considere que $\alpha = 50°$ y determine *a*) la resultante de las fuerzas aplicadas, *b*) el punto donde la línea de acción de la resultante interseca una línea que pasa por los puntos F y G.

3.106 El arreglo $ABCD$ se utiliza para aplicar fuerzas a modelos fotoelásticos de componentes mecánicos. Para el modelo y las fuerzas que se muestran en la figura, *a*) determine el valor de α para que la línea de acción de la resultante de las fuerzas aplicadas pase a través del modelo, 100 mm a la derecha de la fuerza de 40 N; *b*) encuentre la resultante de las fuerzas aplicadas.

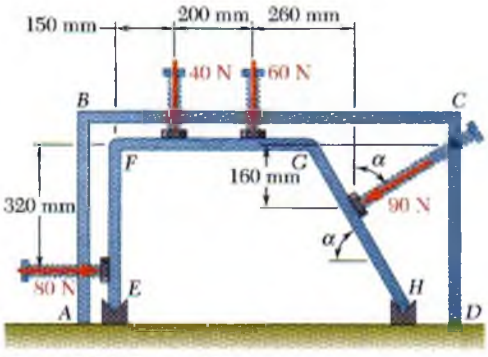


Figura P3.105 y P3.106

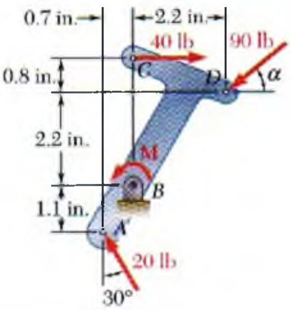


Figura P3.107

3.107 Cuando el par **M** se aplica al eslabón de un mecanismo, las fuerzas resultantes ejercidas sobre el eslabón por una guía y las conexiones son como se muestran en la figura. Determine *a*) los valores de **M** y α de manera que las fuerzas y el par aplicados puedan reducirse a una sola fuerza equivalente cuya línea de acción pase por los puntos *B* y *D*, *b*) la fuerza equivalente.

3.108 Las tres fuerzas y el par que se muestran en la figura se aplican a una ménsula angular. *a*) Encuentre la resultante de este sistema de fuerzas. *b*) Localice los puntos donde la línea de acción de la resultante interseca las líneas *AB* y *BC*.

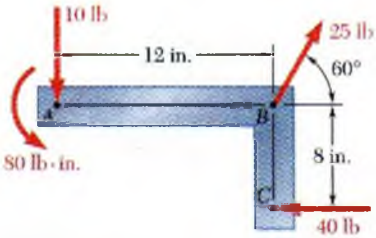


Figura *P3.108*

3.109 En una pieza delgada de aluminio se perforan simultáneamente cuatro orificios, las perforaciones ejercen sobre la hoja las fuerzas que se muestran en la figura. Si las fuerzas son perpendiculares a las superficies de la pieza, determine *a*) la resultante de las fuerzas aplicadas cuando $\alpha = 45°$ y el punto de intersección de la línea de acción de dicha resultante con la línea que pasa por los puntos *A* y *B*; *b*) el valor de α si la línea de acción de la resultante debe pasar por el doblez *EF*.

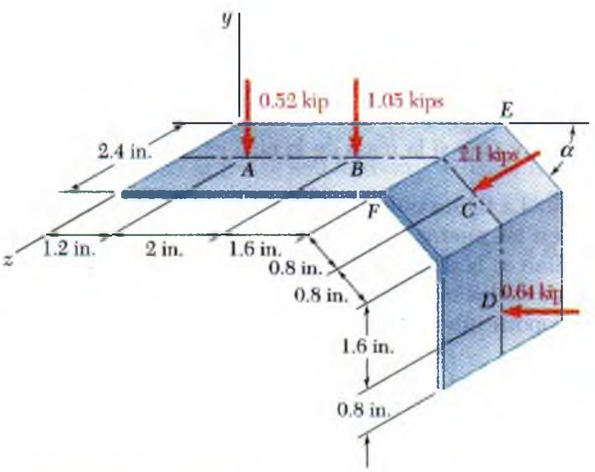


Figura P3.109 y *P3.110*

3.110 En una pieza delgada de aluminio se perforan simultáneamente cuatro orificios, las perforaciones ejercen sobre la hoja las fuerzas que se muestran en la figura. Si las fuerzas son perpendiculares a las superficies de la pieza, determine *a*) el valor de α si la resultante de las fuerzas aplicadas es paralela a la fuerza de 2.1 kips, *b*) la correspondiente resultante de las fuerzas aplicadas y el punto de intersección de su línea de acción con la línea que une a los puntos *A* y *B*.

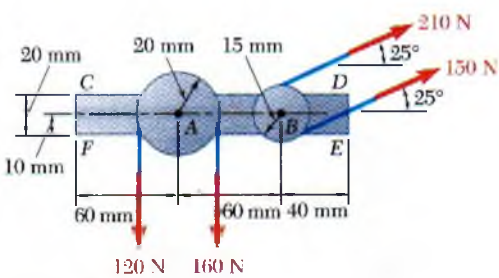


Figura P3.111

3.111 Las poleas *A* y *B* se montan sobre el soporte *CDEF*. La tensión en cada lado de las dos bandas es la que se muestra en la figura. Reemplace las cuatro fuerzas con una sola fuerza equivalente y determine dónde se interseca su línea de acción con el borde inferior del soporte.

3.112 Tres fuerzas y un par actúan sobre la manivela ABC. Para $P = 25$ N y $\alpha = 40°$, *a*) determine la resultante del sistema de fuerzas dado, *b*) localice el punto de intersección de la línea de acción de la resultante y la línea que une a los puntos B y C, *c*) localice el punto de intersección de la línea de acción de la resultante y la línea que pasa por los puntos A y B.

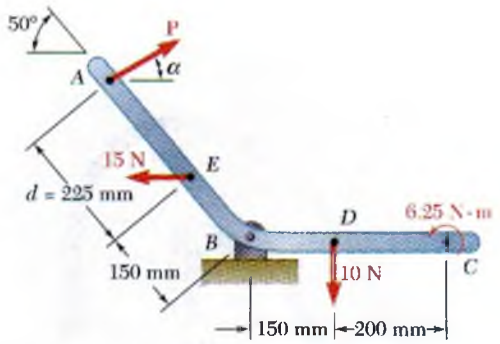


Figura P3.112 y P3.113

3.113 Tres fuerzas y un par actúan sobre la manivela ABC. Determine el valor de d si el sistema de fuerzas dado debe ser equivalente a cero en *a*) el punto B, *b*) el punto D.

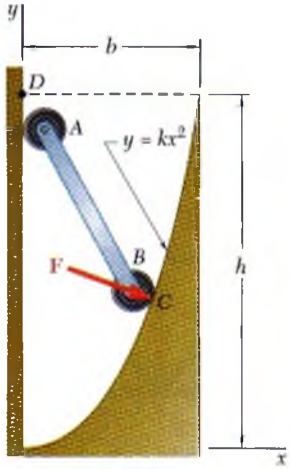


Figura P3.114

3.114 Cuando el seguidor AB rueda a lo largo de la superficie del elemento C, ejerce una fuerza **F** constante y perpendicular a la superficie. *a*) Reemplace **F** con un sistema equivalente fuerza-par en el punto D. *b*) Para $b = 1$ ft y $h = 2$ ft, determine el valor de x para el cual el momento del sistema equivalente fuerza-par en D es máximo.

3.115 Un componente de máquina se somete a las fuerzas mostradas en la figura, cada una de las cuales es paralela a uno de los ejes coordenados. Reemplace estas fuerzas con un sistema equivalente fuerza-par en A.

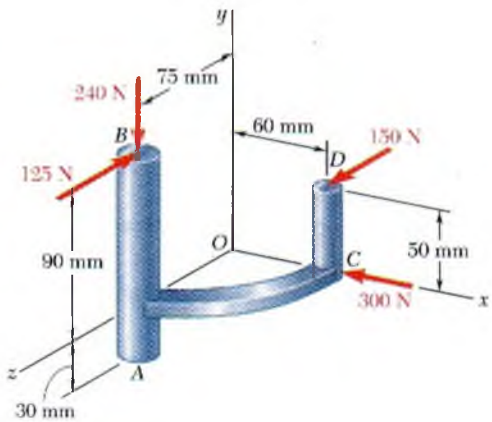


Figura P3.115

3.116 Mientras se lija un bloque de madera, éste ejerce sobre el disco del esmeril una fuerza **F** con magnitud de 1.8 lb. Si las fuerzas de la banda ejercidas sobre la polea de 5 in. de diámetro pertenecen a un plano paralelo a yz, reemplace **F** y las fuerzas de las bandas con un sistema equivalente fuerza-par en O.

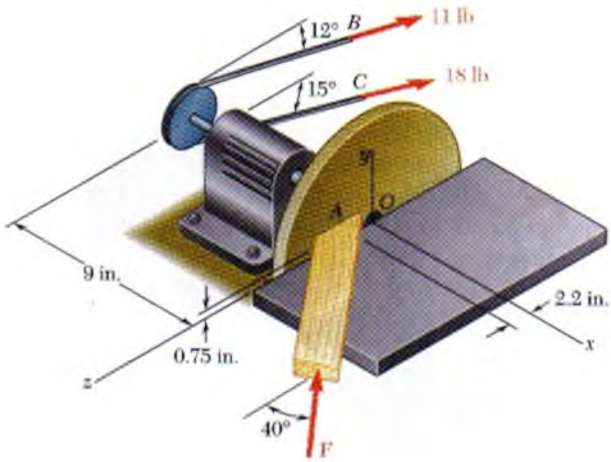


Figura *P3.116*

3.117 El propietario de un automóvil usa la llave *ABC* para aflojar el perno ubicado en *C*. La longitud del mango *AB* es de 372 mm, y el automovilista aplica las fuerzas **A** y **B** sobre la llave. Si estas fuerzas son equivalentes a un sistema fuerza-par en *O* que consta de la fuerza $\mathbf{R} = -(10\text{ N})\mathbf{i} + (6\text{ N})\mathbf{k}$ y el par $\mathbf{M}_O = (60\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{i} + (0.05\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{j} - (10\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$, determine las fuerzas aplicadas en *A* y *B* cuando $A_z = 2$ N.

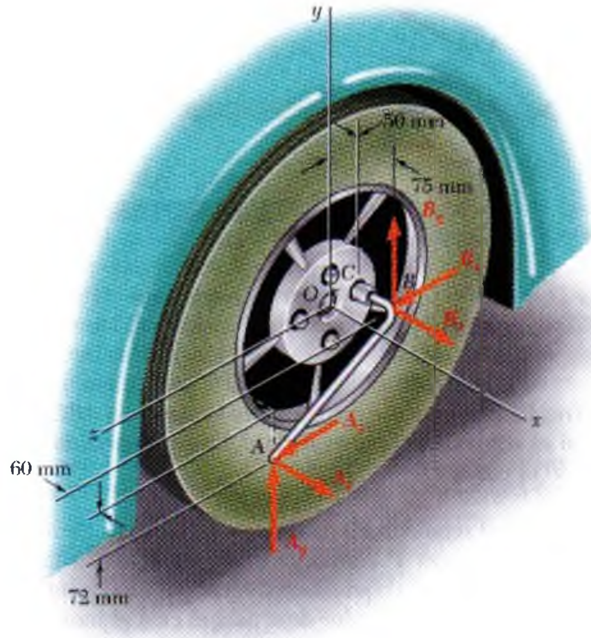


Figura P3.117

3.118 Al usar un sacapuntas manual, un estudiante ejerce sobre el mecanismo las fuerzas y el par que se muestran en la figura. *a*) Determine las fuerzas ejercidas en *B* y en *C* si las fuerzas y el par son equivalentes a un sistema fuerza-par en *A* que consta de la fuerza $\mathbf{R} = (3.9\text{ lb})\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} - (1.1\text{ lb})\mathbf{k}$ y el par $\mathbf{M}_A^R = M_x\mathbf{i} + (1.5\text{ lb}\cdot\text{ft})\mathbf{j} - (1.1\text{ lb}\cdot\text{ft})\mathbf{k}$. *b*) Encuentre los valores correspondientes de R_y y M_x.

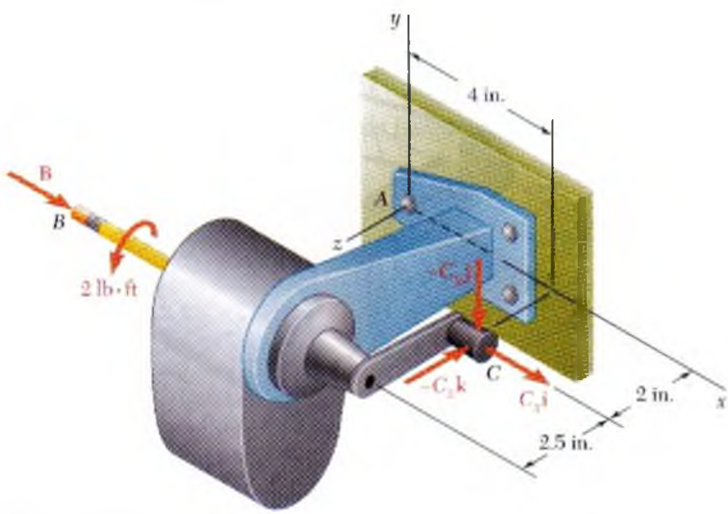


Figura P3.118

3.119 Un tramo de chimenea de un horno está unido al techo en el punto *A*. Mientras mantiene el extremo libre de la chimenea en *F*, un trabajador empuja en *E* y jala en *F* para alinear el extremo *E* con el horno. Si la fuerza de 50 N aplicada en *F* yace en un plano paralelo al plano *yz*, determine *a*) el ángulo α que forma la fuerza en *F* con la horizontal si el ducto *AB* no debe tender a rotar respecto a la vertical; determine *b*) el sistema fuerza-par en *B* equivalente al sistema de fuerzas dado cuando se satisface esta condición.

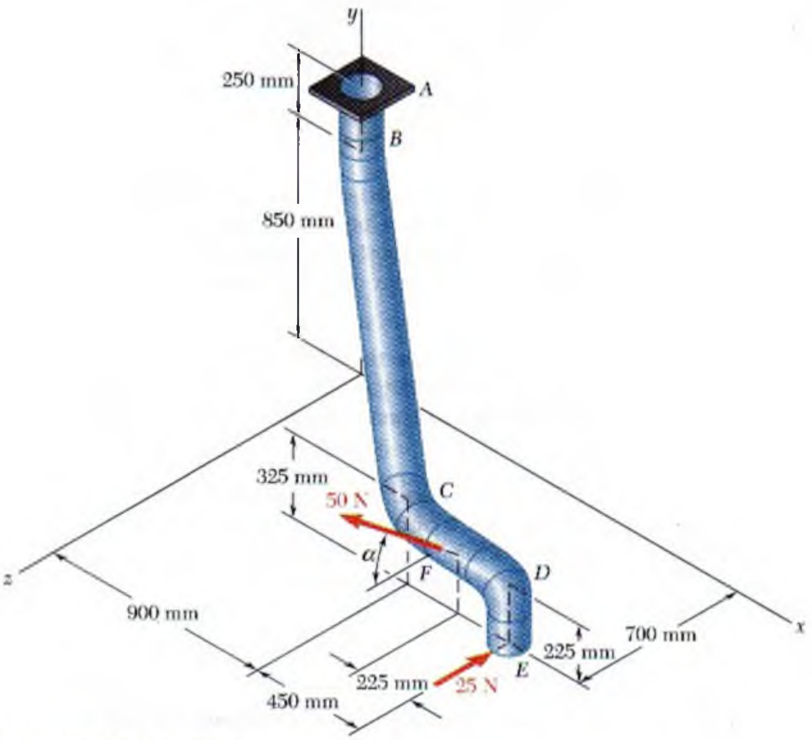


Figura P3.119 y P3.120

3.120 Un tramo de una chimenea para horno está unido al techo en el punto *A*. Mientras mantiene el extremo libre de la chimenea en *F*, un trabajador empuja en *E* y jala en *F* para alinear el extremo *E* con el horno. Si la fuerza de 50 N aplicada en *F* yace en un plano paralelo al plano *yz*, y $\alpha = 60°$, *a*) reemplace el sistema de fuerzas dado con un sistema equivalente fuerza-par en *C*, *b*) determine si el ducto *CD* tenderá a rotar a favor o en contra del sentido de las manecillas del reloj con relación al codo *C*, visto desde *D*.

3.121 Un puntal ajustable *BC* es utilizado para colocar una pared en posición vertical, se ejerce un sistema fuerza-par sobre la pared. Reemplace este sistema fuerza-par con un sistema fuerza-par equivalente en *A*, de manera que $R = 21.2$ lb y $M = 13.25$ lb · ft.

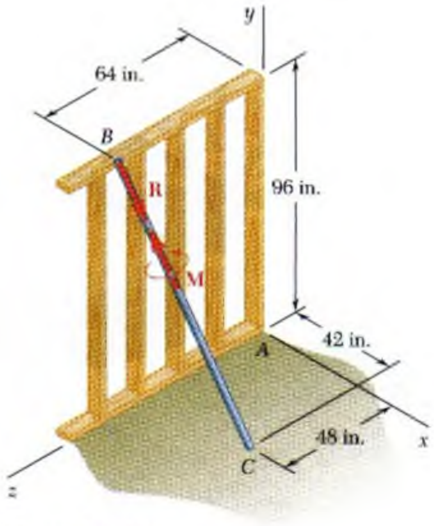


Figura *P3.121*

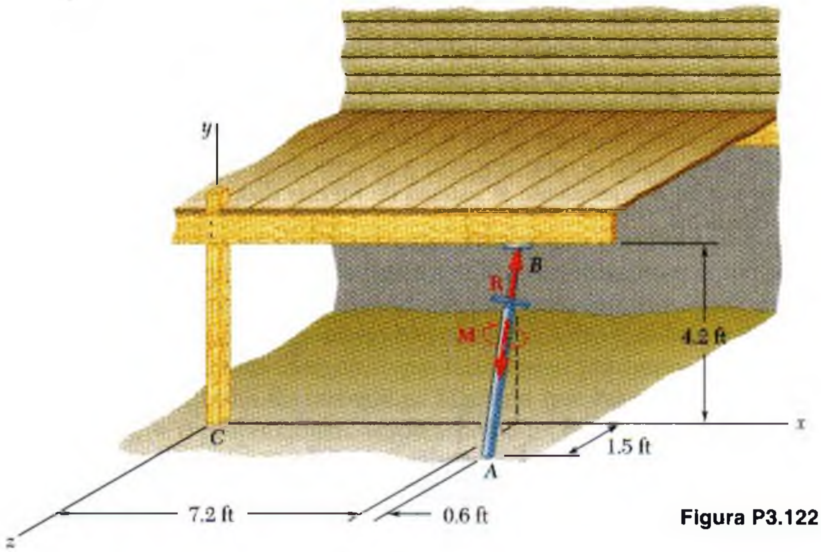


Figura P3.122

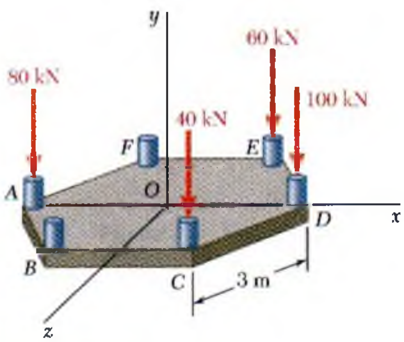


Figura P3.123 y P3.124

3.122 Mientras se repara y nivela, el frente de un pórtico caído se sostiene mediante un gato de tornillo. Conforme el gato se expande ejerce sobre el pórtico el sistema fuerza-par mostrado, donde $R = 60$ lb y $M = 22.5$ lb · ft. Reemplace este sistema fuerza-par con un sistema equivalente fuerza-par en C.

3.123 Una base de concreto que tiene la forma de un hexágono regular con lados de 3 m soporta cuatro cargas sobre sus columnas, como indica la figura. Determine la magnitud y el punto de aplicación de la resultante de las cuatro cargas.

3.124 Una base de concreto que tiene la forma de un hexágono regular con lados de 3 m soporta cuatro cargas sobre sus columnas, como se muestra en la figura. Determine la magnitud de las cargas adicionales que deben aplicarse en B y F si la resultante de las seis cargas debe pasar por el centro de la base.

3.125 Las fuerzas mostradas en la figura son la resultante de las cargas verticales hacia abajo ejercidas sobre las secciones del techo plano de una construcción, y se deben a la nieve acumulada. Determine la magnitud y el punto de aplicación de la resultante de estas cuatro cargas.

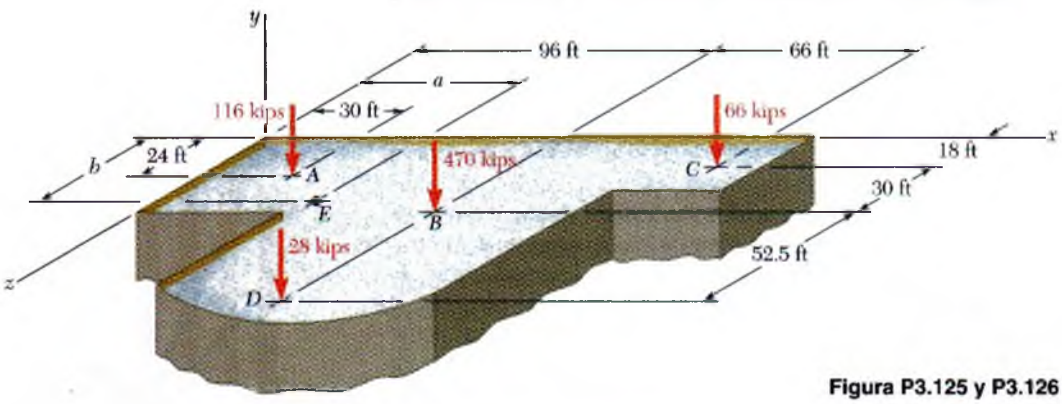


Figura P3.125 y P3.126

3.126 Las fuerzas mostradas en la figura son la resultante de las cargas verticales hacia abajo ejercidas sobre las secciones del techo plano de una construcción, y se deben a la nieve acumulada. Si la nieve representada por la fuerza de 116 kips se remueve de manera que actúe en el punto E, determine a y b si el punto de aplicación de la resultante de las cuatro cargas está entonces en B.

***3.127** Un grupo de estudiantes carga la plataforma de un tráiler de 2 × 4 m con dos cajas de 0.6 × 0.6 × 0.6 m y con una caja de 0.6 × 0.6 × 1.2 m. Las cajas se colocan en la parte posterior del tráiler de manera que queden alineadas con la parte trasera y los costados de éste. Determine la carga mínima que los estudiantes deben colocar en una caja adicional de 0.6 × 0.6 × 1.2 m y el sitio donde deben asegurarla en el tráiler si ninguna parte de las cajas debe rebasar los costados. Además, suponga que cada caja está cargada uniformemente y que la línea de acción de la resultante del peso de las cuatro cajas pasa por el punto de intersección de las líneas centrales y el eje del tráiler. (*Sugerencia*: Tome en cuenta que las cajas pueden colocarse en los extremos o los costados.)

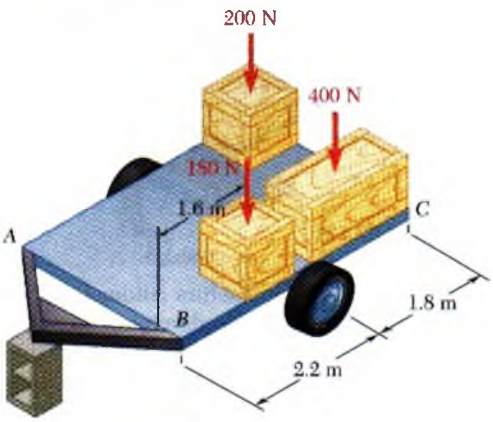


Figura *P3.127*

***3.128** Resuelva el problema 3.127 si los estudiantes desean colocar todo el peso posible en una cuarta caja y que al menos uno de los lados de ésta coincida con un costado del tráiler.

***3.129** Una pieza de metal laminado sometida a tres fuerzas se dobla en la forma que muestra la figura. Reemplace las tres fuerzas con una llave de torsión equivalente, y determine *a*) la magnitud y la dirección de la resultante **R**, *b*) el paso de la llave de torsión y *c*) el punto donde el eje de la llave interseca al plano *yz*.

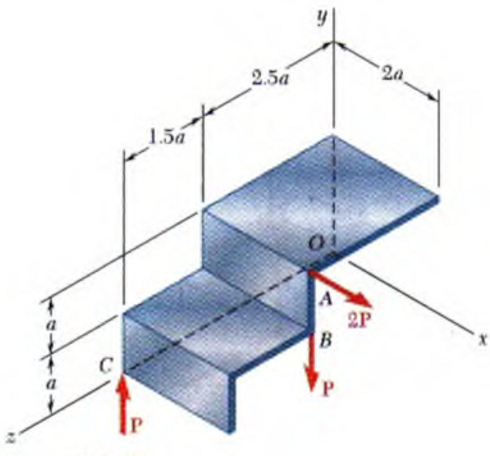


Figura P3.129

***3.130** Un bloque de madera está sometido a tres fuerzas de igual magnitud *P* en las direcciones que muestra la figura. Reemplace las tres fuerzas con una llave de torsión equivalente, y determine *a*) la magnitud y la dirección de la fuerza resultante **R**, *b*) el paso de la llave de torsión y *c*) el punto donde el eje de la llave interseca al plano *xy*.

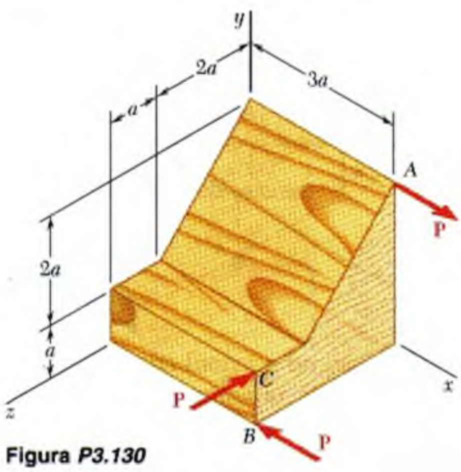


Figura *P3.130*

***3.131** Las fuerzas y los pares mostrados se aplican sobre dos tornillos para sujetar una placa de metal a un bloque de madera. Reduzca las fuerzas y los pares a una llave de torsión equivalente, y determine *a*) la fuerza resultante **R**, *b*) el paso de la llave de torsión y *c*) el punto donde el eje de la llave interseca al plano *xz*.

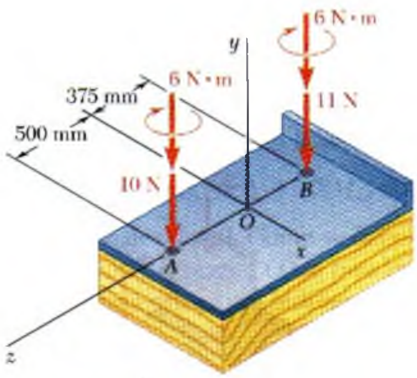


Figura P3.131

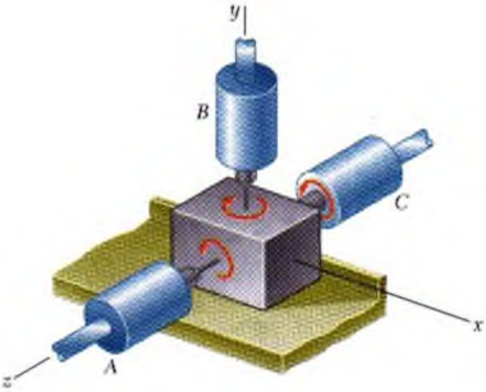


Figura *P3.132*

***3.132** En un proceso de manufactura automatizado, se perforan tres orificios simultáneamente en un bloque de aluminio, como indica la figura. Cada broca ejerce una fuerza de 50 N y un par de 0.100 N · m sobre el bloque. Si la broca *A* gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj y las brocas *B* y *C* lo hacen en el mismo sentido (según se observa para cada broca), reduzca las fuerzas y los pares ejercidos por las brocas sobre el bloque a una llave de torsión equivalente, y determine *a*) la fuerza resultante **R**, *b*) el paso de la llave de torsión, *c*) el punto donde la llave de torsión interseca al plano *xz*.

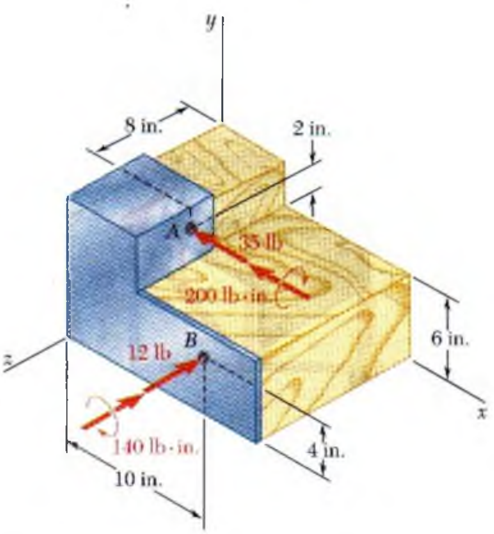


Figura P3.133

***3.133** Dos pernos *A* y *B* se aprietan aplicando las fuerzas y el par mostrados en la figura. Reemplace las dos llaves de torsión por una sola llave de torsión equivalente, y determine *a*) la resultante **R**, *b*) el paso de la llave de torsión equivalente y *c*) el punto donde el eje de esta llave interseca al plano *yz*.

***3.134** Dos pernos *A* y *B* se aprietan aplicando las fuerzas y el par mostrados en la figura. Reemplace las dos llaves de torsión por una sola llave de torsión equivalente, y determine *a*) la resultante **R**, *b*) el paso de la llave de torsión equivalente y *c*) el punto donde el eje de esta llave interseca al plano *xz*.

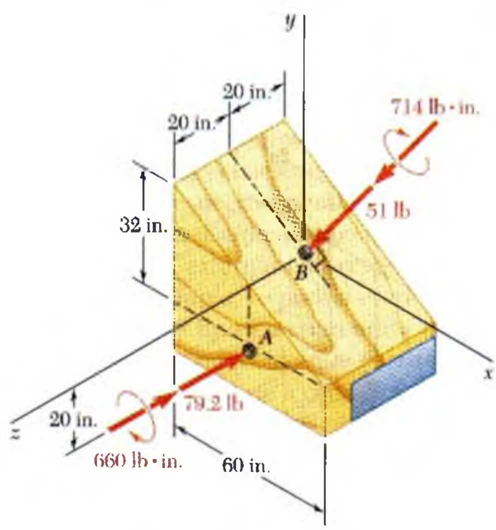


Figura *P3.134*

***3.135** Un asta bandera se sostiene mediante tres cables. Si la tensión en los cables tiene la misma magnitud P, reemplace las fuerzas ejercidas sobre el asta por una llave de torsión equivalente y determine *a*) la fuerza resultante **R**, *b*) el paso de la llave de torsión y *c*) el punto donde el eje de la llave de torsión interseca al plano *xz*.

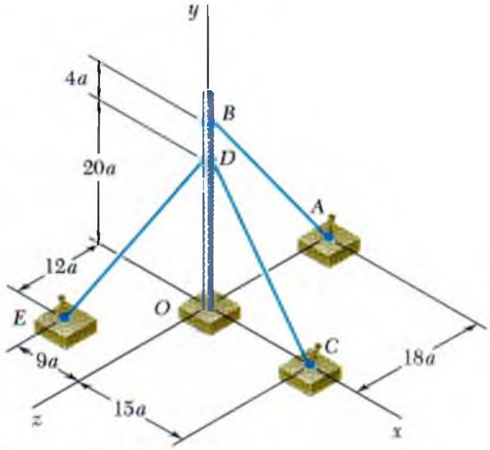


Figura P3.135

***3.136* y *3.137** Determine si el sistema fuerza-par mostrado en la figura puede reducirse a una sola fuerza equivalente **R**. Si esto es posible, determine **R** y el punto donde la línea de acción de **R** interseca al plano *yz*. Si la reducción no puede lograrse, reemplace el sistema dado por una llave de torsión equivalente y determine su resultante, su paso y el punto donde su eje interseca al plano *yz*.

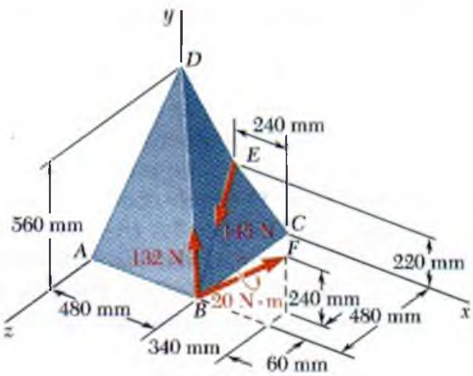


Figura *P3.136*

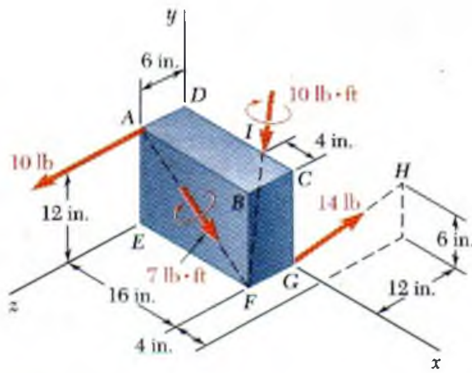


Figura P3.137

***3.138** Reemplace la llave de torsión mostrada en la figura con un sistema equivalente que conste de dos fuerzas perpendiculares al eje z aplicadas, respectivamente, en A y en B.

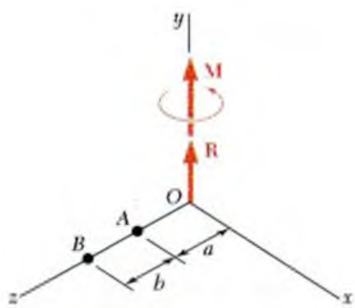


Figura P3.138

***3.139** Demuestre que, en general, una llave de torsión puede ser reemplazada por dos fuerzas seleccionadas de tal forma que una pase a través de un punto determinado mientras la otra está contenida en un plano dado.

***3.140** Demuestre que una llave de torsión puede reemplazarse con dos fuerzas perpendiculares, una de las cuales está aplicada en un punto determinado.

***3.141** Demuestre que una llave de torsión puede reemplazarse con dos fuerzas, una de las cuales tiene una línea de acción predefinida.

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 3

Principio de transmisibilidad

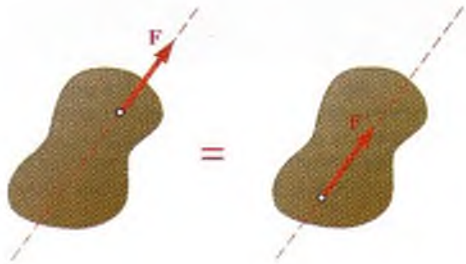


Figura 3.48

En este capítulo se estudió el efecto de fuerzas ejercidas sobre un cuerpo rígido. Primero se aprendió a distinguir entre fuerzas *externas* e *internas* [sección 3.2] y se vio que, de acuerdo con el *principio de transmisibilidad*, el efecto de una fuerza externa sobre un cuerpo rígido permanece inalterado si la fuerza se mueve a lo largo de su línea de acción [sección 3.3]. En otras palabras, dos fuerzas **F** y **F**′, que actúan sobre un cuerpo rígido en dos puntos distintos tienen el mismo efecto sobre dicho cuerpo si tienen la misma magnitud, la misma dirección y la misma línea de acción (figura 3.48). Se dice que dos fuerzas como éstas son *equivalentes*.

Producto vectorial de dos vectores

Antes de proceder con el estudio de *sistemas equivalentes de fuerzas*, se presentó el concepto del *producto vectorial de dos vectores* [sección 3.4]. El producto vectorial

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$$

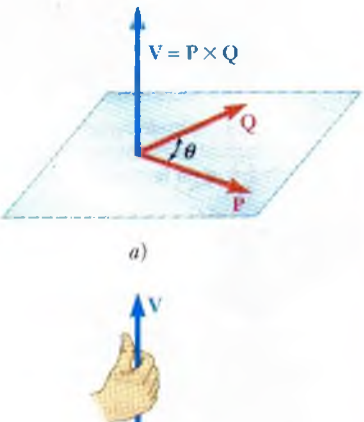


Figura 3.49

de dos vectores **P** y **Q** se definió como el vector perpendicular al plano que contiene a **P** y a **Q** (figura 3.49), cuya magnitud es igual a

$$V = PQ \text{ sen } \theta \tag{3.1}$$

y que está dirigido de manera que una persona ubicada en la parte terminal de **V** verá la rotación a través de un ángulo θ que hace al vector **P** colineal con el vector **Q** como contraria al movimiento de las manecillas del reloj. Se dice que los tres vectores **P**, **Q** y **V** —considerados en ese orden— forman una *tríada de mano derecha*. Se concluye que los productos vectoriales **Q** × **P** y **P** × **Q** están representados por vectores iguales y opuestos. Así, se tiene que

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{P} = -(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \tag{3.4}$$

Además, a partir de la definición del producto vectorial de dos vectores, también se concluye que los productos vectoriales de los vectores unitarios **i**, **j** y **k** están dados por

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0 \qquad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$$

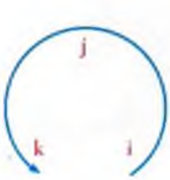


Figura 3.50

y así sucesivamente. El signo del producto vectorial de dos vectores unitarios puede obtenerse ordenando las tres letras que representan los vectores unitarios en un círculo, en un sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (figura 3.50): el producto vectorial de dos vectores unitarios será positivo si éstos se siguen uno al otro en un orden contrario a las manecillas del reloj y será negativo si éstos se siguen uno al otro en el sentido de las manecillas del reloj.

Componentes rectangulares del producto vectorial

Las *componentes rectangulares del producto vectorial* **V** de dos vectores **P** y **Q** fueron expresadas como sigue [sección 3.5]:

$$V_x = P_yQ_z - P_zQ_y$$
$$V_y = P_zQ_x - P_xQ_z \qquad (3.9)$$
$$V_z = P_xQ_y - P_yQ_x$$

Con el uso de un determinante también se escribió

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \qquad (3.10)$$

Momento de una fuerza con respecto a un punto

El *momento de una fuerza* **F** *con respecto a un punto* O se definió [sección 3.6] como el producto vectorial

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad (3.11)$$

donde **r** es el *vector de posición* trazado desde O hasta el punto de aplicación A de la fuerza **F** (figura 3.51). Si se representa con θ el ángulo entre las líneas de acción de **r** y **F**, se encontró que la magnitud del momento de **F** con respecto a O podía expresarse como

$$M_O = rF \operatorname{sen} \theta = Fd \qquad (3.12)$$

donde d representa la distancia perpendicular desde O hasta la línea de acción de **F**.

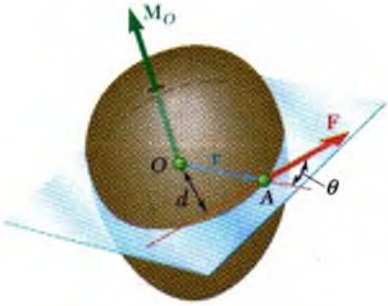


Figura 3.51

Componentes rectangulares del momento

Las *componentes rectangulares del momento* $\mathbf{M}_O$ *de una fuerza* **F** se expresaron [sección 3.8] como

$$M_x = yF_z - zF_y$$
$$M_y = zF_x - xF_z \qquad (3.18)$$
$$M_z = xF_y - yF_x$$

donde x, y y z son las componentes del vector de posición **r** (figura 3.52). Usando una forma de determinante, se escribió también

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (3.19)$$

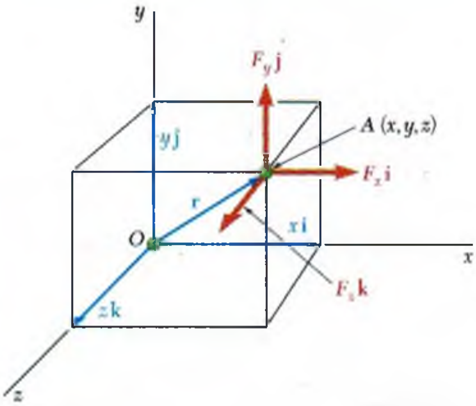


Figura 3.52

En el caso más general del momento de una fuerza **F** aplicada en A con respecto a un punto arbitrario B, se obtuvo que

$$\mathbf{M}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (3.21)$$

donde $x_{A/B}$, $y_{A/B}$ y $z_{A/B}$ son las componentes del vector $\mathbf{r}_{A/B}$:

$$x_{A/B} = x_A - x_B \qquad y_{A/B} = y_A - y_B \qquad z_{A/B} = z_A - z_B$$

En el caso de *problemas que involucran únicamente a dos dimensiones*, se puede suponer que la fuerza **F** se encuentra en el plano xy. Su momento $\mathbf{M}_B$ con respecto a un punto B que se encuentra en ese mismo plano es perpendicular al plano en cuestión (figura 3.53) y está completamente definido por el escalar

$$M_B = (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x \qquad (3.23)$$

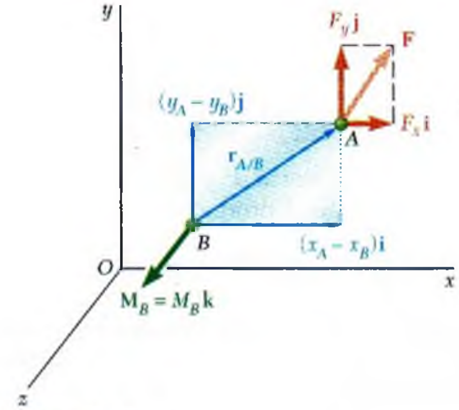


Figura 3.53

En los problemas resueltos 3.1 al 3.4 se mostraron varios métodos para el cálculo del momento de una fuerza con respecto a un punto.

Producto escalar de dos vectores

El *producto escalar* de dos vectores **P** y **Q** [sección 3.9] se denotó por **P · Q** y se definió como la cantidad escalar

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta \qquad (3.24)$$

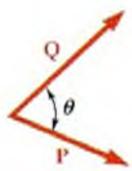


Figura 3.54

donde θ es el ángulo entre **P** y **Q** (figura 3.54). Se expresó el producto escalar de **P** y **Q** en términos de las componentes escalares de los dos vectores, se determinó que

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z \qquad (3.30)$$

Proyección de un vector sobre un eje

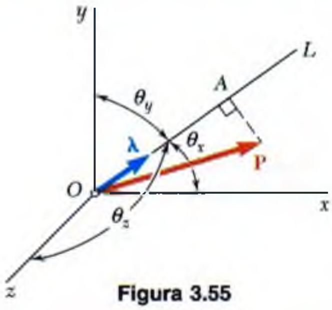


Figura 3.55

La *proyección de un vector* **P** *sobre un eje* OL (figura 3.55) se puede obtener formando el producto escalar de **P** y el vector unitario **λ** a lo largo de OL. Así, se tiene que

$$P_{OL} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda} \qquad (3.36)$$

o, con las componentes rectangulares,

$$P_{OL} = P_x \cos \theta_x + P_y \cos \theta_y + P_z \cos \theta_z \qquad (3.37)$$

donde θ_x, θ_y y θ_z representan los ángulos que forma el eje OL con los ejes coordenados.

Producto triple escalar de tres vectores

El *producto triple escalar* de los tres vectores **S**, **P** y **Q** se definió como la expresión escalar

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \qquad (3.38)$$

que se obtuvo formando el producto escalar de **S** con el producto vectorial de **P** y **Q** [sección 3.10]. Se mostró que

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \qquad (3.41)$$

donde los elementos del determinante son las componentes rectangulares de los tres vectores.

Momento de una fuerza con respecto a su eje

El *momento de una fuerza* **F** *con respecto a un eje OL* [sección 3.11] se definió como la proyección *OC* sobre *OL* del momento $\mathbf{M}_O$ de la fuerza **F** (figura 3.56), esto es, se definió como el producto triple escalar del vector unitario **λ**, el vector de posición **r** y la fuerza **F**:

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_O = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \qquad (3.42)$$

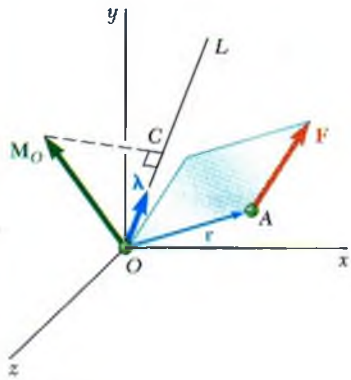


Figura 3.56

Con el uso de la forma de determinante para el producto triple escalar, se tiene

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (3.43)$$

donde $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ = cosenos directores del eje *OL*
x, y, z = componentes de **r**
F_x, F_y, F_z = componentes de **F**

En el problema resuelto 3.5 se presentó un ejemplo de la determinación del momento de una fuerza con respecto a un eje inclinado.

Pares

Se dice que *dos fuerzas* **F** *y* −**F** *que tienen la misma magnitud, líneas de acción paralelas y sentidos opuestos forman un par* [sección 3.12]. Se demostró que el momento de un par es independiente del punto con respecto al cual se calcula dicho momento; el momento de un par es un vector **M** perpendicular al plano del par e igual en magnitud al producto de la magnitud común de las fuerzas *F* y la distancia perpendicular *d* entre sus líneas de acción (figura 3.57).

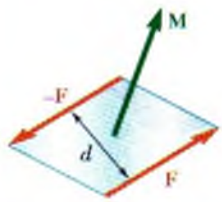


Figura 3.57

Dos pares que tienen el mismo momento **M** son *equivalentes*, esto es, dichos pares tienen el mismo efecto sobre un cuerpo rígido dado [sección 3.13]. La suma de dos pares también es un par [sección 3.14] y el momento **M** del par resultante se puede obtener sumando vectorialmente los momentos $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ de los pares originales [problema resuelto 3.6]. Por tanto, se concluye que un par puede ser representado por un vector, conocido como el *vector de par*, igual en magnitud y dirección al momento **M** del par [sección 3.15]. Un vector de par es un *vector libre* que, si así se desea, se puede fijar al origen *O* y se puede separar en componentes (figura 3.58).

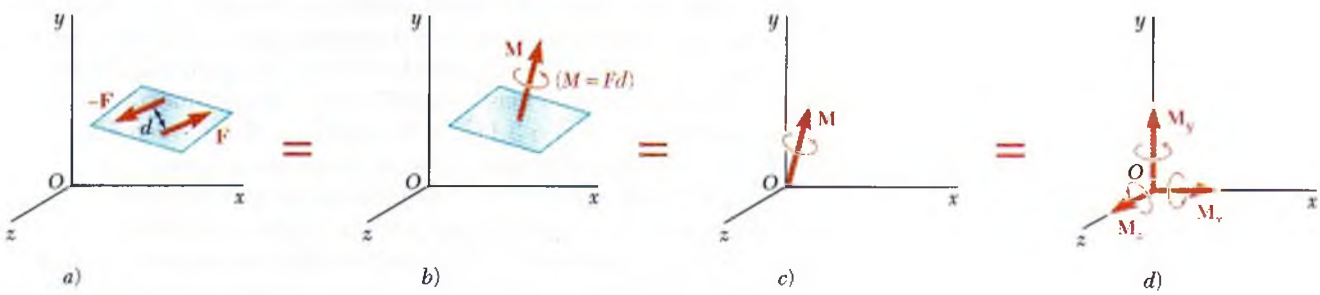


Figura 3.58

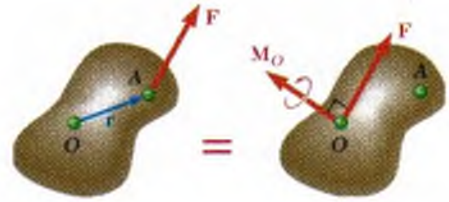


Figura 3.59

Sistema fuerza-par

Cualquier fuerza **F** que actúa en un punto *A* de un cuerpo rígido puede reemplazarse por un *sistema fuerza-par* en un punto arbitrario *O* el cual consta de la fuerza **F** aplicada en *O* y un par de momento $\mathbf{M}_O$, igual al momento de la fuerza **F** en su posición original con respecto a *O* [sección 3.16]; se debe señalar que la fuerza **F** y el vector de par $\mathbf{M}_O$ siempre son perpendiculares entre sí (figura 3.59).

Reducción de un sistema de fuerzas a un sistema de fuerza-par

Se concluye que [sección 3.17] *cualquier sistema de fuerzas puede ser reducido a un sistema fuerza-par en un punto dado O*, reemplazando primero cada una de las fuerzas del sistema por un sistema equivalente fuerza-par en *O* (figura 3.60) para después sumar todas las fuerzas y todos los pares determinados de esta forma con el fin de obtener a la fuerza resultante **R** y al vector de par resultante $\mathbf{M}_O^R$ [problemas resueltos 3.8 al 3.11]. Obsérvese que, en general, la resultante **R** y el vector de par $\mathbf{M}_O^R$ no serán perpendiculares entre sí.

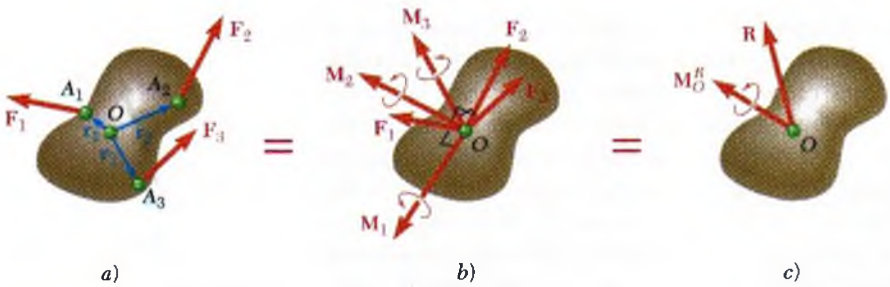


Figura 3.60

Sistemas equivalentes de fuerzas

Con base en lo anterior, se concluyó [sección 3.18] que, en lo que respecta a los cuerpos rígidos, *dos sistemas de fuerzas* $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, . . . *y* $\mathbf{F}_1'$, $\mathbf{F}_2'$, $\mathbf{F}_3'$, . . . , *son equivalentes si, y sólo si,*

$$\Sigma\mathbf{F} = \Sigma\mathbf{F}' \quad \text{y} \quad \Sigma\mathbf{M}_O = \Sigma\mathbf{M}_O' \tag{3.57}$$

Reducción adicional de un sistema de fuerzas

Si la fuerza resultante **R** y el vector de par resultante $\mathbf{M}_O^R$ son perpendiculares entre sí, el sistema fuerza-par en *O* puede reducirse aún más a una sola fuerza resultante [sección 3.20]. Éste es el caso para sistemas que están constituidos por: *a*) fuerzas concurrentes (como los sistemas considerados en el capítulo 2), *b*) fuerzas coplanares [problemas resueltos 3.8 y 3.9] o *c*) fuerzas paralelas [problema resuelto 3.11]. Si la resultante **R** y el vector de par $\mathbf{M}_O^R$ *no* son perpendiculares entre sí, el sistema *no puede* ser reducido a una sola fuerza. Éste, sin embargo, puede ser reducido a un tipo especial de sistema fuerza-par que recibe el nombre de *llave de torsión*, el cual consta de la resultante **R** y un vector de par $\mathbf{M}_1$ dirigido a lo largo de **R** [sección 3.21 y problema resuelto 3.12].

Problemas de repaso

3.142 Se requiere una fuerza vertical de 800 N para remover, de la tabla mostrada, el clavo que está en C. Un instante antes de que el clavo comience a salir, determine *a*) el momento respecto a B de la fuerza ejercida sobre el clavo, *b*) la magnitud de la fuerza **P** que genera el mismo momento respecto a B si $\alpha = 10°$ y *c*) la fuerza **P** mínima que genera el mismo momento respecto a B.

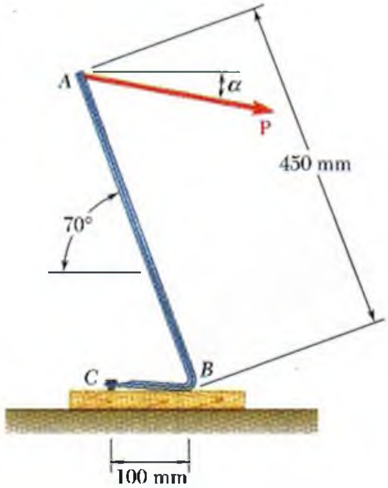


Figura P3.142

3.143 Un mecánico automotriz usa el tramo de tubo AB como palanca para tensar la banda de la polea de un alternador. Cuando el mecánico presiona hacia abajo en el punto A, se genera una fuerza de 580 N sobre el alternador en B. Determine el momento de la fuerza respecto al perno C si su línea de acción pasa por O.

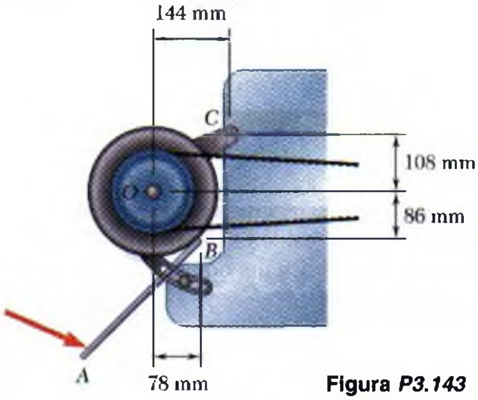


Figura *P3.143*

3.144 La rampa $ABCD$ se sostiene mediante cables colocados en las esquinas C y D. Si la tensión que se ejerce en cada uno de los cables es de 360 lb, determine el momento respecto a A de la fuerza ejercida por *a*) el cable en D, *b*) el cable en C.

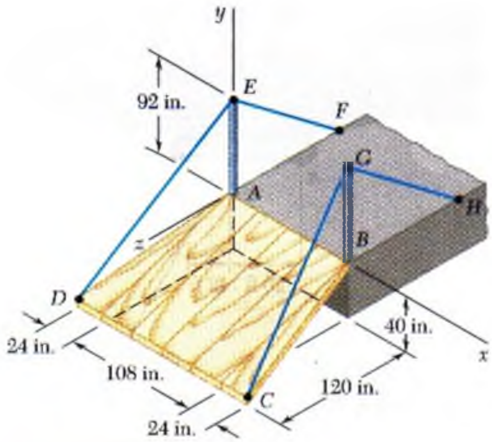


Figura P3.144

3.145 Determine los ángulos formados por los alambres AC y AD de la red de voleibol que se muestra en la figura.

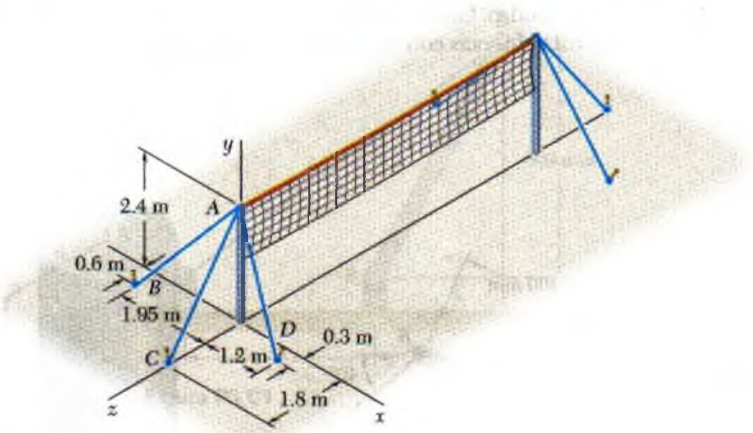


Figura P3.145

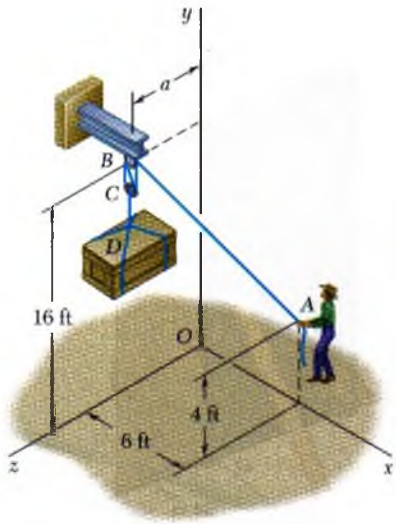


Figura P3.146

3.146 Para levantar una caja pesada, un hombre usa un bloque y un polipasto sujetándolos a la parte inferior de la viga I mediante el gancho colocado en B. Si los momentos, respecto a los ejes y y z, de la fuerza ejercida en B por el tramo AB de la cuerda son, respectivamente, de 100 lb · ft y de –400 lb · ft, determine la distancia a.

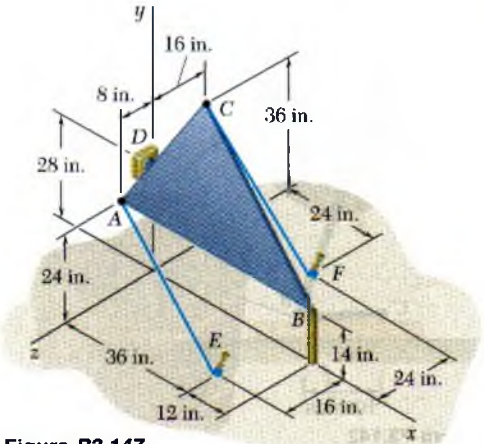


Figura *P3.147*

3.147 La placa triangular ABC está sostenida por apoyos de cuenca y bola (rótula) colocados en B y D, y se mantiene en la posición mostrada mediante los cables AE y CF. Si la fuerza ejercida por el cable CF en C es de 132 lb, determine el momento de esa fuerza respecto a la línea que une los puntos D y B.

3.148 La tensión presente en el cable que está unido al extremo C de un aguilón ajustable ABC es de 1 000 N. Reemplace la fuerza ejercida por el cable en C con un sistema equivalente fuerza-par en *a*) el punto A, *b*) el punto B.

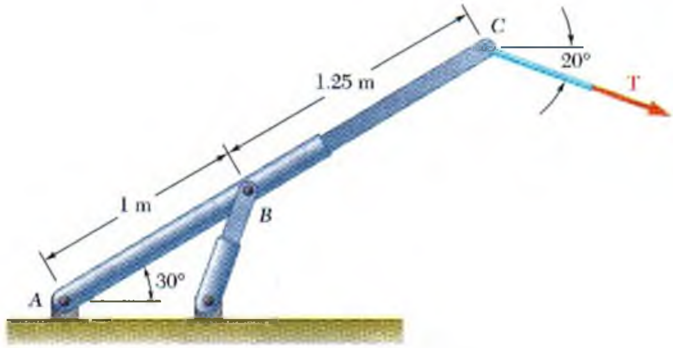


Figura P3.148

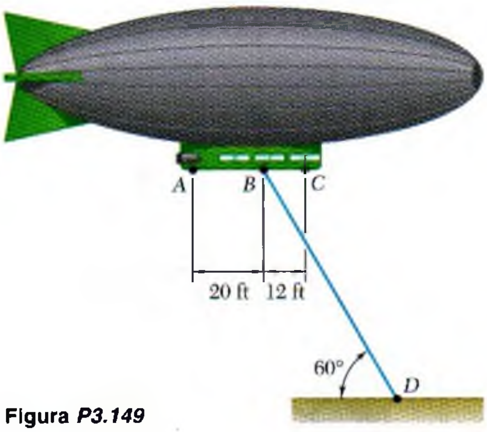


Figura *P3.149*

3.149 Un dirigible se amarra mediante un cable sujeto a la cabina en el punto B. Si la tensión en el cable es de 250 lb, reemplace la fuerza ejercida por el cable en B con un sistema equivalente formado por dos fuerzas paralelas aplicadas en A y C.

3.150 Para mantener cerrada una puerta, se usa una tabla de madera colocada entre el piso y la perilla de la puerta. La fuerza que la tabla ejerce en B es de 45 lb y está dirigida a lo largo de la línea AB. Reemplace esta fuerza con un sistema equivalente fuerza-par en C.

3.151 El engrane C está unido rígidamente al brazo AB. Si las fuerzas y los pares mostrados se pueden reducir a una sola fuerza equivalente en A, determine dicha fuerza y la magnitud del par **M**.

3.152 Un buje de plástico se inserta en un cilindro de metal de 3 in. de diámetro como indica la figura, la herramienta de inserción ejerce fuerzas sobre la superficie del cilindro. Cada fuerza es paralela a uno de los ejes coordenados. Reemplace estas fuerzas con un sistema equivalente fuerza-par en C.

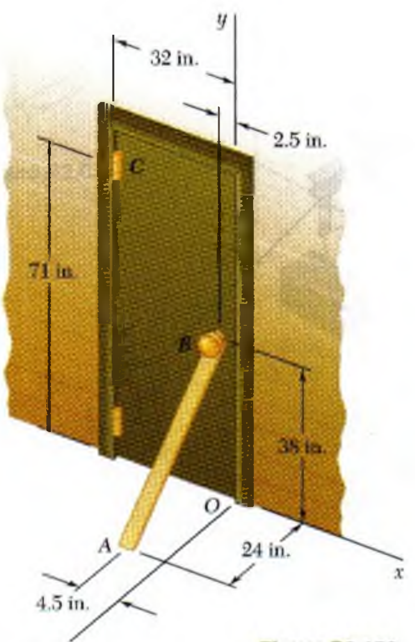


Figura P3.150

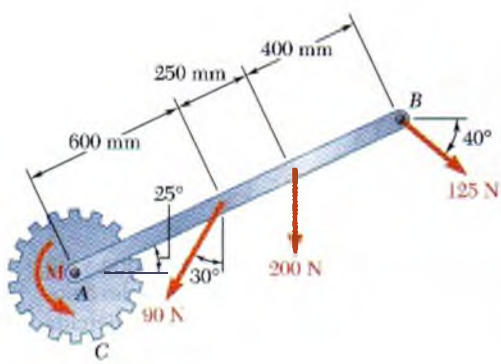


Figura P3.151

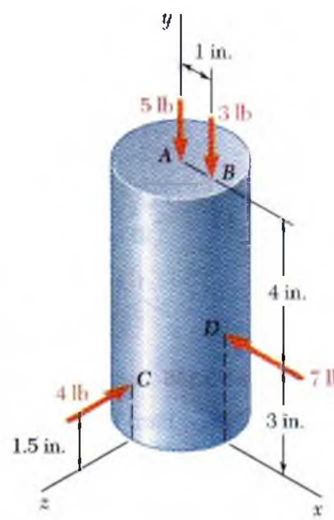


Figura P3.152

3.153 Tres niños se encuentran parados en una balsa de 15 × 15 ft. Los pesos de los niños situados, respectivamente, en *A*, *B* y *C* son de 85, 60 y 90 lb. Si una cuarta niña con peso de 95 lb se sube a la balsa, determine dónde debe estar parada si los otros niños permanecen en la posición que se muestra y si la línea de acción de la resultante del peso de los cuatro niños debe pasar por el centro de la balsa.

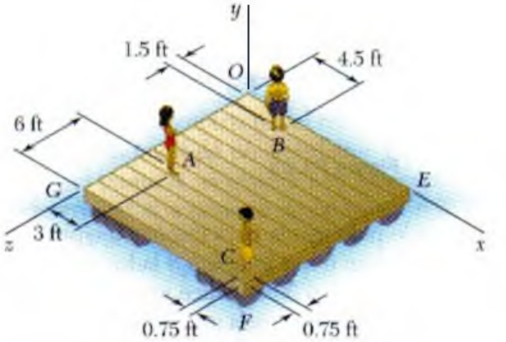


Figura *P3.153*

Problemas de computadora

3.C1 La barra *AB* es mantenida en posición mediante el cordón *AC* cuya tensión es *T*. Utilice un programa de cómputo para determinar el momento, respecto a *B*, de la fuerza ejercida por el cordón en el punto *A* en términos de la tensión *T* y la distancia *c*. Grafique el momento respecto a *B* para 320 mm $\leq c \leq$ 960 mm si *a*) $T = 50$ N, *b*) $T = 75$ N, *c*) $T = 100$ N.

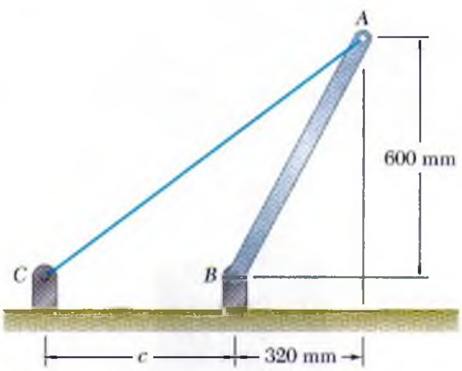


Figura P3.C1

3.C2 Un tubo de 400 mm de longitud se puede deslizar libremente a lo largo de una barra horizontal. Los extremos *A* y *B* del tubo están conectados por cordones elásticos fijados al punto *C*. *a*) Determine el ángulo θ entre los dos cordones *AC* y *BC* como una función de *x*. *b*) Grafique el ángulo θ entre los cordones *AC* y *BC* como una función de *x* para -400 mm $\leq x \leq$ 400 mm.

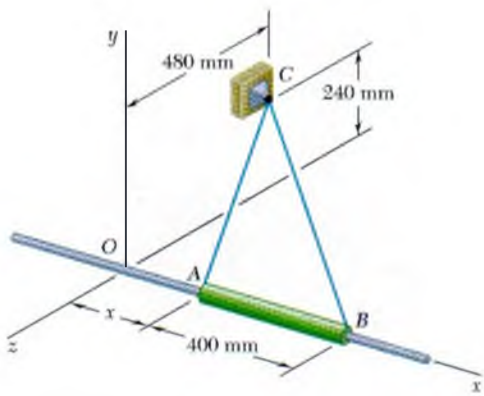


Figura P3.C2

3.C3 Utilice un programa de cómputo para determinar la distancia perpendicular que hay entre la línea de acción de una fuerza **F** y la línea OL. Ejecute dicho programa para resolver *a*) el problema 3.62, *b*) el problema 3.63, *c*) el problema 3.65.

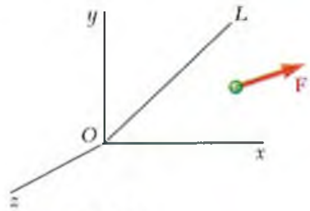


Figura P3.C3

3.C4 Un amigo le pide ayuda para diseñar recipientes donde cultivar flores. Los recipientes deben tener 4, 5, 6 u 8 lados, los cuales pueden estar proyectados hacia fuera 10, 20 o 30°. Utilice un programa de cómputo para determinar el ángulo α del bisel en cada uno de los doce diseños propuestos. (*Sugerencia*: El ángulo α del bisel es igual a la mitad del ángulo formado por las normales que se dirigen hacia dentro de dos lados adyacentes.)

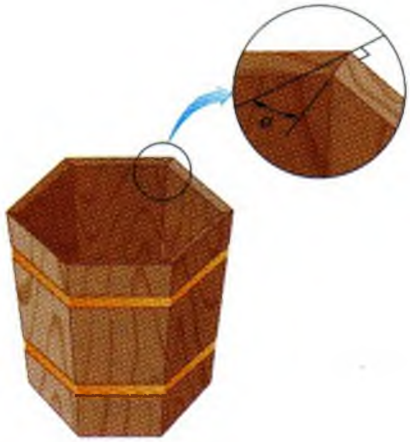


Figura P3.C4

3.C5 Una grúa está orientada de manera que el extremo del aguilón OA de 50 ft pertenece al plano yz como se muestra en la figura. Si la tensión en el cable AB es de 875 lb, determine el momento respecto a cada eje coordenado de la fuerza ejercida sobre A por el cable AB como una función de x. Grafique cada momento como una función de x para $-15 \text{ ft} \leq x \leq 15$ ft.

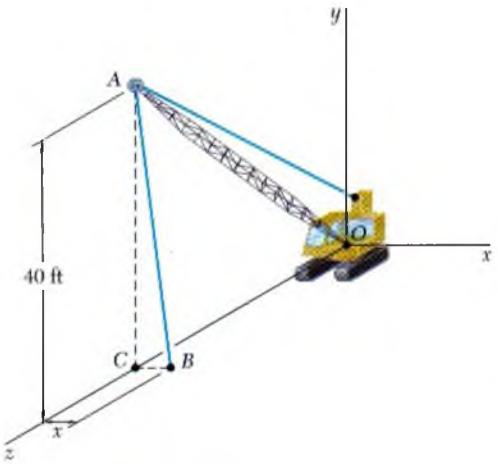


Figura P3.C5

3.C6 Una paciente que realiza terapia física descansa sobre su lado derecho y sostiene una mancuerna de 1.5 kg en su mano izquierda, la cual levanta lentamente a lo largo de una trayectoria circular. Si el centro de la trayectoria está en B y ésta pertenece al plano xy, grafique las componentes escalares del momento del peso de la mancuerna, respecto a C, como una función de θ para $-70° \leq \theta \leq 40°$.

3.C7 El reductor de velocidad de ángulo recto horizontal que se muestra en la figura pesa 40 lb, y su centro de gravedad está ubicado sobre el eje y. Si $M_1 = An^2$ y $M_2 = An^3$, determine la fuerza única que es equivalente al peso de la unidad y los dos pares que actúan sobre ella, asimismo determine el punto de coordenadas $(x, 0, z)$ donde la línea de acción de la fuerza única interseca al piso. Grafique x y z como funciones de n para $2 \leq n \leq 6$ cuando *a*) $A = 0.75$ lb · ft, *b*) $A = 1.5$ lb · ft, *c*) $A = 2$ lb · ft.

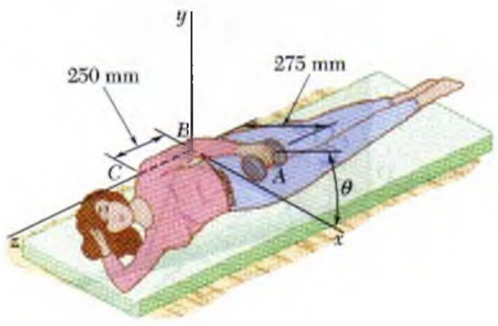


Figura P3.C6

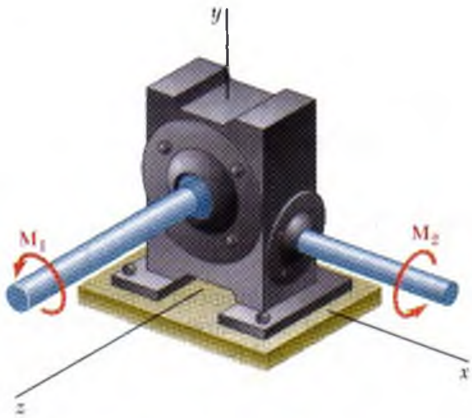


Figura P3.C7

3.C8 Una viga AB está sometida a varias fuerzas verticales, como se muestra en la figura. Con el uso de software determine la magnitud de la resultante de las fuerzas y la distancia x_C al punto C, el punto donde la línea de acción de la resultante interseca a AB. Use este software para resolver el problema 3.103*a*.

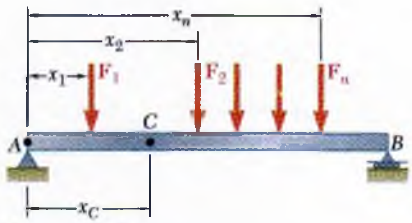


Figura P3.C8

3.C9 Con el uso de software, determine la magnitud y el punto de aplicación de la resultante de las fuerzas verticales $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, . . . , $\mathbf{P}_n$, las cuales actúan en los puntos $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, . . . , $\mathbf{A}_n$ que se encuentran en el plano xz. Use este sofware para resolver: *a*) el problema 3.123 y *b*) el problema 3.125.

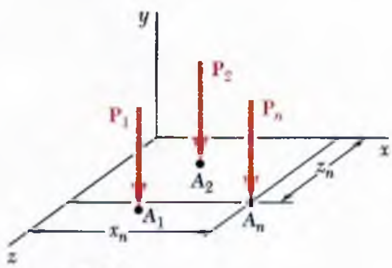


Figura P3.C9

3.C10 Usando software, determine si un sistema de fuerzas y pares puede ser reducido a una sola fuerza equivalente **R**, y, si es posible, determine **R** y el punto donde la línea de acción de **R** interseca al plano yz. Use este software para resolver: *a*) el problema 3.136 y *b*) el problema 3.137.

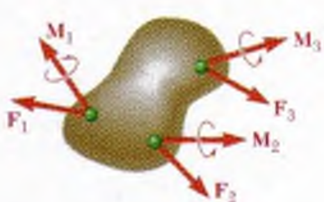


Figura P3.C10

CAPÍTULO 4

Equilibrio de cuerpos rígidos



Para cada una de las turbinas de viento que se muestran en la fotografía, debe calcularse la suma de los momentos de las cargas estática y dinámica respecto a la base de la torre para asegurar que el par de la reacción en la base no produzca una ruptura en la torre.

EQUILIBRIO DE CUERPOS RÍGIDOS

4.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se vio que las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido pueden reducirse a un sistema fuerza-par en un punto arbitrario *O*. Cuando la fuerza y el par son iguales a cero, las fuerzas externas forman un sistema equivalente a cero y se dice que el cuerpo rígido se encuentra en *equilibrio*.

Por tanto, las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de un cuerpo rígido se pueden obtener igualando a cero a $\mathbf{R}$ y a $\mathbf{M}_O^R$ en las relaciones (3.52) de la sección 3.17:

$$\Sigma\mathbf{F} = 0 \qquad \Sigma\mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \tag{4.1}$$

Si se descompone cada fuerza y cada momento en sus componentes rectangulares, se pueden expresar las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de un cuerpo rígido por medio de las seis ecuaciones escalares que se presentan a continuación:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0 \tag{4.2}$$
$$\Sigma M_x = 0 \qquad \Sigma M_y = 0 \qquad \Sigma M_z = 0 \tag{4.3}$$

Las ecuaciones obtenidas se pueden emplear para determinar fuerzas desconocidas que están aplicadas sobre el cuerpo rígido o reacciones desconocidas ejercidas sobre éste por sus puntos de apoyo. Se observa que las ecuaciones (4.2) expresan el hecho de que las componentes de las fuerzas externas en las direcciones x, y y z están balanceadas; las ecuaciones (4.3) expresan a su vez que los momentos de las fuerzas externas con respecto a los ejes x, y y z también están balanceados. Por tanto, para un cuerpo rígido en equilibrio el sistema de fuerzas externas no le impartirá un movimiento traslacional o rotacional al cuerpo en consideración.

Para poder escribir las ecuaciones de equilibrio para un cuerpo rígido, es esencial identificar primero todas las fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo y, entonces, dibujar el *diagrama de cuerpo libre* correspondiente. En este capítulo se considerará primero el equilibrio de *estructuras bidimensionales* sujetas a fuerzas contenidas en sus planos y se aprenderá cómo dibujar sus diagramas de cuerpo libre. Además de las fuerzas *aplicadas* sobre una estructura, se considerarán las *reacciones* ejercidas sobre esta última por sus puntos de apoyo. Se asociará un tipo específico de reacción con cada tipo de apoyo. Se aprenderá cómo determinar si una estructura está apoyada apropiadamente, de forma que se pueda saber de antemano si las ecuaciones de equilibrio podrán resolverse para determinar las fuerzas y reacciones desconocidas.

En la última parte del capítulo se considerará el equilibrio de estructuras tridimensionales y se realizará el mismo tipo de análisis para estas estructuras y para sus puntos de apoyo.

4.2. DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE

Al resolver un problema relacionado con el equilibrio de un cuerpo rígido es esencial que se consideren *todas* las fuerzas que actúan sobre éste; además, es importante excluir cualquier fuerza que no esté dada directamente sobre dicho cuerpo. Omitir o agregar una fuerza extraña podría destruir las condiciones de equilibrio. Por tanto, el primer paso en la solución del problema es esquematizar un *diagrama de cuerpo libre* del cuerpo rígido en consideración. Los diagramas de cuerpo libre ya fueron utilizados en muchas ocasiones en el capítulo 2. Sin embargo, en vista de su importancia para la solución de problemas de equilibrio, aquí se resumen los diferentes pasos que se deben seguir al momento de dibujar un diagrama de cuerpo libre.



Fotografía 4.1 Un diagrama de cuerpo libre del tractor que se muestra en la foto incluiría todas las fuerzas externas que actúan sobre él: el peso del tractor, el peso de la carga en la pala y las fuerzas ejercidas por el suelo sobre las llantas.



Fotografía 4.2 En el capítulo 6 se expondrá cómo determinar las fuerzas internas en estructuras hechas de varias piezas conectadas, como las fuerzas en los elementos que soportan la pala del tractor de la fotografía 4.1.

1. Se debe tomar una decisión acertada en relación con la selección del cuerpo libre que será utilizado. Después se debe separar al cuerpo del suelo y de todos los demás cuerpos. Así, se realiza un croquis del contorno del cuerpo ya aislado.

2. Todas las fuerzas externas deben indicarse en el diagrama de cuerpo libre. Estas fuerzas representan las acciones ejercidas *sobre* el cuerpo libre *por* el suelo y *por* los cuerpos que han sido separados del mismo; estas fuerzas deben aplicarse en los diversos puntos sobre los que el cuerpo libre estaba apoyado en el suelo o estaba conectado a otros cuerpos. También se debe incluir entre las fuerzas externas el *peso* del cuerpo libre, puesto que representa la atracción ejercida por la Tierra sobre las distintas partículas que lo constituyen. Como se verá en el capítulo 5, el peso debe aplicarse en el centro de gravedad del cuerpo. Cuando el cuerpo libre está constituido por varias partes, las fuerzas que dichas partes ejercen entre sí *no* deben incluirse entre las fuerzas externas; siempre que se considere completo al cuerpo libre, son fuerzas internas.

3. Las magnitudes y las direcciones de las *fuerzas externas* que son *conocidas* deben señalarse con claridad en el diagrama de cuerpo libre. Cuando se indiquen las direcciones de dichas fuerzas, se debe recordar que éstas son las ejercidas *sobre*, y no *por*, el cuerpo libre. Por lo general, las fuerzas externas conocidas incluyen el *peso* del cuerpo libre y las *fuerzas aplicadas* con un propósito en particular.

4. Las *fuerzas externas desconocidas* consisten en las *reacciones* a través de las cuales el suelo y otros cuerpos se oponen a un posible movimiento del cuerpo libre. Las reacciones lo obligan a permanecer en la misma posición y, por esta razón, algunas veces reciben el nombre de *fuerzas de restricción*. Las reacciones se ejercen en los puntos donde el cuerpo libre está *apoyado* o *conectado* a otros cuerpos y deben indicarse con claridad. Las reacciones se estudian con más detalle en las secciones 4.3 y 4.8.

5. El diagrama de cuerpo libre también debe incluir dimensiones, puesto que éstas se pueden necesitar para el cálculo de momentos de fuerzas. Sin embargo, cualquier otro detalle debe omitirse.

EQUILIBRIO EN DOS DIMENSIONES

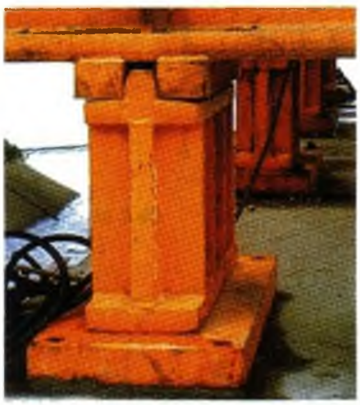
4.3. REACCIONES EN LOS PUNTOS DE APOYO Y CONEXIONES DE UNA ESTRUCTURA BIDIMENSIONAL



Fotografía 4.3 Cuando el eslabón del mecanismo de apertura del toldo para ventana se extiende, la fuerza que éste ejerce sobre el deslizador produce una fuerza normal aplicada sobre la barra, lo que causa que el toldo se abra.



Fotografía 4.4 El apoyo oscilatorio del estribo montado, que se muestra en la fotografía, se usa para apoyar el camino sobre un puente.



Fotografía 4.5 Se muestra la expansión del apoyo oscilatorio de un puente con plataforma de trabes. La superficie convexa del oscilador le permite al apoyo de la trabe moverse en forma horizontal.

En la primera parte de este capítulo se considera el equilibrio de una estructura bidimensional, esto es, se supone que la estructura que se está analizando y las fuerzas aplicadas sobre la misma están contenidas en el mismo plano. De la forma más clara, las reacciones necesarias para mantener a la estructura en la misma posición también estarán contenidas en el mismo plano.

Las reacciones ejercidas sobre una estructura bidimensional pueden ser divididas en tres grupos que corresponden a tres tipos de *apoyos* (puntos de apoyo) o *conexiones*:

1. *Reacciones equivalentes a una fuerza con una línea de acción conocida*. Los apoyos y las conexiones que originan reacciones de este tipo incluyen *rodillos*, *balancines*, *superficies sin fricción*, *eslabones o bielas* y *cables cortos*, *collarines sobre barras sin fricción* y *pernos sin fricción en ranuras lisas*. Cada uno de estos apoyos y conexiones pueden impedir el movimiento sólo en una dirección. Los apoyos mencionados anteriormente junto con las reacciones producen se muestran en la figura 4.1. Cada una de estas reacciones involucra a una *sola incógnita*, es decir, la magnitud de la reacción; dicha magnitud debe representarse con una letra apropiada. La línea de acción de la reacción es conocida y debe indicarse con claridad en el diagrama de cuerpo libre. El sentido de la reacción debe ser como se muestra en la figura 4.1 para los casos de una superficie sin fricción (hacia el cuerpo libre) o de un cable (alejándose del cuerpo libre). La reacción puede estar dirigida en uno u otro sentido en el caso de rodillos de doble carril, eslabones, collarines sobre barras y pernos en ranuras. Por lo general, los rodillos de un carril y los balancines son reversibles y, por tanto, las reacciones correspondientes también pueden estar dirigidas en uno u otro sentido.

2. *Reacciones equivalentes a una fuerza de magnitud y dirección desconocidas*. Los apoyos y las conexiones que originan reacciones de este tipo incluyen *pernos sin fricción en orificios ajustados*, *articulaciones o bisagras y superficies rugosas*. Éstos pueden impedir la traslación del cuerpo rígido en todas direcciones pero no pueden impedir la rotación del mismo con respecto a la conexión. Las reacciones de este grupo involucran *dos incógnitas* que usualmente se representan por sus componentes x y y. En el caso de una superficie rugosa, la componente perpendicular a la superficie debe dirigirse alejándose de ésta.

3. *Reacciones equivalentes a una fuerza y un par*. Estas reacciones se originan por *apoyos fijos*, los cuales se oponen a cualquier movimiento del cuerpo libre y, por tanto, lo restringen por completo. Los soportes fijos producen fuerzas sobre toda la superficie de contacto; sin embargo, estas fuerzas forman un sistema que se puede reducir a una fuerza y un par. Las reacciones de este grupo involucran *tres incógnitas*, las cuales consisten en las dos componentes de la fuerza y en el momento del par.

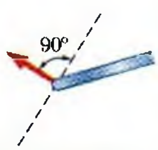
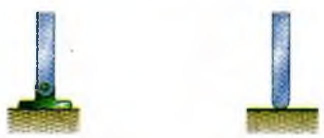
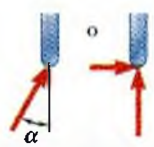
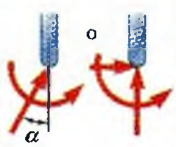
Apoyo o conexión	Reacción	Número de incógnitas
 Rodillos o patines; Balancín; Superficie sin fricción	 Fuerza con línea de acción conocida	1
 Cable corto; Eslabón corto	 Fuerza con línea de acción conocida	1
 Collarín sobre una barra sin fricción; Perno sin fricción en una ranura lisa	 Fuerza con línea de acción conocida	1
 Perno sin fricción, articulación o bisagra; Superficie rugosa	 Fuerza de dirección desconocida	2
 Apoyo fijo	 Fuerza y par	3

Figura 4.1 Reacciones en apoyos y conexiones.

Cuando el sentido de una fuerza o un par desconocido no es evidente, no se debe intentar determinarlo. En lugar de ello, se supondrá arbitrariamente el sentido de la fuerza o el par; el signo de la suposición obtenida indicará si la respuesta fue correcta o no.

4.4. EQUILIBRIO DE UN CUERPO RÍGIDO EN DOS DIMENSIONES

Las condiciones establecidas en la sección 4.1 para el equilibrio de un cuerpo rígido se vuelven más simples para casos de estructuras bidimensionales. Al seleccionar a los ejes x y y en el plano de la estructura, se tiene que

$$F_z = 0 \qquad M_x = M_y = 0 \qquad M_z = M_O$$

para cada una de las fuerzas aplicadas sobre la estructura. Por tanto, las seis ecuaciones de equilibrio derivadas en la sección 4.1 se reducen a

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_O = 0 \tag{4.4}$$

y a las tres identidades triviales $0 = 0$. Como se debe cumplir que $\Sigma M_O = 0$ sin importar la elección del origen O, se pueden escribir las ecuaciones de equilibrio para una estructura bidimensional en la forma más general

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_A = 0 \tag{4.5}$$

donde A es cualquier punto en el plano de la estructura. Las tres ecuaciones obtenidas pueden resolverse para un máximo de *tres incógnitas*.

En la sección anterior se vio que las fuerzas desconocidas incluyen reacciones y que el número de incógnitas correspondientes a una reacción depende del tipo de apoyo o conexión que origina dicha reacción. Como se hizo referencia en la sección 4.3, se observa que las ecuaciones de equilibrio (4.5) pueden ser empleadas para determinar las reacciones asociadas con dos rodillos y un cable, un apoyo fijo o un rodillo y un perno en un orificio ajustado, etcétera.

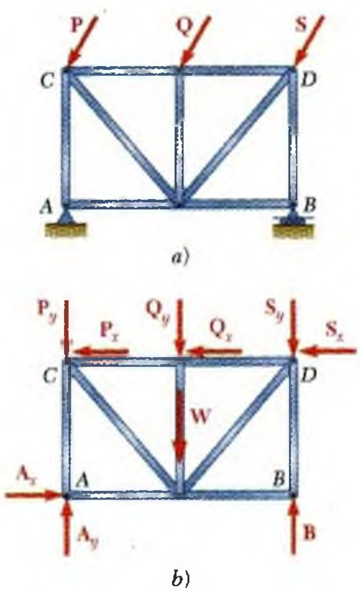


Figura 4.2

Observe la figura 4.2*a*, en la cual la armadura mostrada está sometida a las fuerzas dadas **P**, **Q** y **S**. La armadura se mantiene en su lugar por medio de un perno en A y un rodillo en B. El perno impide que el punto A se mueva ejerciendo una fuerza sobre la armadura que se puede descomponer en las componentes $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$; por su parte, el rodillo impide que la armadura rote con respecto a A ejerciendo la fuerza vertical **B**. El diagrama de cuerpo libre de la armadura se muestra en la figura 4.2*b*; éste incluye tanto las reacciones $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$ y **B** como las fuerzas aplicadas **P**, **Q** y **S** y el peso **W** de la armadura. Para expresar que la suma de los momentos con respecto a A, que implica todas las fuerzas mostradas en la figura 4.2*b*, es igual a cero, se escribe la ecuación $\Sigma M_A = 0$, la cual puede utilizarse para determinar la magnitud B puesto que dicha ecuación no contiene a A_x o a A_y. Después, para indicar que la suma de las componentes x y y de las fuerzas son iguales a cero, se escriben las ecuaciones $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$, a partir de las cuales se obtienen, respectivamente, las componentes A_x y A_y.

Se podría obtener una ecuación adicional expresando que la suma de momentos de las fuerzas externas con respecto a un punto distinto de A es igual a cero. Por ejemplo, se podría escribir $\Sigma M_B = 0$. Sin embargo, una expresión de ese tipo no contendría ninguna información nueva, puesto que ya se ha establecido que el sistema de fuerzas mostrado en la figura 4.2*b* es equivalente a cero. Por tanto, la ecuación adicional *no sería independiente* y no podría utilizarse para determinar una cuarta incógnita. Sin embargo, esta ecuación serviría para verificar la solución obtenida a partir de las tres ecuaciones de equilibrio originales.

A pesar de que no se pueden *poner* ecuaciones *adicionales* a las tres ecuaciones de equilibrio originales, cualquiera de éstas puede ser

reemplazada por otra. De esta forma, un sistema alternativo de ecuaciones de equilibrio es

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0 \tag{4.6}$$

donde el segundo punto con respecto al cual se suman los momentos (en este caso, el punto B) no puede estar ubicado en la línea paralela al eje y que pasa a través del punto A (figura 4.2*b*). Estas ecuaciones son condiciones suficientes para el equilibrio de la armadura. Las primeras dos ecuaciones indican que las fuerzas externas deben reducirse a una sola fuerza vertical en A. Como la tercera ecuación requiere que el momento de esta fuerza sea igual a cero con respecto al punto B, el cual no está sobre su línea de acción, la fuerza debe ser igual a cero y el cuerpo rígido está en equilibrio.

Un tercer posible conjunto de ecuaciones de equilibrio es

$$\Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0 \qquad \Sigma M_C = 0 \tag{4.7}$$

donde los puntos A, B y C no son colineales (figura 4.2*b*). La primera ecuación requiere que las fuerzas externas se reduzcan a una sola fuerza en A; la segunda ecuación requiere que esta fuerza pase a través de B y la tercera ecuación requiere que pase a través de C. Como los puntos A, B y C no son colineales, la fuerza debe ser igual a cero y el cuerpo rígido está en equilibrio.

La ecuación $\Sigma M_A = 0$, la cual expresa que la suma de los momentos de las fuerzas con respecto al perno A es igual a cero, posee un significado físico más definido que cualquiera de las otras dos ecuaciones (4.7). Éstas expresan una idea similar de balance pero lo hacen con respecto a puntos en los cuales el cuerpo rígido no está realmente articulado. Sin embargo, dichas ecuaciones son tan útiles como la primera y la selección de las ecuaciones de equilibrio no debe estar indebidamente influida por el significado físico de las mismas. De hecho, en la práctica será deseable elegir ecuaciones de equilibrio que contengan una sola incógnita, puesto que así se elimina la necesidad de resolver ecuaciones simultáneas. Es posible obtener ecuaciones de una sola incógnita al sumar momentos con respecto al punto de intersección de las líneas de acción de dos fuerzas desconocidas o, si dichas fuerzas son paralelas, sumar las componentes perpendiculares a esa dirección común. Por ejemplo, en la figura 4.3, en la cual la armadura mostrada se sostiene por rodillos en A y B y por un eslabón corto en D, las reacciones en A y B pueden eliminarse con la suma de las componentes x. Las reacciones en A y D se eliminan al sumar momentos con respecto a C, y las reacciones en B y D sumando momentos con respecto a D. Las ecuaciones obtenidas son

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma M_C = 0 \qquad \Sigma M_D = 0$$

Cada una de estas ecuaciones contiene una sola incógnita.

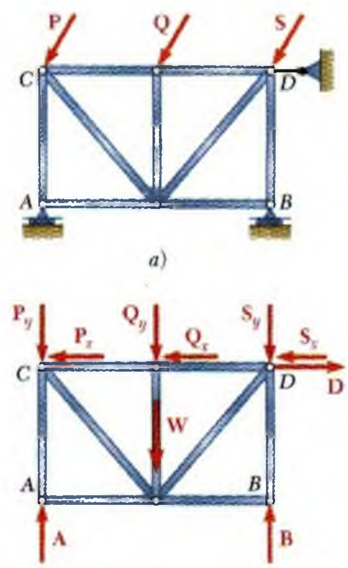


Figura 4.3

4.5. REACCIONES ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS. RESTRICCIONES PARCIALES

En los dos ejemplos considerados en la sección anterior (figuras 4.2 y 4.3), los tipos de apoyos usados fueron tales que era imposible que el cuerpo rígido se moviera bajo la acción de las cargas dadas o bajo cualquier otra condición de carga. En casos como éstos, se dice que el cuerpo rígido tiene *restricción completa*. También se debe recordar que las

reacciones correspondientes a estos apoyos involucraban *tres incógnitas*, las cuales podían determinarse resolviendo las tres ecuaciones de equilibrio. Cuando se presenta una situación como ésta, se dice que son reacciones *estáticamente determinadas*.

En la figura 4.4*a* la armadura mostrada se sostiene por pernos en A y B. Estos apoyos proporcionan más restricciones de las necesarias para evitar que la armadura se mueva bajo la acción de las cargas dadas o bajo cualquier otra condición de carga. También se observa a partir del diagrama de cuerpo libre de la figura 4.4*b* que las reacciones correspondientes involucran *cuatro incógnitas*. Puesto que, como se señaló en la sección 4.4, sólo están disponibles tres ecuaciones de equilibrio independientes, se tienen *más incógnitas que ecuaciones*; por tanto, no se pueden determinar todas las incógnitas. Mientras que las ecuaciones $\Sigma M_A = 0$ y $\Sigma M_B = 0$ proporcionan, respectivamente, las componentes verticales B_y y A_y, la ecuación $\Sigma F_x = 0$ sólo proporciona la suma $A_x + B_x$ de las componentes horizontales de las reacciones en A y B. Se dice que las componentes A_x y B_x son *estáticamente indeterminadas*. Éstas pueden determinarse considerando las deformaciones ocasionadas en la armadura por la condición de carga dada, pero este método está fuera del alcance de la estática y corresponde al estudio de la mecánica de materiales.

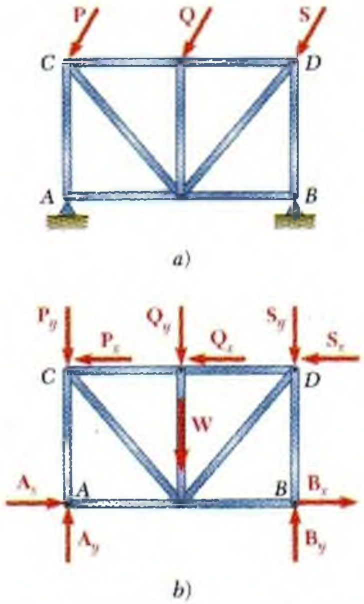


Figura 4.4 Reacciones estáticamente indeterminadas.

Los apoyos usados para sostener la armadura mostrada en la figura 4.5*a* consisten en los rodillos en A y B. Es evidente que las restricciones proporcionadas por estos apoyos no son suficientes para impedir que la armadura se mueva. Aunque se impide cualquier movimiento vertical, no hay nada que evite que la armadura pueda moverse en forma horizontal. Bajo estas circunstancias, se dice que la armadura tiene *restricción parcial*.[1] En la figura 4.5*b* se observa que las reacciones en A y B sólo involucran *dos incógnitas*. Como aún se tienen que cumplir tres ecuaciones de equilibrio, hay menos incógnitas que ecuaciones y, en general, una de las ecuaciones de equilibrio no se cumplirá. Mientras que las ecuaciones $\Sigma M_A = 0$ y $\Sigma M_B = 0$ se pueden cumplir por medio de una selección apropiada de las reacciones en A y B, la ecuación $\Sigma F_x = 0$ no será satisfecha a menos que la suma de las componentes horizontales de las fuerzas aplicadas sea igual a cero. Por tanto, no se puede mantener el equilibrio de la armadura de la figura 4.5 bajo condiciones generales de carga.

De lo anterior se concluye que si un cuerpo rígido tiene restricción completa y si las reacciones en sus apoyos son estáticamente determinadas, *entonces habrá tantas incógnitas como ecuaciones de equilibrio*. Cuando esta condición *no se cumple*, se tiene la certeza de que el cuerpo rígido no está completamente restringido o de que las reacciones en sus apoyos no son estáticamente determinadas; además, también es posible que el cuerpo rígido no esté completamente restringido y que las reacciones sean estáticamente indeterminadas.

Sin embargo, se debe señalar que la condición ya mencionada, aunque es *necesaria, no es suficiente*. En otras palabras, el hecho de que el número de incógnitas sea igual al número de ecuaciones no garantiza que el cuerpo tenga restricción completa o que las reacciones en sus apoyos son estáticamente determinadas. Observe la figura 4.6*a* en la cual la armadura mostrada se sostiene por medio de rodillos en A,

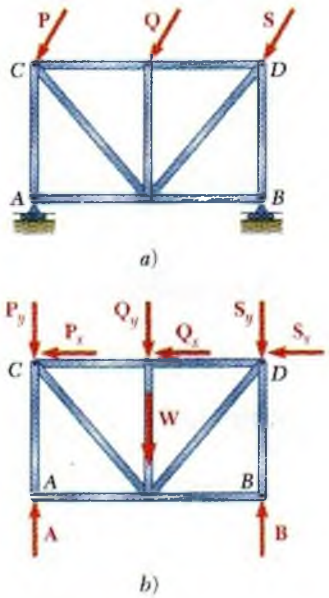


Figura 4.5 Restricciones parciales.

[1] En ocasiones se hace referencia a los cuerpos con restricción parcial como *inestables*. Sin embargo, para evitar confusiones entre este tipo de inestabilidad, debida a un número insuficiente de restricciones y el tipo de inestabilidad considerada en el capítulo 10, la cual está relacionada con el comportamiento de un cuerpo rígido cuando se perturba su equilibrio, se reservará el uso de las palabras *estable* e *inestable* para este último caso.

B y E. A pesar de que existen tres reacciones desconocidas **A**, **B** y **E** (figura 4.6*b*), la ecuación $\Sigma F_x = 0$ no se cumplirá a menos que la suma de las componentes horizontales de las fuerzas aplicadas resulte igual a cero. Aunque hay un número suficiente de restricciones, éstas no están ubicadas de manera apropiada y no existe ningún impedimento para que la armadura se mueva horizontalmente. En este caso, se dice que la armadura está *impropiamente restringida*. Como sólo quedan dos ecuaciones de equilibrio para determinar tres incógnitas, las reacciones serán estáticamente indeterminadas. Por tanto, las reacciones impropias también producen indeterminación estática.

Otro ejemplo de restricciones impropias —y de indeterminación estática— lo proporciona la armadura mostrada en la figura 4.7, la cual está sostenida por un perno en A y por rodillos en B y C, que en conjunto involucran cuatro incógnitas. Como sólo se dispone de tres ecuaciones de equilibrio independientes, las reacciones en los apoyos son estáticamente indeterminadas. Por otro lado, obsérvese que no se puede cumplir la ecuación $\Sigma M_A = 0$ bajo condiciones generales de carga puesto que las líneas de acción de las reacciones **B** y **C** pasan a través de A. Entonces, se concluye que la armadura puede rotar alrededor de A y, por ende, está impropiamente restringida.[1]

Los ejemplos de las figuras 4.6 y 4.7 conducen a la conclusión de que *un cuerpo rígido está impropiamente restringido siempre que los apoyos estén ubicados de tal forma que las reacciones sean concurrentes o paralelas*,[1] aunque proporcionen un número suficiente de reacciones.

En resumen, para asegurarse de que un cuerpo rígido bidimensional está completamente restringido y de que las reacciones en sus apoyos son estáticamente determinadas, se debe verificar que las reacciones involucren tres —y sólo tres— incógnitas y que los apoyos estén ubicados de manera que no requieran que las reacciones sean concurrentes o paralelas.

Los apoyos que involucran reacciones estáticamente indeterminadas deben utilizarse con cuidado en el *diseño* de estructuras y con pleno conocimiento de los problemas que pueden causar. Por otra parte, es usual que el *análisis* de estructuras con reacciones estáticamente indeterminadas se realice en forma parcial por medio de los métodos de la estática. Por ejemplo, en el caso de la armadura de la figura 4.4, las componentes verticales de las reacciones en A y B se obtuvieron a partir de las ecuaciones de equilibrio.

Por razones obvias, los apoyos que originan restricciones parciales o impropias se deben evitar en el diseño de estructuras estacionarias. Sin embargo, una estructura restringida en forma parcial o impropia no necesariamente se colapsará; bajo ciertas condiciones de carga en particular, se puede mantener el equilibrio. Por ejemplo, las armaduras de las figuras 4.5 y 4.6 estarán en equilibrio si las fuerzas aplicadas **P**, **Q** y **S** son verticales. Además, las estructuras diseñadas para moverse sólo deben estar parcialmente restringidas. Por ejemplo, un carro de ferrocarril sería de poca utilidad si estuviera completamente restringido por tener sus frenos aplicados en forma permanente.

[1] La rotación de la armadura con respecto a A requiere algo de "juego" en los apoyos en B y C. En la práctica siempre existirá dicho juego. Además, se observa que si el juego es mínimo, el desplazamiento de los rodillos B y C, y por tanto, las distancias desde A hasta las líneas de acción de las reacciones **B** y **C**, también serán pequeñas. Así, la ecuación $\Sigma M_A = 0$ requiere que **B** y **C** sean muy grandes, lo cual puede causar la falla de los apoyos en B y C.

[1] Debido a que esta situación surge por un arreglo o *geometría* inadecuados de los apoyos, comúnmente se hace referencia a la misma como *inestabilidad geométrica*.

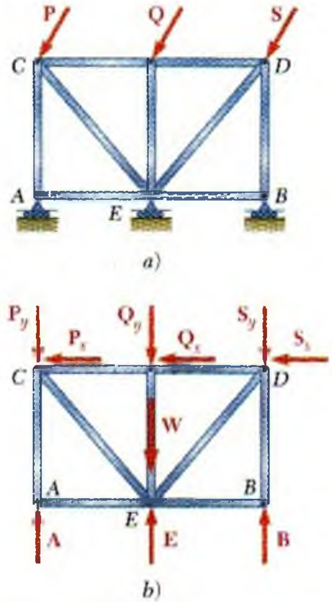


Figura 4.6 Restricciones impropias.

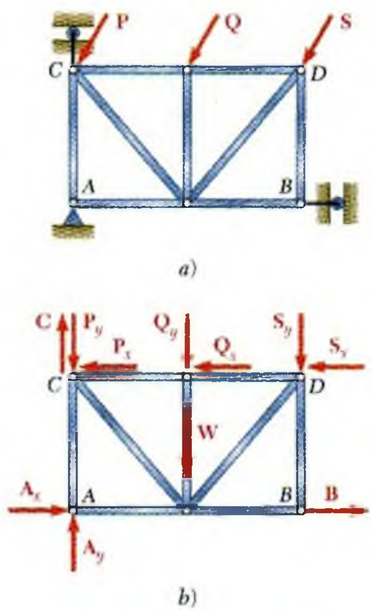
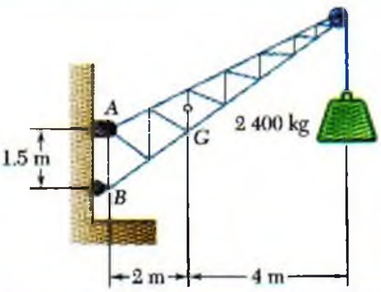


Figura 4.7 Restricciones impropias.

PROBLEMA RESUELTO 4.1



Una grúa fija tiene una masa de 1 000 kg y se usa para levantar una caja de 2 400 kg. La grúa se mantiene en su lugar por medio de un perno en A y un balancín en B. El centro de gravedad de la grúa está ubicado en G. Determine las componentes de las reacciones en A y B.

SOLUCIÓN

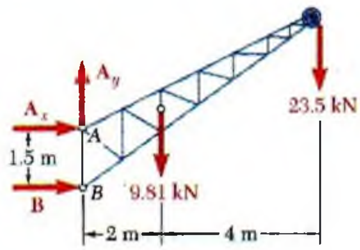


Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja un diagrama de cuerpo libre de la grúa. Si multiplica las masas de la grúa y de la caja por $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, se obtienen sus respectivos pesos, esto es, 9 810 N o 9.81 kN y 23 500 N o 23.5 kN. La reacción en el perno A es una fuerza con dirección desconocida; ésta se representa por sus componentes $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$. La reacción en el balancín B es perpendicular a su superficie; por tanto, dicha reacción es horizontal. Se supone que $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$ y $\mathbf{B}$ actúan en las direcciones mostradas en la figura.

Determinación de *B*. Se expresa que la suma de los momentos de todas las fuerzas externas con respecto al punto A es igual a cero. La ecuación que se obtiene no contiene a A_x ni a A_y puesto que los momentos de $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$ con respecto a A son iguales a cero. Si se multiplica la magnitud de cada fuerza por su distancia perpendicular a partir de A, se escribe

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \qquad B(1.5 \text{ m}) - (9.81 \text{ kN})(2 \text{ m}) - (23.5 \text{ kN})(6 \text{ m}) = 0$$

$$B = +107.1 \text{ kN} \qquad \mathbf{B} = 107.1 \text{ kN} \rightarrow \blacktriangleleft$$

Como el resultado es positivo, la reacción está dirigida en la forma que se supuso.

Determinación de $\mathbf{A}_x$. La magnitud de $\mathbf{A}_x$ se determina con la suma de las componentes horizontales de todas las fuerzas externas, la cual es igual a cero.

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \qquad A_x + B = 0$$

$$A_x + 107.1 \text{ kN} = 0$$

$$A_x = -107.1 \text{ kN} \qquad \mathbf{A}_x = 107.1 \text{ kN} \leftarrow \blacktriangleleft$$

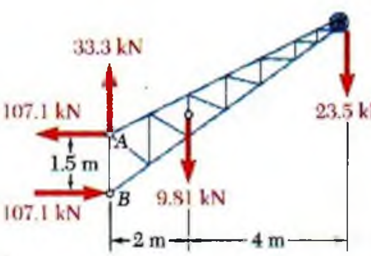
Como el resultado es negativo, el sentido de $\mathbf{A}_x$ es opuesto al que se había supuesto originalmente.

Determinación de A_y. La suma de las componentes verticales también debe ser igual a cero

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad A_y - 9.81 \text{ kN} - 23.5 \text{ kN} = 0$$

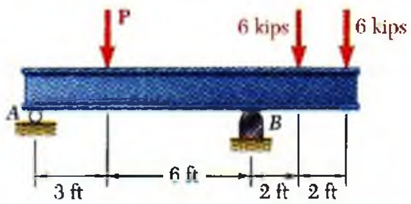
$$A_y = +33.3 \text{ kN} \qquad \mathbf{A}_y = 33.3 \text{ kN} \uparrow \blacktriangleleft$$

Sumando vectorialmente las componentes $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$ se encuentra que la reacción en A es 112.2 kN ◣17.3°.



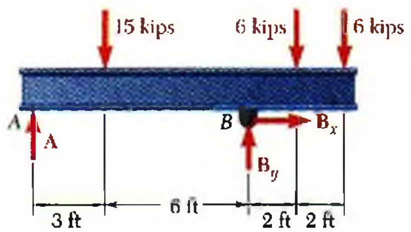
Comprobación. Los valores obtenidos para las reacciones se pueden comprobar recordando que la suma de los momentos de todas las fuerzas externas con respecto a cualquier punto debe ser igual a cero. Por ejemplo, considerando al punto B, se escribe

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = -(9.81 \text{ kN})(2 \text{ m}) - (23.5 \text{ kN})(6 \text{ m}) + (107.1 \text{ kN})(1.5 \text{ m}) = 0$$



PROBLEMA RESUELTO 4.2

Se aplican tres cargas a una viga como se muestra en la figura. La viga se apoya en un rodillo en A y en un perno en B. Sin tomar en cuenta el peso de la viga, determine las reacciones en A y B cuando $P = 15$ kips.



SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja un diagrama de cuerpo libre de la viga. La reacción en A es vertical y se representa con **A**. La reacción en B se representa con las componentes $\mathbf{B}_x$ y $\mathbf{B}_y$. Se supone que cada componente actúa en la dirección mostrada en la figura.

Ecuaciones de equilibrio. Se escriben las tres ecuaciones de equilibrio siguientes y se resuelven para las reacciones señaladas:

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0$: $\quad B_x = 0 \qquad \mathbf{B}_x = 0$ ◀

$+\circlearrowleft\Sigma M_A = 0$:

$$-(15 \text{ kips})(3 \text{ ft}) + B_y(9 \text{ ft}) - (6 \text{ kips})(11 \text{ ft}) - (6 \text{ kips})(13 \text{ ft}) = 0$$

$$B_y = +21.0 \text{ kips} \qquad \mathbf{B}_y = 21.0 \text{ kips} \uparrow$$ ◀

$+\circlearrowleft\Sigma M_B = 0$:

$$-A(9 \text{ ft}) + (15 \text{ kips})(6 \text{ ft}) - (6 \text{ kips})(2 \text{ ft}) - (6 \text{ kips})(4 \text{ ft}) = 0$$

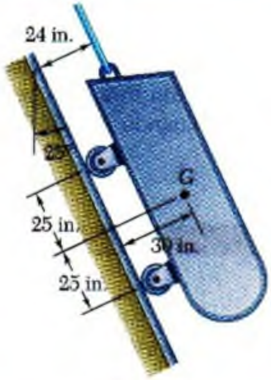
$$A = +6.00 \text{ kips} \qquad \mathbf{A} = 6.00 \text{ kips} \uparrow$$ ◀

Comprobación. Se comprueban los resultados sumando las componentes verticales de todas las fuerzas externas.

$$+\uparrow\Sigma F_y = +6.00 \text{ kips} - 15 \text{ kips} + 21.0 \text{ kips} - 6 \text{ kips} - 6 \text{ kips} = 0$$

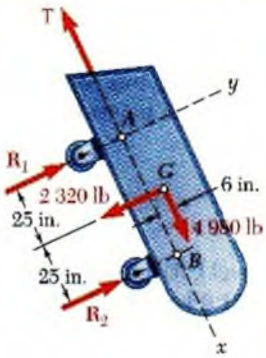
Observación. En este problema las reacciones en A y B son verticales; sin embargo, las razones de lo anterior son diversas. En A la viga se apoya en un rodillo; por tanto, la reacción no puede tener una componente horizontal. En B, la componente horizontal de la reacción es igual a cero debido a que se debe cumplir la ecuación de equilibrio $\Sigma F_x = 0$ y a que ninguna de las otras fuerzas que actúan sobre la viga tiene una componente horizontal.

A primera vista se hubiera podido observar que la reacción en B era vertical y se pudo haber omitido la componente horizontal $\mathbf{B}_x$. Sin embargo, esta práctica no es conveniente. Al seguirla, se corre el riesgo de olvidar a la componente $\mathbf{B}_x$ cuando las condiciones de carga requieran su presencia (esto es, cuando se incluye una carga horizontal). Además, se encontró que la componente $\mathbf{B}_x$ es igual a cero utilizando y resolviendo una ecuación de equilibrio, $\Sigma F_x = 0$. Al dar por hecho que $\mathbf{B}_x$ es igual a cero, es posible no percatarse de que en realidad se ha hecho uso de esta ecuación y, por tanto, se podría perder la relación del número de ecuaciones disponibles para resolver el problema.



PROBLEMA RESUELTO 4.3

Un carro de carga se encuentra en reposo sobre un carril que forma un ángulo de 25° con respecto a la vertical. El peso total del carro y su carga es de 5 500 lb y éste actúa en un punto que se encuentra a 30 in. del carril y que es equidistante a los dos ejes. El carro se sostiene por medio de un cable que está unido a éste en un punto que se encuentra a 24 in. del carril. Determine la tensión en el cable y la reacción en cada par de ruedas.



SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre del carro. La reacción en cada rueda es perpendicular al carril y la fuerza de tensión **T** es paralela a éste. Por conveniencia se selecciona al eje x paralelo al carril y al eje y perpendicular al mismo. Entonces, el peso de 5 500 lb se descompone en sus componentes x y y.

$$W_x = +(5\,500 \text{ lb}) \cos 25° = +4\,980 \text{ lb}$$
$$W_y = -(5\,500 \text{ lb}) \text{ sen } 25° = -2\,320 \text{ lb}$$

Ecuaciones de equilibrio. Se toman momentos con respecto a A para eliminar a **T** y a $\mathbf{R}_1$ de los cálculos.

$$+\circlearrowleft\Sigma M_A = 0: \quad -(2\,320 \text{ lb})(25 \text{ in.}) - (4\,980 \text{ lb})(6 \text{ in.}) + R_2(50 \text{ in.}) = 0$$
$$R_2 = +1\,758 \text{ lb} \qquad \mathbf{R}_2 = 1\,758 \text{ lb} \nearrow \blacktriangleleft$$

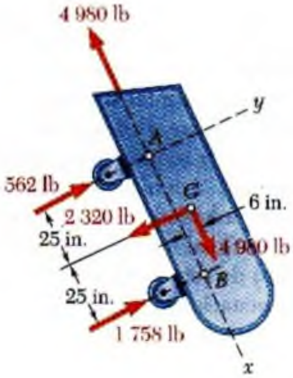
Ahora, tomando momentos con respecto a B para eliminar a **T** y a $\mathbf{R}_2$ de los cálculos, se escribe

$$+\circlearrowleft\Sigma M_B = 0: \quad (2\,320 \text{ lb})(25 \text{ in.}) - (4\,980 \text{ lb})(6 \text{ in.}) - R_1(50 \text{ in.}) = 0$$
$$R_1 = +562 \text{ lb} \qquad \mathbf{R}_1 = 562 \text{ lb} \nearrow \blacktriangleleft$$

El valor de T se obtiene a partir de

$$\searrow+\Sigma F_x = 0: \quad 4\,980 \text{ lb} - T = 0$$
$$T = +4\,980 \text{ lb} \qquad \mathbf{T} = 4\,980 \text{ lb} \nwarrow \blacktriangleleft$$

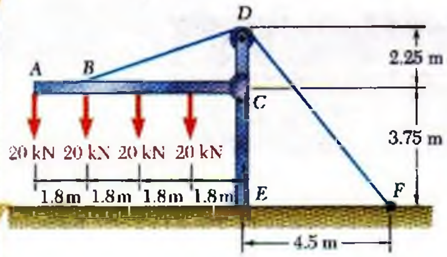
Los valores encontrados para las reacciones se muestran en el croquis adjunto.



Comprobación. Para corroborar los cálculos se escribe

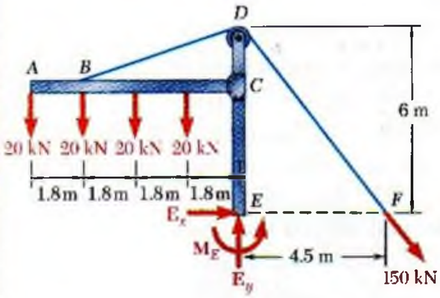
$$\nearrow+\Sigma F_y = +562 \text{ lb} + 1\,758 \text{ lb} - 2\,320 \text{ lb} = 0$$

También pudo haberse verificado la solución calculando los momentos con respecto a cualquier punto distinto de A o de B.



PROBLEMA RESUELTO 4.4

El marco mostrado en la figura sostiene una parte del techo de un pequeño edificio. Se sabe que la tensión en el cable es de 150 kN, determine la reacción en el extremo fijo *E*.



SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre del marco junto con el cable *BDF*. La reacción en el extremo fijo *E* está representada con las componentes de fuerza $\mathbf{E}_x$ y $\mathbf{E}_y$ y por el par $\mathbf{M}_E$. Las otras fuerzas que actúan sobre el diagrama de cuerpo libre son las cuatro cargas de 20 kN y la fuerza de 150 kN ejercida en el extremo *F* del cable.

Ecuaciones de equilibrio. Observe que $DF = \sqrt{(4.5\text{ m})^2 + (6\text{ m})^2} = 7.5$ m, se escribe

$$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0: \qquad E_x + \frac{4.5}{7.5}(150\text{ kN}) = 0$$

$$E_x = -90.0\text{ kN} \qquad \mathbf{E}_x = 90.0\text{ kN} \leftarrow \blacktriangleleft$$

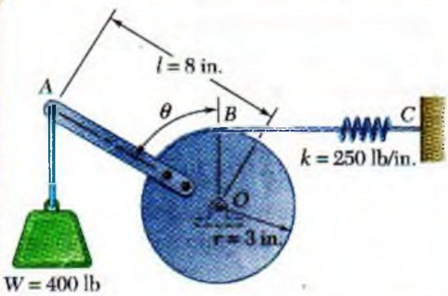
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \qquad E_y - 4(20\text{ kN}) - \frac{6}{7.5}(150\text{ kN}) = 0$$

$$E_y = +200\text{ kN} \qquad \mathbf{E}_y = 200\text{ kN} \uparrow \blacktriangleleft$$

$$+\circlearrowleft\Sigma M_E = 0: \qquad (20\text{ kN})(7.2\text{ m}) + (20\text{ kN})(5.4\text{ m}) + (20\text{ kN})(3.6\text{ m})$$

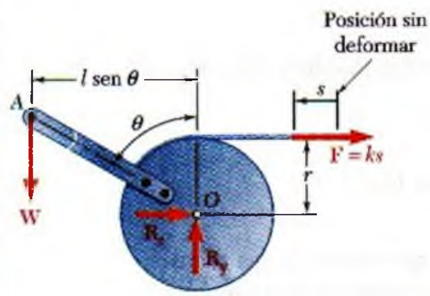
$$+ (20\text{ kN})(1.8\text{ m}) - \frac{6}{7.5}(150\text{ kN})(4.5\text{ m}) + M_E = 0$$

$$M_E = +180.0\text{ kN}\cdot\text{m} \qquad \mathbf{M}_E = 180.0\text{ kN}\cdot\text{m}\circlearrowleft \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 4.5

Un peso de 400 lb se une a la palanca mostrada en la figura en el punto *A*. La constante del resorte *BC* es $k = 250$ lb/in. y éste no se encuentra deformado cuando $\theta = 0$. Determine la posición de equilibrio.



SOLUCIÓN

Diagrama del cuerpo libre. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la palanca junto al cilindro. Represente con *s* la elongación del resorte a partir de la posición en que éste no se encuentra deformado y observe que $s = r\theta$, se tiene que $F = ks = kr\theta$.

Ecuación de equilibrio. Sumando los momentos de **W** y de **F** con respecto a *O*, se escribe

$$+\circlearrowleft\Sigma M_O = 0: \qquad Wl\text{ sen }\theta - r(kr\theta) = 0 \qquad \text{sen }\theta = \frac{kr^2}{Wl}\theta$$

Sustituyendo los datos numéricos que fueron proporcionados se obtiene

$$\text{sen }\theta = \frac{(250\text{ lb/in.})(3\text{ in.})^2}{(400\text{ lb})(8\text{ in.})}\theta \qquad \text{sen }\theta = 0.703\theta$$

Al resolver numéricamente, se encuentra $\qquad \theta = 0 \qquad \theta = 80.3° \blacktriangleleft$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Se vio que las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido que se encuentra en equilibrio forman un sistema equivalente a cero. Para resolver un problema de equilibrio la primera tarea consiste en dibujar un *diagrama de cuerpo libre* que sea claro y de tamaño razonable en el cual se muestren todas las fuerzas externas. Se deben incluir tanto las fuerzas conocidas como las desconocidas.

Para un cuerpo rígido bidimensional, las reacciones en los apoyos pueden involucrar una, dos o tres incógnitas dependiendo del tipo de apoyo de que se trate (figura 4.1). Un diagrama de cuerpo libre es esencial para resolver de manera correcta un problema. Nunca se debe continuar con la solución de un problema mientras no se esté seguro de que en el diagrama de cuerpo libre están presentes todas las cargas, todas las reacciones y el peso del cuerpo (cuando esto último sea apropiado).

Cuando se construya el diagrama de cuerpo libre será necesario asignar direcciones a las reacciones desconocidas. Se sugiere suponer siempre que estas fuerzas actúan en una dirección positiva, de forma que las respuestas positivas siempre impliquen fuerzas actuando en una dirección positiva, mientras que los resultados negativos impliquen siempre fuerzas que actúan en una dirección negativa. De forma similar, se recomienda suponer siempre que la fuerza desconocida en una barra o cable es de tensión, de manera que una respuesta positiva siempre signifique una reacción de tensión. Por otra parte, mientras que una reacción negativa o compresiva es posible para una barra, es imposible para un cable y, por tanto, una respuesta negativa en este último caso implicará un error en la solución al problema.

1. ***Se pueden escribir tres ecuaciones de equilibrio*** y resolverlas para *tres incógnitas*. Las tres ecuaciones pueden ser

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_O = 0$$

Sin embargo, existen varios conjuntos de ecuaciones que se pueden escribir, tales como

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0$$

donde el punto B se selecciona de manera que la línea AB no sea paralela al eje y, o

$$\Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0 \qquad \Sigma M_C = 0$$

donde los puntos A, B y C no se encuentran sobre una línea recta.

2. ***Para simplificar la solución*** resulta conveniente utilizar alguna de las técnicas de solución que se presentan a continuación, siempre y cuando sean aplicables al caso en consideración.

a) Sumar momentos con respecto al punto de intersección de las líneas de acción de dos fuerzas desconocidas, se obtiene una ecuación que involucra a una sola incógnita.

b) Sumar componentes en dirección perpendicular a dos fuerzas paralelas que son desconocidas, se obtiene una ecuación que involucra a una sola incógnita.

En algunos de los siguientes problemas se pedirá determinar el *rango permisible de valores* de la carga aplicada para un conjunto de restricciones dadas, como la reacción máxima en un apoyo o la fuerza máxima en uno o más cables o barras. Para problemas de este tipo, primero se supone una situación de carga *máxima* (por ejemplo, la fuerza máxima permitida en una barra), y después se aplican las ecuaciones de equilibrio para determinar las reacciones desconocidas correspondientes y la carga aplicada. Si las reacciones satisfacen las restricciones, entonces la carga aplicada es el valor máximo o mínimo del rango permisible. Sin embargo, si la solución viola alguna restricción (por ejemplo, la fuerza en un cable es compresiva), la suposición inicial está equivocada y se debe suponer otra condición de carga (para el ejemplo previo, se asumiría que la fuerza en el cable es cero, esto es, la reacción *mínima* permitida). Entonces, el proceso de solución se repite con otra posible carga *máxima* para completar la determinación del rango permisible de valores de la carga aplicada.

Como en el capítulo 2, se recomienda escribir siempre las ecuaciones de equilibrio de la misma forma en que se usaron en los últimos problemas resueltos. Esto es, tanto las cantidades conocidas como las desconocidas se colocan en el lado izquierdo de la ecuación y su suma se establece como igual a cero.

Problemas

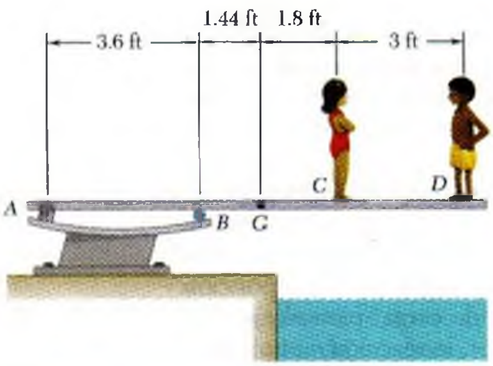


Figura P4.1

4.1 Dos niños están parados sobre un trampolín que pesa 146 lb. Si los pesos de los niños ubicados en C y D son, respectivamente, de 63 y 90 lb, determine *a*) la reacción en A, *b*) la reacción en B.

4.2 El mástil montado en un camión de 9 500 lb se usa para descargar de la plataforma la pila de tejas de 3 500 lb que se muestra en la figura. Determine la reacción en las llantas *a*) traseras, B, *b*) delanteras, C.

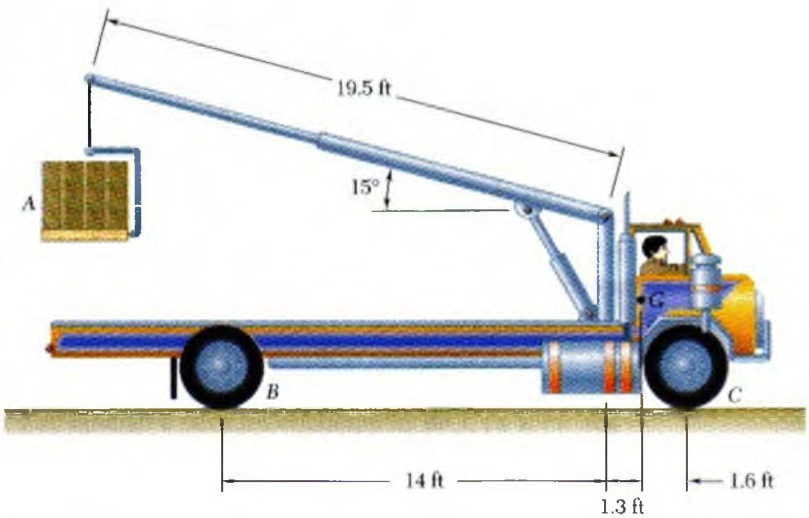


Figura P4.2

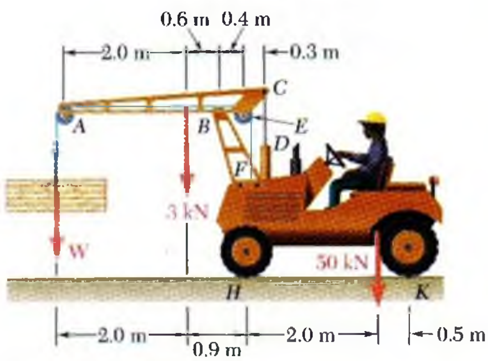


Figura P4.3 y P4.4

4.3 Una grúa móvil levanta una carga de madera que pesa $W = 25$ kN. El peso del mástil ABC y el peso combinado de la camioneta y el conductor son los indicados en la figura. Determine la reacción en las llantas *a*) delanteras, H, *b*) traseras, K.

4.4 Una grúa móvil levanta una carga de madera que pesa $W = 25$ kN. Si la tensión es de 25 kN en todos los tramos del cable AEF y el peso del mástil ABC es de 3 kN, determine, *a*) la tensión en la varilla CD, *b*) la reacción en la articulación B.

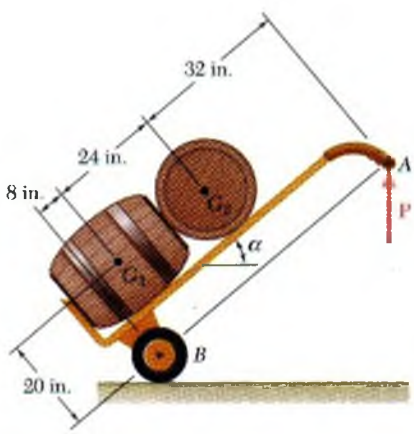


Figura *P4.5*

4.5 Para mover dos barriles con peso de 80 lb cada uno se utiliza una carretilla. Sin tomar en cuenta la masa de la carretilla, determine *a*) la fuerza vertical **P** que debe aplicarse en el manubrio para mantener el equilibrio cuando $\alpha = 35°$, *b*) la reacción correspondiente en cada una de las dos ruedas.

4.6 Resuelva el problema 4.5 si $\alpha = 40°$.

4.7 Cuando los automóviles C y D se detienen sobre un puente de dos carriles, las fuerzas que ejercen sus llantas sobre el puente son las indicadas en la figura. Determine las reacciones totales en A y B cuando *a*) $a = 2.9$ m, *b*) $a = 8.1$ m.

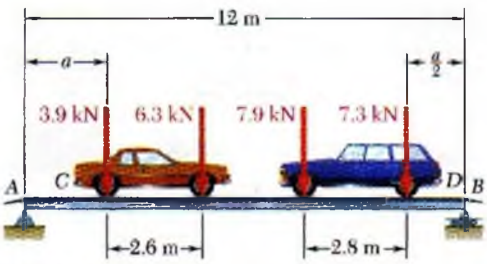


Figura P4.7 y P4.8

4.8 Cuando los automóviles C y D se detienen sobre un puente de dos carriles, las fuerzas que ejercen sus llantas sobre el puente son las indicadas en la figura. Si ambos automóviles están sobre el puente, determine *a*) el valor de a para el cual la reacción total en A es máxima, *b*) las reacciones totales correspondientes en A y B.

4.9 Una manivela tiene una barra de control conectada en A y dos cuerdas unidas a los puntos B y C, como indica la figura. Para la fuerza dada en la barra, determine el rango de valores para la tensión de la cuerda en C cuando las cuerdas deben permanecer tensas y la tensión máxima permitida en una cuerda es de 36 lb.

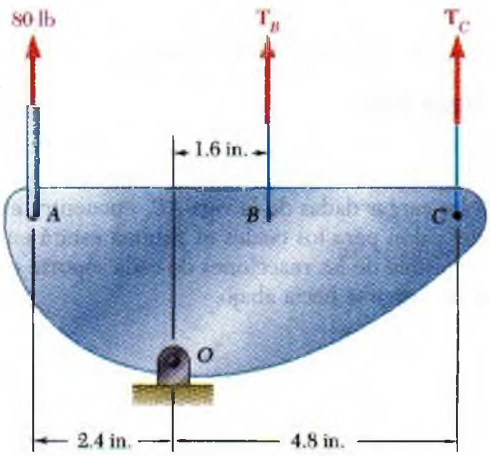


Figura P4.9

4.10 Se aplican tres cargas, como indica la figura, sobre una viga ligera sostenida mediante cables unidos en B y D. Si se ignora el peso de la viga, determine el rango de valores de Q para los cuales ninguno de los cables pierde tensión cuando $P = 0$.

4.11 Se aplican tres cargas, como indica la figura, sobre una viga ligera sostenida mediante cables unidos en B y D. Si la máxima tensión permisible en cada cable es de 12 kN y se ignora el peso de la viga, determine el rango de valores de Q para los cuales la carga está segura cuando $P = 5$ kN.

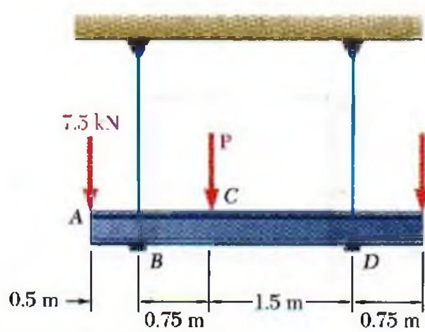


Figura P4.10 y *P4.11*

4.12 Cuatro cajas están colocadas sobre una plancha de madera de 28 lb que descansa en dos caballetes. Si las masas de las cajas *B* y *D* son, respectivamente, de 9 y 90 lb, determine el rango de valores para la masa de la caja *A* si la plancha de madera permanece en equilibrio cuando se retira la caja *C*.

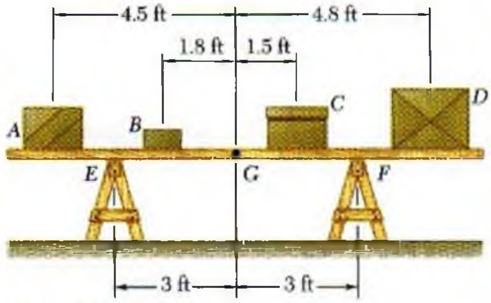


Figura P4.12

4.13 Para la viga y las cargas mostradas, determine el rango de valores de la distancia *a* para los cuales la reacción en *B* no excede los 250 N hacia abajo o los 500 N hacia arriba.

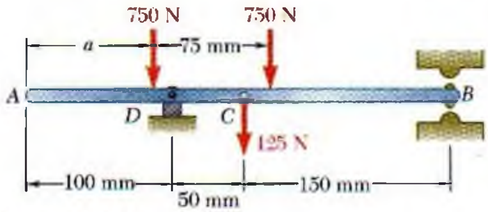


Figura P4.13

4.14 Para las cargas dadas de la viga *AB*, encuentre el rango de valores de la masa del cajón para los cuales el sistema estará en equilibrio si el valor máximo permisible de las reacciones de cada soporte es de 2.5 kN y la reacción en *E* debe dirigirse hacia abajo.

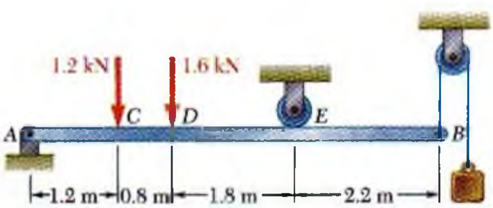


Figura *P4.14*

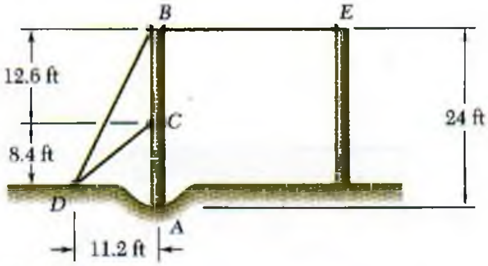


Figura P4.15

4.15 Un poste *AB* de 24 ft de largo está colocado en un hoyo y se sostiene por medio de tres cables. Si las tensiones en los cables *BD* y *BE* son, respectivamente, de 221 y 161 lb, determine *a*) la tensión en el cable *CD* y *b*) la reacción en *A*.

4.16 Un seguidor *ABCD* se mantiene contra una leva circular gracias a la acción de un resorte estirado, el cual ejerce una fuerza de 6 lb para la posición mostrada en la figura. Si la tensión en la barra *BE* es de 4 lb, determine *a*) la fuerza ejercida sobre el rodillo en *A*, *b*) la reacción en el cojinete *C*.

4.17 Determine las reacciones en *A* y *B* cuando *a*) $\alpha = 0$, *b*) $\alpha = 90°$, *c*) $\alpha = 30°$.

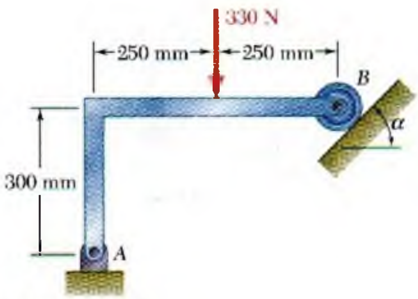


Figura *P4.17*

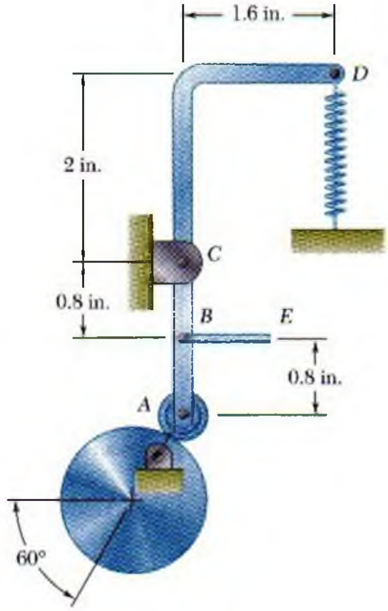


Figura P4.16

4.18 Resuelva el problema 4.17, suponiendo que la fuerza de 330 N se reemplaza con un par de 82.5 N · m en el mismo sentido que las manecillas del reloj.

4.19 La palanca *BCD* está articulada en *C* y unida a una barra de control en *B*. Si $P = 200$ N, determine *a*) la tensión en la barra *AB*, *b*) la reacción en *C*.

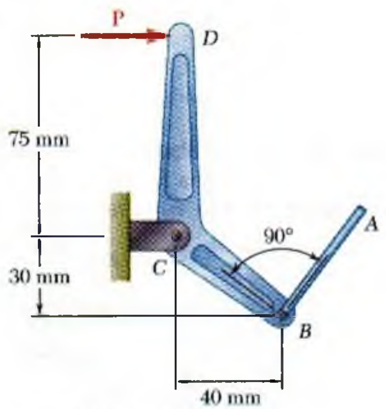


Figura P4.19 y *P4.20*

4.20 La palanca *BCD* está articulada en *C* y unida a una barra de control en *B*. Si el máximo valor permisible para la reacción en *C* es de 500 N, determine la fuerza máxima **P** que puede aplicarse en forma segura sobre *D*.

4.21 La fuerza requerida que debe ejercer la palanca *ABC* en *A* es de 3 lb. Si $\alpha = 30°$ y el resorte se ha estirado 1.2 in., determine *a*) la constante *k* del resorte, *b*) la reacción en *B*.

4.22 La fuerza requerida que debe ejercer la palanca *ABC* en *A* es de 3.6 lb. Si el resorte estirado ejecuta una fuerza de 12 lb en *C*, determine *a*) el valor de α, *b*) la reacción en *B*.

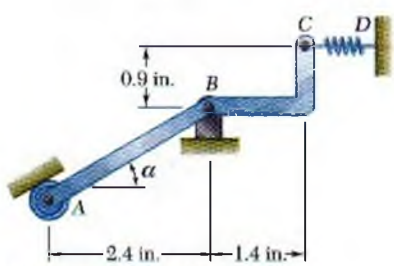


Figura P4.21 y *P4.22*

4.23 y 4.24 Una barra de acero se dobla para formar una ménsula de marco. Para cada una de las ménsulas y cargas mostradas, determine las reacciones en *A* y *B*.

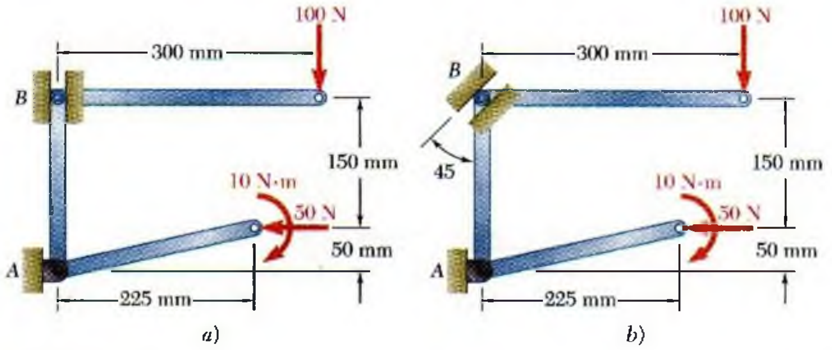


Figura P4.23

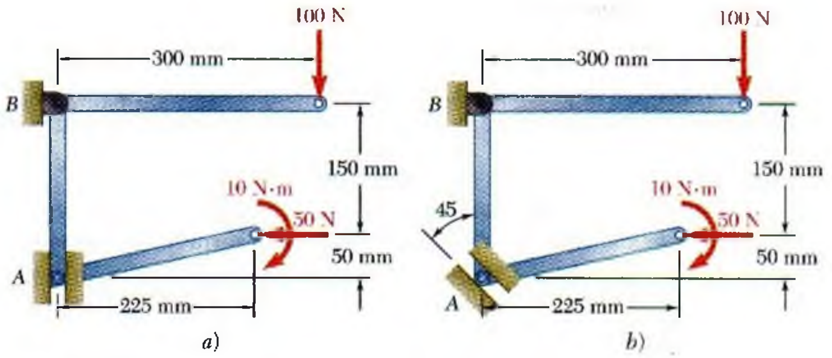


Figura P4.24

4.25 Una palanca *AB* está articulada en *C* y unida a un cable de control en *A*. Si la palanca se somete a una fuerza vertical de 60 lb en el punto *B*, determine *a*) la tensión en el cable, *b*) la reacción en *C*.

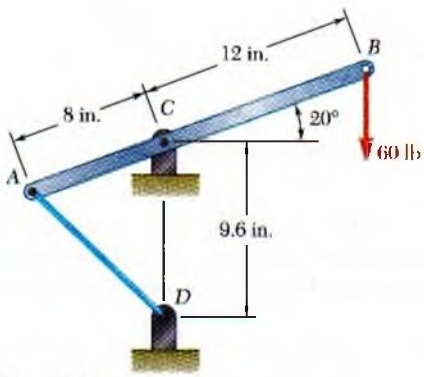


Figura *P4.25*

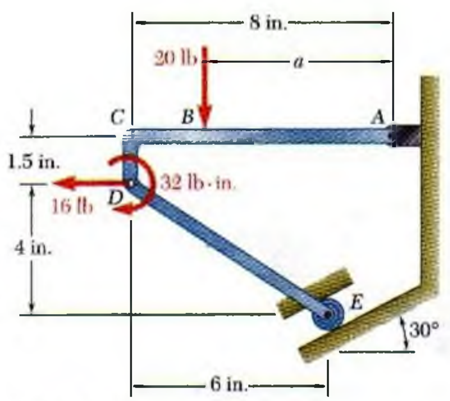


Figura P4.26

4.26 Para el marco y las cargas mostradas en la figura, determine las reacciones en *A* y *E* cuando *a*) $a = 2$ in., *b*) $a = 7.5$ in.

4.27 Un letrero se cuelga del mástil *AB* por medio de dos cadenas. El mástil está articulado en *A* y se sostiene mediante el cable *BC*. Si la tensión en las cadenas *DE* y *FH* es, respectivamente, de 225 y 135 N, y $d = 0.39$ m, determine *a*) la tensión en el cable *BC*, *b*) la reacción en *A*.

4.28 Un letrero se cuelga del mástil *AB* por medio de dos cadenas. El mástil está articulado en *A* y se sostiene mediante el cable *BC*. Si la tensión en las cadenas *DE* y *FH* es, respectivamente, de 135 y 90 N, y $d = 0.462$ m, determine *a*) la tensión en el cable *BC*, *b*) la reacción en *A*.

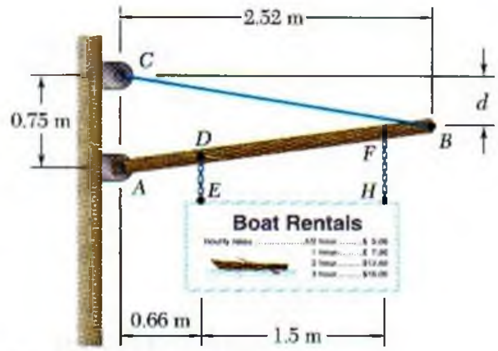


Figura P4.27 y P4.28

4.29 Determine la tensión en el cable *ABD* y la reacción en el soporte *C*.

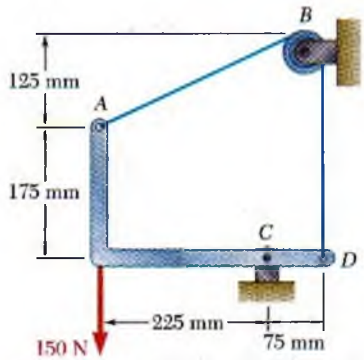


Figura P4.29

4.30 Sin tomar en cuenta la fricción y el radio de la polea, determine la tensión en el cable *BCD* y la reacción en el apoyo *A* cuando $d = 4$ in.

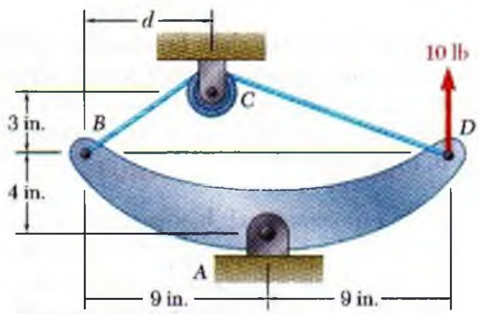


Figura P4.30 y P4.31

4.31 Sin tomar en cuenta la fricción y el radio de la polea, determine la tensión en el cable *BCD* y la reacción en el apoyo *A* cuando $d = 7.2$ in.

4.32 Sin tomar en cuenta la fricción y el radio de la polea, determine *a*) la tensión en el cable *ADB*, *b*) la reacción en *C*.

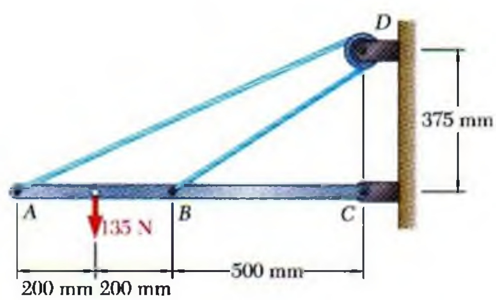


Figura P4.32

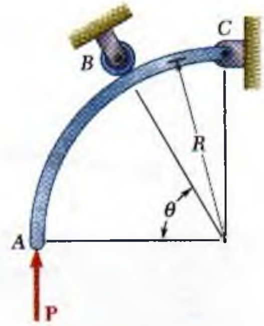


Figura P4.33 y P4.34

4.33 La barra *ABC* está doblada en forma de un arco circular de radio *R*. Determine *a*) el valor de θ para que las magnitudes de las reacciones en *B* y *C* sean iguales, *b*) las reacciones correspondientes en *B* y *C*.

4.34 La barra *ABC* está doblada en forma de un arco circular de radio *R*. Determine *a*) el valor de θ que minimiza la magnitud de la reacción en *C*, *b*) las reacciones correspondientes en *B* y *C*.

4.35 Sin tomar en cuenta la fricción, determine la tensión en el cable *ABD* y la reacción en *C* cuando $\theta = 40°$.

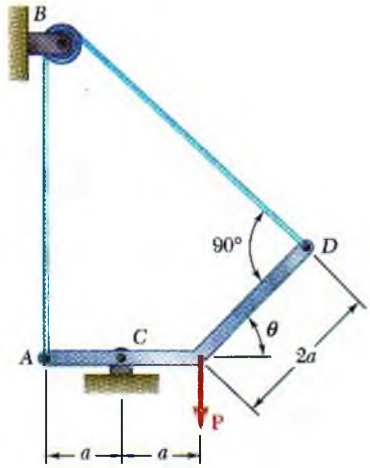


Figura P4.35 y *P4.36*

4.36 Sin tomar en cuenta la fricción, determine *a*) el valor de θ para el que la tensión en el cable *ABD* es de $3P/4$, *b*) la reacción correspondiente en *C*.

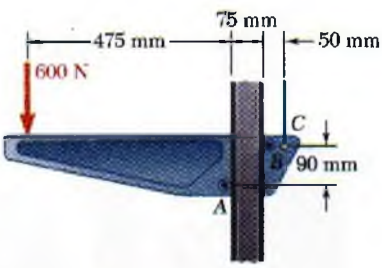


Figura P4.37

4.37 Una ménsula móvil se mantiene en reposo mediante un cable unido a *C* y los rodillos sin fricción colocados en *A* y *B*. Para la carga que se muestra en la figura, determine *a*) la tensión en el cable, *b*) las reacciones en *A* y *B*.

4.38 Con el propósito de cruzar una brecha, tres alpinistas posicionan una escalera de 3.5 m de largo, como se muestra en la figura. Sin tomar en cuenta la fricción en *A* y *B*, y sabiendo que el montañista situado en *A* ejerce una fuerza **P** horizontal sobre la punta de la escalera, determine *a*) las reacciones en *A* y *B*, *b*) la fuerza **P**.

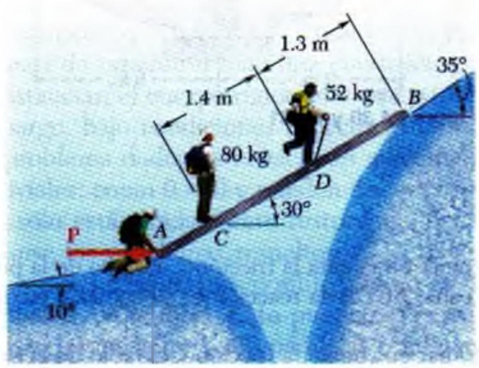


Figura P4.38

4.39 La barra $ABCD$ está doblada en forma de un arco circular de 4 in. de radio y descansa sobre superficies sin fricción en A y D. Si el collarín colocado en B se puede mover libremente por la barra y $\theta = 45°$, determine *a*) la tensión en la cuerda OB, *b*) las reacciones en A y D.

4.40 La barra $ABCD$ está doblada en forma de un arco circular de 4 in. de radio y descansa sobre superficies sin fricción en A y D. Si el collarín colocado en B se puede mover libremente por la barra, determine *a*) el valor de θ para el cual la tensión en la cuerda OB es mínima, *b*) el valor correspondiente de la tensión, *c*) las reacciones en A y D.

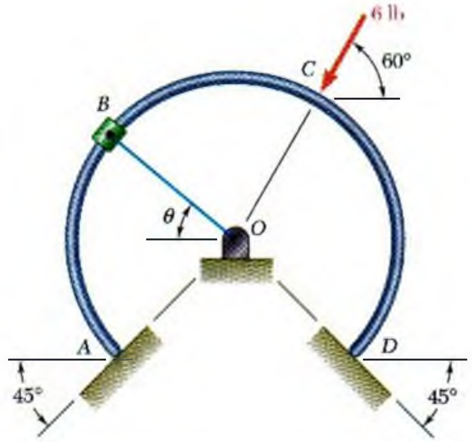


Figura P4.39 y P4.40

4.41 Una ménsula móvil se mantiene en reposo mediante un cable unido a E y los rodillos sin fricción mostrados en la figura. Si el ancho del poste FG es ligeramente menor que la distancia entre los rodillos, determine las fuerzas ejercidas sobre el poste por cada rodillo cuando $\alpha = 20°$.

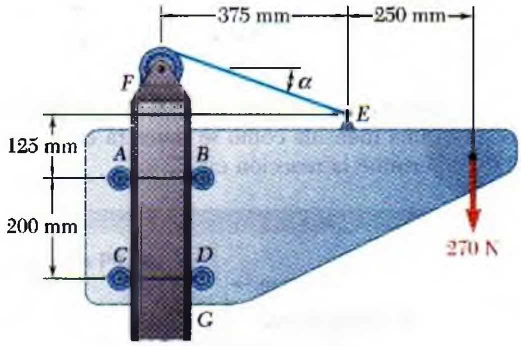


Figura P4.41

4.42 Resuelva el problema 4.41 cuando $\alpha = 30°$.

4.43 Después de cortar una ranura parabólica en la placa AD, la placa se ha colocado de manera que la ranura se ajuste a dos pernos fijos y sin fricción en B y C. La ecuación de la ranura es $y = x^2/4$, donde x y y se expresan en pulgadas. Si la fuerza de entrada $P = 1$ lb, determine *a*) la fuerza que cada perno ejerce sobre la placa, *b*) la fuerza de salida **Q**.

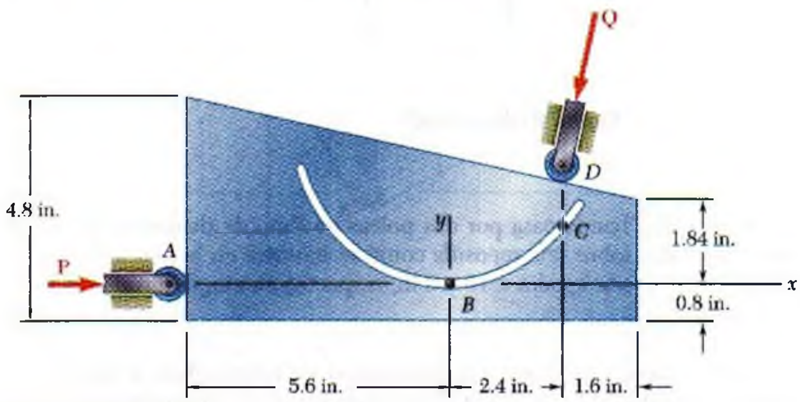


Figura *P4.43* y *P4.44*

4.44 Después de cortar una ranura parabólica en la placa AD, la placa se ha colocado de manera que la ranura se ajuste a dos pernos fijos y sin fricción en B y C. La ecuación de la ranura es $y = x^2/4$, donde x y y se expresan en pulgadas. Si la fuerza máxima permisible ejercida sobre el rodillo en el punto D es de 2 lb, determine *a*) la magnitud correspondiente de la fuerza de entrada **P**, *b*) la fuerza que cada perno ejerce sobre la placa.

4.45 Una pesa de 10 kg puede sostenerse en las tres formas diferentes que se muestran en la figura. Si las poleas tienen radio de 100 mm, determine en cada caso las reacciones en A.

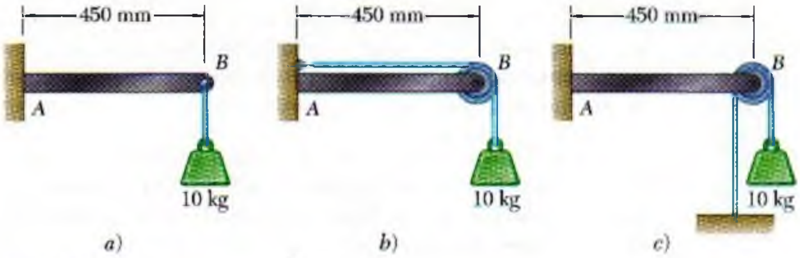


Figura P4.45

4.46 Una banda pasa por dos poleas de 2 in. de diámetro, las cuales están montadas sobre una ménsula como se muestra en la figura. Si $M = 0$ y $T_i = T_o = 12$ lb, determine la reacción en C.

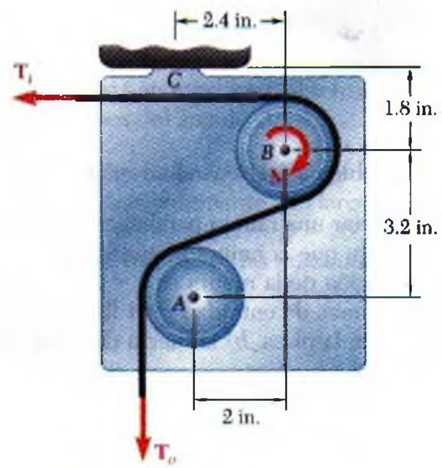


Figura P4.46 y *P4.47*

4.47 Una banda pasa por dos poleas de 2 in. de diámetro, las cuales están montadas sobre una ménsula como se muestra en la figura. Si $M = 8$ lb · in. y T_i y T_o son iguales a 16 y 8 lb, respectivamente, determine la reacción en C.

4.48 En un experimento de laboratorio, los estudiantes cuelgan los pesos que se muestran en la figura de una viga con peso insignificante. *a*) Determine la reacción en el apoyo fijo A si el extremo D de la viga no toca el apoyo E. *b*) Determine la reacción en el apoyo fijo A si el apoyo ajustable E ejerce sobre la viga una fuerza hacia arriba de 1.2 lb.

4.49 En un experimento de laboratorio, los estudiantes cuelgan las masas que se muestran en la figura de una viga con masa insignificante. Determine el rango de valores de la fuerza ejercida sobre la viga por el apoyo ajustable E para los cuales la magnitud del par en A no excede las 20 lb · in.

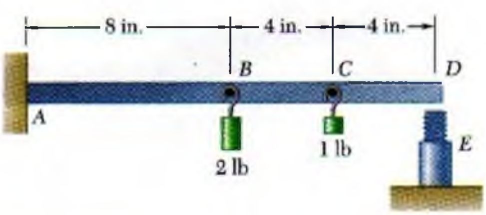


Figura P4.48 y *P4.49*

4.50 La instalación que se muestra en la figura está conformada por un elemento horizontal ABC de 5.4 kN y un elemento vertical DBE, ambos soldados en B. La instalación se utiliza para levantar un cajón de 16.2 kN a una distancia de $x = 4.8$ m desde el elemento vertical DBE. Si la tensión en el cable es de 18 kN, determine la reacción en E suponiendo que el cable *a*) se sujeta en F como indica la figura, *b*) se fija al elemento vertical en un punto localizado a 0.4 m por encima de E.

4.51 La instalación que se muestra en la figura está conformada por un elemento horizontal ABC de 5.4 kN y un elemento vertical DBE, ambos soldados en B, y se utiliza para levantar un cajón de 16.2 kN. Determine *a*) la tensión requerida en el cable $ADCF$ si el valor máximo del par en E es el mínimo posible, mientras x varía desde 0.6 hasta 7 m, *b*) el valor máximo correspondiente al par.

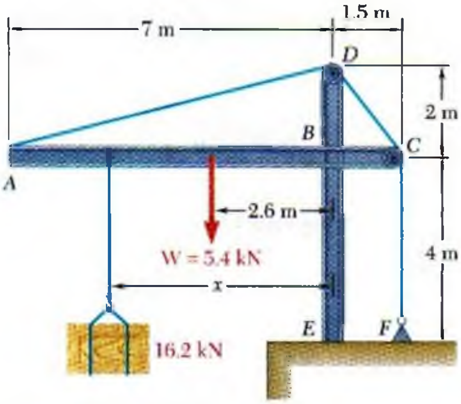


Figura P4.50 y P4.51

4.52 Un poste de 160 kg se emplea para sostener en C el extremo de un cable eléctrico. Si la tensión en el cable es de 540 N y éste forma un ángulo de 15° con la horizontal en C, determine las tensiones máximas y mínimas permisibles en el alambre BD si la magnitud del par en A no debe exceder los 360 N · m.

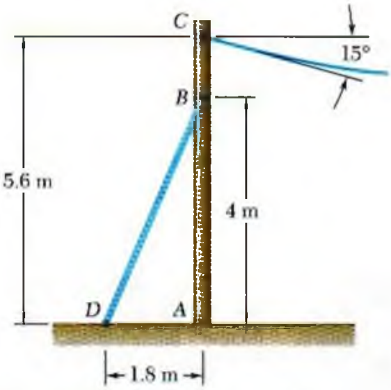


Figura P4.52

4.53 Una barra uniforme AB de longitud l y masa m, sobre la que actúa un par **M**, pertenece a un plano vertical. Los extremos de la barra están conectados a dos pequeños rodillos que descansan sobre superficies sin fricción. *a*) Exprese el ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio en términos de M, m, g y l. *b*) Determine el valor de θ que corresponde a la posición de equilibrio cuando $M = 2.7$ N · m, $m = 2$ kg y $l = 0.8$ m.

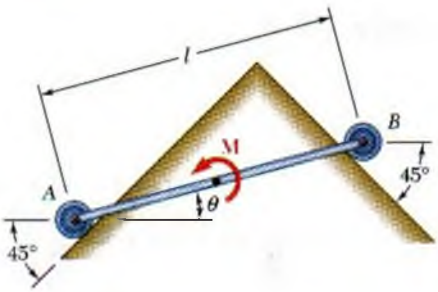


Figura P4.53

4.54 Una varilla AB con longitud l y masa insignificante está situada en un plano vertical y unida a los bloques A y B. El peso de cada bloque es W, y los bloques están conectados mediante una cuerda elástica que pasa por la polea colocada en C. Sin tomar en cuenta la fricción entre los bloques y las guías, determine el valor de θ para el cual la tensión en la cuerda es igual a *a*) cero, *b*) W.

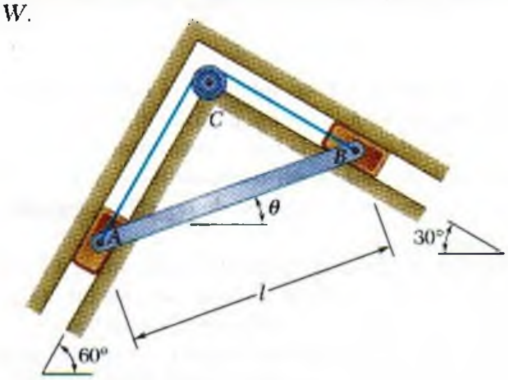


Figura P4.54

4.55 Un aro uniforme y delgado, de masa m y radio R, está unido sin fricción a un collarín mediante un perno colocado en A y se mantiene contra un pequeño rodillo en B. El aro pertenece a un plano vertical y el collarín, sobre el que actúa una fuerza horizontal **P**, se puede mover libremente por la barra que se muestra en la figura. *a*) Exprese el ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio, expresado en términos de m, g y P. *b*) Determine el valor de θ que corresponde a la posición de equilibrio cuando $m = 700$ g y $P = 3$ N.

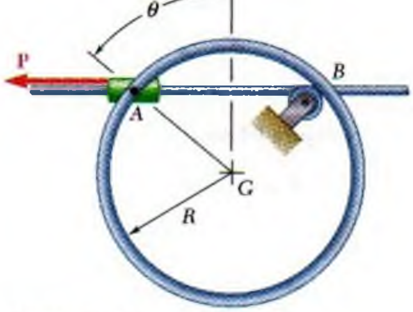


Figura *P4.55*

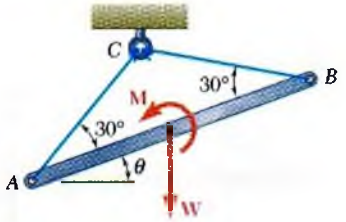


Figura P4.56

4.56 Una barra uniforme con longitud de 1 m y masa de 2 kg está suspendida mediante dos cuerdas AC y BC. Determine el ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando se aplica a la barra un par **M** con magnitud de 3 N · m.

4.57 Una carga vertical **P** se aplica en el extremo B de la barra BC. La constante del resorte es k y se encuentra sin deformar cuando $\theta = 90°$. Sin tomar en cuenta el peso de la barra, determine *a*) el ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio, expresado en términos de P, k y l. *b*) El valor de θ que corresponde a la posición de equilibrio cuando $P = \frac{1}{4}kl$.

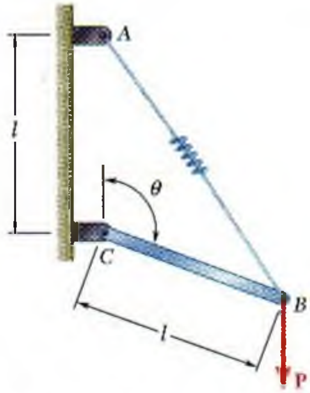


Figura P4.57

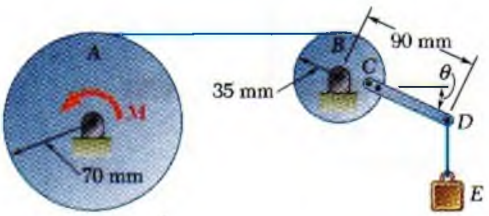


Figura *P4.58*

4.58 El cable AB está enrollado en dos tambores, como se muestra en la figura. Un resorte de torsión está fijado al tambor A, para el cual $M = k\phi$, donde $k = 58$ N · m/rad y ϕ es el ángulo de rotación del tambor expresado en radianes. Si la masa del bloque E es de 10 kg y el resorte de torsión no está estirado cuando $\theta = 0$, determine el valor de θ correspondiente al equilibrio.

4.59 Una carga vertical **P** se aplica en el extremo B de la barra BC. La constante del resorte es k, y se encuentra sin deformar cuando $\theta = 0$. *a*) Sin tomar en cuenta el peso de la barra, determine el ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio en términos de P, k y l. *b*) Determine el valor de θ que corresponde a la posición de equilibrio cuando $P = 2kl$.

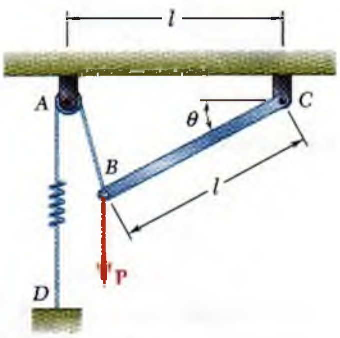


Figura P4.59

4.60 Una barra delgada AB de peso W está unida a los bloques A y B que se mueven libremente sobre las guías mostradas en la figura. El resorte, que tiene una constante k, se encuentra sin deformar cuando $\theta = 0$. *a*) Sin tomar en cuenta el peso de los bloques, encuentre una ecuación en términos de W, k, l y θ que se cumpla cuando la barra esté en equilibrio. *b*) Determine el valor de θ cuando $W = 4$ lb, $l = 30$ in. y $k = 1.8$ lb/ft.

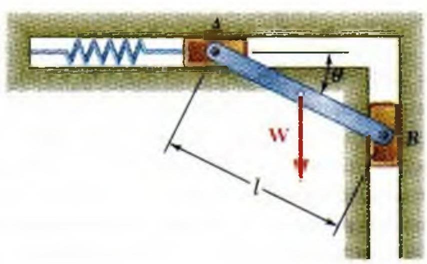


Figura P4.60

4.61 La ménsula ABC puede sostenerse en las ocho formas diferentes mostradas en la figura. Todas las conexiones consisten en pernos sin fricción, rodillos o eslabones cortos. Para cada caso determine: *a)* si la placa está completa, parcial o impropiamente restringida, *b)* si las reacciones son estáticamente determinadas o indeterminadas y *c)* si en la posición mostrada se mantiene el equilibrio de la placa. También, cuando sea posible, calcule las reacciones si la magnitud de la fuerza **P** es de 100 N.

4.62 Ocho placas rectangulares idénticas de 20 × 30 in., cada una de las cuales tiene una masa de 50 lb, se mantienen en el plano vertical mostrado en la figura. Todas las conexiones consisten de pernos sin fricción, rodillos o eslabones cortos. En cada caso, conteste las preguntas enunciadas en el problema 4.61 y, cuando sea posible, calcule todas las reacciones.

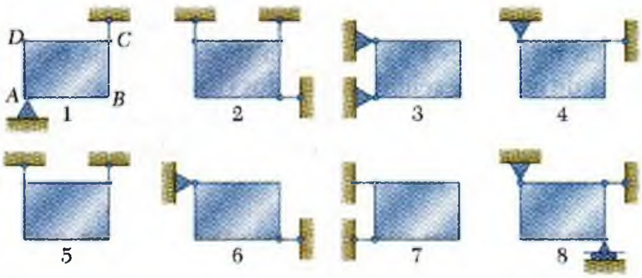


Figura *P4.62*

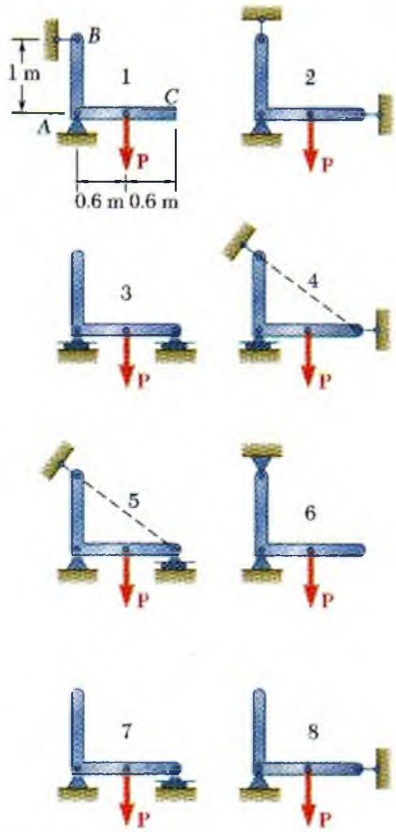


Figura P4.61

4.6. EQUILIBRIO DE UN CUERPO SUJETO A DOS FUERZAS

Un caso particular de equilibrio que es de considerable interés es el de un cuerpo rígido sujeto a la acción de dos fuerzas. Por lo general, un cuerpo que se encuentra en estas circunstancias recibe el nombre de *cuerpo sujeto a dos fuerzas*. A continuación se demostrará que *si un cuerpo sujeto a dos fuerzas está en equilibrio entonces las dos fuerzas que actúan sobre éste deben tener la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos.*

Considérese una placa en ángulo sujeta a dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ que actúan, respectivamente, en A y B (figura 4.8*a*). Si la placa está en equilibrio, la suma de los momentos de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ con respecto a cualquier eje debe ser igual a cero. Primero se suman momentos con respecto a A. Como, obviamente, el momento de $\mathbf{F}_1$ es igual a cero, el momento de $\mathbf{F}_2$ también debe ser igual a cero y la línea de acción de $\mathbf{F}_2$ debe pasar a través de A (figura 4.8*b*). En forma similar, sumando momentos con respecto a B se demuestra que la línea de acción de $\mathbf{F}_1$ debe pasar a través de B (figura 4.8*c*). Por tanto, ambas fuerzas tienen la misma línea de acción (que resulta ser la línea AB). A partir de cualquiera de las ecuaciones $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ se observa que las fuerzas también deben tener la misma magnitud pero sentidos opuestos.

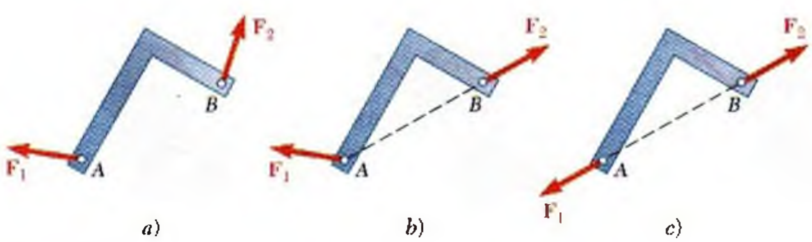


Figura 4.8

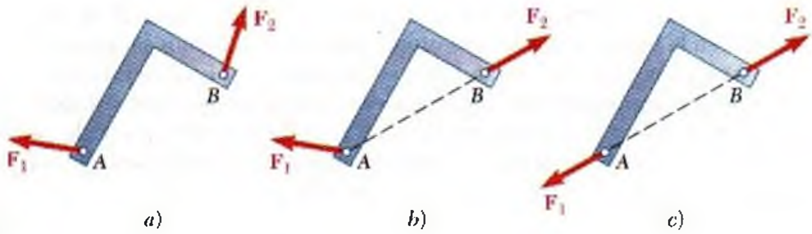


Figura 4.8 (*repetida*)

Si varias fuerzas actúan en dos puntos A y B, las fuerzas que actúan en A pueden ser reemplazadas por su resultante $\mathbf{F}_1$ y las de B pueden reemplazarse por su resultante $\mathbf{F}_2$. Por tanto, en una forma más general, un cuerpo sujeto a dos fuerzas puede definirse como *un cuerpo rígido sujeto a fuerzas que actúan únicamente en dos puntos*. Entonces, las resultantes $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ deben tener la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos (figura 4.8).

En el estudio de estructuras, marcos y máquinas se verá que saber identificar los cuerpos sometidos a la acción de dos fuerzas simplifica la solución de ciertos problemas.

4.7. EQUILIBRIO DE UN CUERPO SUJETO A TRES FUERZAS

Otro caso de equilibrio que es de gran interés es aquel de un *cuerpo rígido sujeto a tres fuerzas*, esto es, un cuerpo rígido sobre el que actúan tres fuerzas o, en forma más general, *un cuerpo rígido sometido a fuerzas que actúan sólo en tres puntos*. Considérese un cuerpo rígido bajo un sistema de fuerzas que puede reducirse a tres fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ que actúan, respectivamente, en A, B y C (figura 4.9*a*). A continuación se demostrará que si el cuerpo está en equilibrio, *las líneas de acción de las tres fuerzas deben ser concurrentes o paralelas*.

Como el cuerpo rígido está en equilibrio, la suma de los momentos de $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ con respecto a cualquier eje debe ser igual a cero. Suponga que las líneas de acción de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ se intersecan y al representar su punto de intersección con D, se suman momentos con respecto a D (figura 4.9*b*). Como los momentos de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ con respecto a D son iguales a cero, el momento de $\mathbf{F}_3$ con respecto a D también debe ser igual a cero y la línea de acción de $\mathbf{F}_3$ debe pasar a través de D (figura 4.9*c*). Por tanto, las tres líneas de acción son concurrentes. La única excepción se da cuando ninguna de las líneas de acción se intersecan; entonces, dichas líneas son paralelas.

Aunque los problemas relacionados con cuerpos sujetos a tres fuerzas se pueden resolver por medio de los métodos generales de las secciones 4.3 a la 4.5, la propiedad que se acaba de establecer puede utilizarse para resolverlos en forma gráfica o matemática a partir de relaciones trigonométricas o geométricas simples.

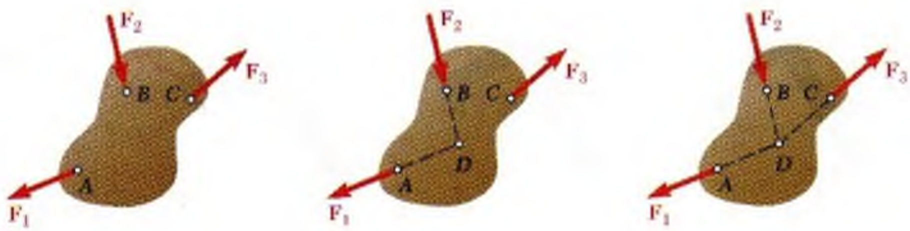
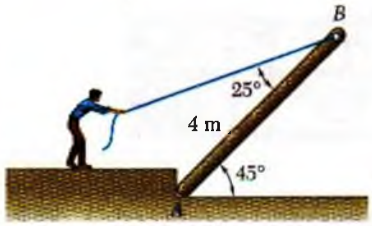


Figura 4.9

PROBLEMA RESUELTO 4.6



Un hombre levanta una vigueta de 10 kg y de 4 m de longitud tirando de una cuerda. Encuentre la tensión T en la cuerda y la reacción en A.

SOLUCIÓN

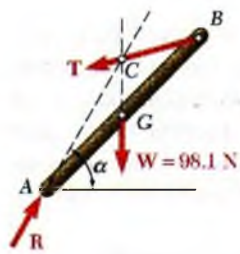
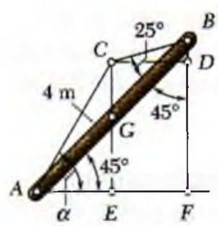


Diagrama de cuerpo libre. La vigueta es un cuerpo sujeto a tres fuerzas: su peso **W**, la fuerza **T** ejercida por la cuerda y la reacción **R** ejercida por el suelo en A. Se observa que

$$W = mg = (10 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 98.1 \text{ N}$$



Cuerpo sujeto a tres fuerzas. Como la vigueta es un cuerpo sujeto a tres fuerzas, éstas al actuar deben ser concurrentes. Por tanto, la reacción **R** pasará a través del punto de intersección C de las líneas de acción del peso **W** y de la fuerza de tensión **T**. Este hecho se utilizará para determinar el ángulo α que forma **R** con la horizontal.

Trazando la línea vertical BF a través de B y la línea horizontal CD a través de C, se observa que

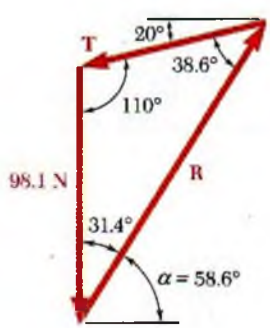
$$AF = BF = (AB) \cos 45° = (4 \text{ m}) \cos 45° = 2.828 \text{ m}$$
$$CD = EF = AE = \tfrac{1}{2}(AF) = 1.414 \text{ m}$$
$$BD = (CD) \cot (45° + 25°) = (1.414 \text{ m}) \tan 20° = 0.515 \text{ m}$$
$$CE = DF = BF - BD = 2.828 \text{ m} - 0.515 \text{ m} = 2.313 \text{ m}$$

Así, se escribe

$$\tan \alpha = \frac{CE}{AE} = \frac{2.313 \text{ m}}{1.414 \text{ m}} = 1.636$$

$\alpha = 58.6°$ ◀

Ahora se conocen las direcciones de todas las fuerzas que actúan sobre la vigueta.



Triángulo de fuerzas. Se dibuja un triángulo de fuerzas, como se muestra en la figura y se calculan sus ángulos interiores a partir de las direcciones conocidas de las fuerzas. Con el uso de la ley de los senos se escribe

$$\frac{T}{\text{sen } 31.4°} = \frac{R}{\text{sen } 110°} = \frac{98.1 \text{ N}}{\text{sen } 38.6°}$$

$T = 81.9$ N ◀

R $= 147.8$ N $\angle 58.6°$ ◀

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Las secciones anteriores cubrieron dos casos particulares de equilibrio de un cuerpo rígido.

1. ***Un cuerpo sujeto a dos fuerzas es un cuerpo que está sometido a fuerzas que actúan sólo en dos puntos.*** Las resultantes de las fuerzas que actúan en cada uno de estos puntos deben tener *la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos*. Esta propiedad permitirá simplificar la solución de algunos problemas reemplazando las dos componentes desconocidas de una reacción, por una sola fuerza de magnitud desconocida pero cuya *dirección es conocida*.

2. ***Un cuerpo sujeto a tres fuerzas es un cuerpo que está sometido a fuerzas que actúan sólo en tres puntos.*** Las resultantes de las fuerzas que actúan en cada uno de estos puntos deben ser *concurrentes* o *paralelas*. Para resolver un problema que involucra a un cuerpo sujeto a tres fuerzas concurrentes, se dibuja el diagrama de cuerpo libre mostrando que estas tres fuerzas pasan a través del mismo punto. Entonces, el uso de la geometría elemental permitirá completar la solución utilizando un triángulo de fuerzas [problema resuelto 4.6].

A pesar de que es fácil entender el principio señalado en el párrafo anterior para la solución de problemas que involucran a cuerpos sometidos a la acción de tres fuerzas, puede ser difícil dibujar las construcciones geométricas necesarias. Si se tienen dificultades, primero se debe dibujar un diagrama de cuerpo libre de tamaño razonable y entonces, se debe buscar una relación entre longitudes conocidas o que se puedan calcular fácilmente y una dimensión que involucre a una incógnita. Esto se hizo en el problema resuelto 4.6, donde las dimensiones AE y CE, que eran fáciles de calcular, fueron empleadas para determinar el ángulo α.

Problemas

4.63 Dos eslabones, uno vertical y otro horizontal, se articulan a una rueda y sobre ellos se aplican las fuerzas mostradas en la figura. Si $a = 75$ mm, determine el valor de P y la reacción en A.

4.64 Dos eslabones, uno vertical y otro horizontal, se articulan a una rueda y sobre ellos se aplican las fuerzas mostradas en la figura. Determine el rango de valores de la distancia a para los cuales la magnitud de la reacción en A no pasa de 180 N.

4.65 Resuelva el problema 4.21 usando el método de la sección 4.7.

4.66 Resuelva el problema 4.33 usando el método de la sección 4.7.

4.67 Una ménsula en forma de T soporta una carga de 75 lb, según muestra la figura. Determine las reacciones en A y C cuando *a*) $\alpha = 90°$, *b*) $\alpha = 45°$.

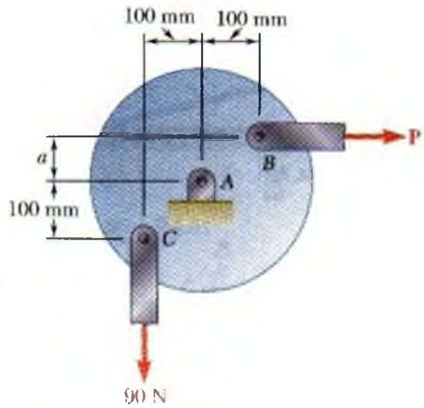


Figura P4.63 y P4.64

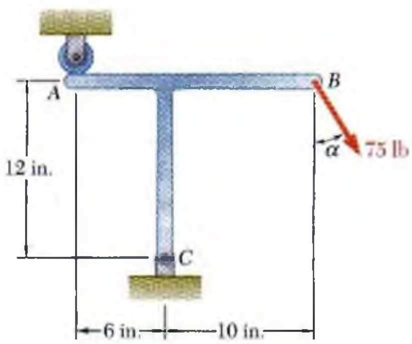


Figura P4.67

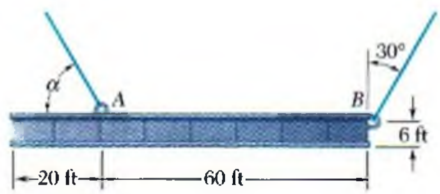


Figura *P4.68*

4.68 Una viga uniforme que pesa 6 000 lb se mantiene en posición horizontal por medio de dos cables de grúa. Determine el ángulo α y la tensión en cada cable.

4.69 Para remover un clavo, se coloca un pequeño bloque de madera debajo de una barreta y se aplica una fuerza horizontal **P**, como indica la figura. Si $l = 88$ mm y $P = 130$ N, determine la fuerza vertical ejercida sobre el clavo y la reacción en B.

4.70 Para remover un clavo, se coloca un pequeño bloque de madera debajo de una barreta y se aplica una fuerza horizontal **P**, como indica la figura. Si la fuerza vertical máxima necesaria para extraer el clavo es de 2 600 N, y la fuerza horizontal **P** no debe superar los 290 N, determine el mayor valor aceptable para la distancia l.

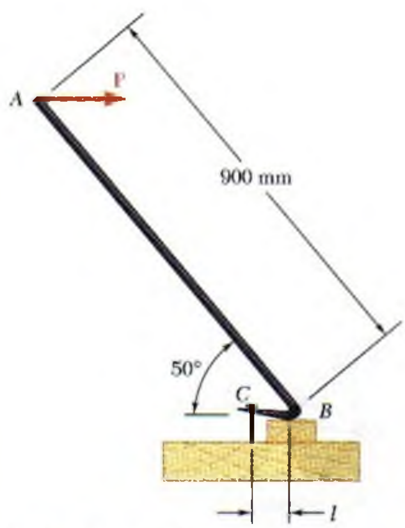


Figura P4.69 y P4.70

4.71 Un trabajador levanta una escalera con longitud de 9.2 m y masa de 53 kg, como se muestra en la figura. Si $a = 1.8$ m y la fuerza ejercida por el trabajador es perpendicular a la escalera, determine *a*) la magnitud de la fuerza, *b*) la reacción en *B*.

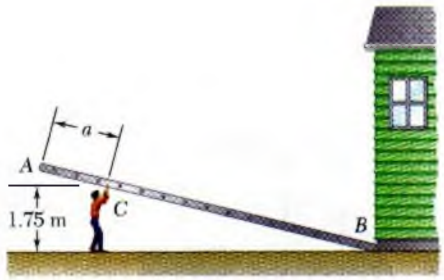


Figura P4.71 y *P4.72*

4.72 Un trabajador levanta una escalera con longitud de 9.2 m y masa de 53 kg, como se muestra en la figura. Si la fuerza ejercida por el trabajador es perpendicular a la escalera, determine *a*) el valor mínimo de *a* para el que la componente vertical de la reacción en *B* es cero, *b*) la fuerza correspondiente ejercida por el trabajador.

4.73 Para remover la tapa de una cubeta de 5 galones, se emplea la herramienta mostrada en la figura y se aplica una fuerza hacia arriba, radialmente hacia fuera, sobre el borde inferior interno de la tapa. Si el borde se apoya contra la herramienta en el punto *A* y se aplica una fuerza de 20 lb sobre el mango, determine la fuerza que actúa sobre el borde.

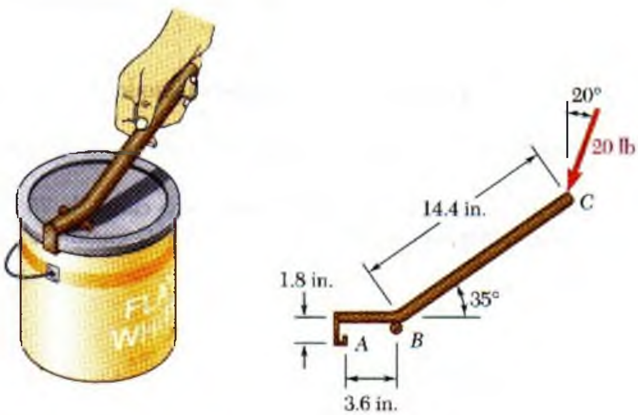


Figura P4.73

4.74 Para remover la tapa de una cubeta de 5 galones, se emplea la herramienta mostrada en la figura y se aplica una fuerza hacia arriba, radialmente hacia fuera, sobre el borde inferior interno de la tapa. Si la parte superior y el borde de la tapa se apoyan contra la herramienta en *A* y *B*, respectivamente, y se aplica una fuerza de 14 lb sobre el mango, determine la fuerza que actúa sobre el borde.

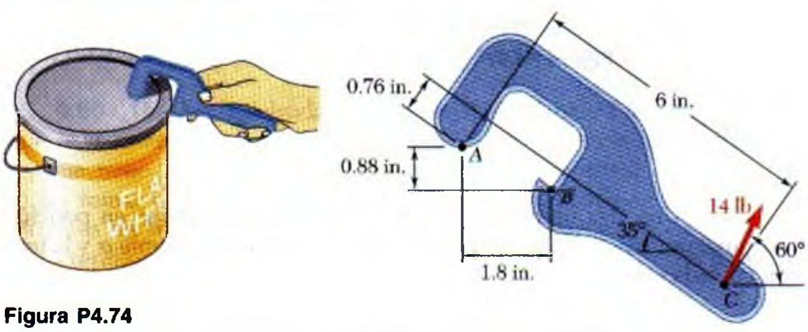


Figura P4.74

4.75 Un rodillo de 20 kg y 200 mm de diámetro se usa sobre un suelo de teja y descansa en el desnivel que se muestra en la figura. Si el espesor de cada teja es de 8 mm, determine la fuerza **P** requerida para mover el rodillo sobre las tejas cuando se le empuja hacia la izquierda.

4.76 Un rodillo de 20 kg y 200 mm de diámetro se usa sobre un suelo de teja y descansa en el desnivel que se muestra en la figura. Si el espesor de cada teja es de 8 mm, determine la fuerza **P** requerida para mover el rodillo sobre las tejas cuando se le jala hacia la derecha.

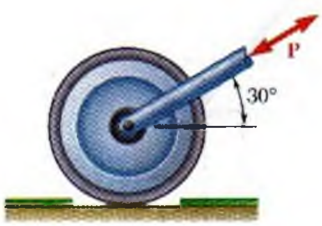


Figura *P4.75* y P4.76

4.77 La abrazadera mostrada en la figura se usa para fijar la pieza de trabajo C. Suponga que la máxima fuerza compresiva permisible sobre la pieza de trabajo es de 40 lb y, sin tomar en cuenta el efecto de la fricción en A, determine la correspondiente *a*) reacción en B, *b*) reacción en A, *c*) tensión en el tornillo.

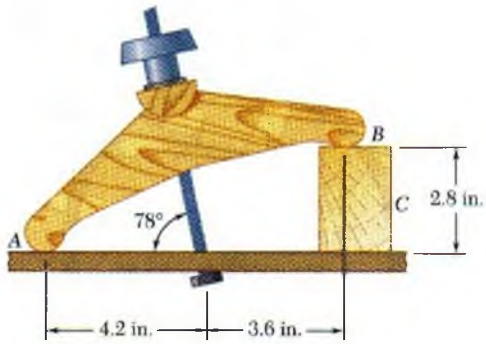


Figura P4.77

4.78 Una pequeña grúa se monta sobre la parte trasera de una camioneta y se usa para levantar una caja de 260 lb. Determine *a*) la fuerza ejercida por el cilindro hidráulico BC sobre la grúa, *b*) la reacción en A.

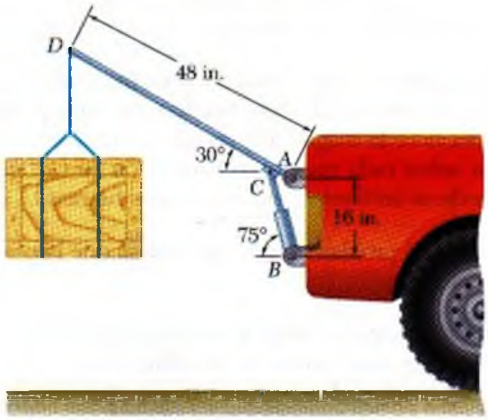


Figura P4.78

4.79 El elemento ABC en forma de L se sostiene por medio de un apoyo de pasador, instalado en C, y una cuerda inextensible unida en A y B que pasa sin fricción por una polea colocada en D. Determine *a*) la tensión en la cuerda, *b*) la reacción en C.

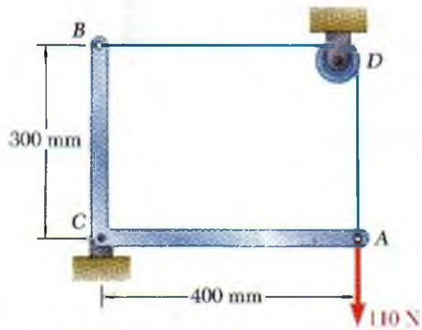


Figura P4.79

4.80 El elemento $ABCD$ se sostiene por medio de un apoyo de pasador, colocado en C, y una cuerda inextensible unida en A y D que pasa sin fricción por las poleas puestas en B y E. Sin tomar en cuenta el tamaño de las poleas, determine la tensión en la cuerda y la reacción en C.

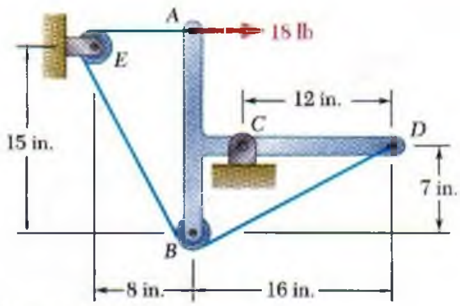


Figura P4.80

4.81 Una palanca de gancho modificada se usa para levantar un tronco de 8 in. de diámetro que pesa 80 lb. Si $\theta = 45°$ y la fuerza ejercida por el trabajador en el punto C es perpendicular al mango de la palanca, determine *a*) la fuerza ejercida en C, *b*) la reacción en A.

***4.82** Una palanca de gancho modificada se usa para levantar un tronco de 8 in. de diámetro que pesa 80 lb. Si $\theta = 60°$ y la fuerza ejercida por el trabajador en el punto C es perpendicular al mango de la palanca, determine *a*) la fuerza ejercida en C, *b*) la reacción en A.

4.83 Resuelva el problema 4.17*c* empleando el método de la sección 4.7.

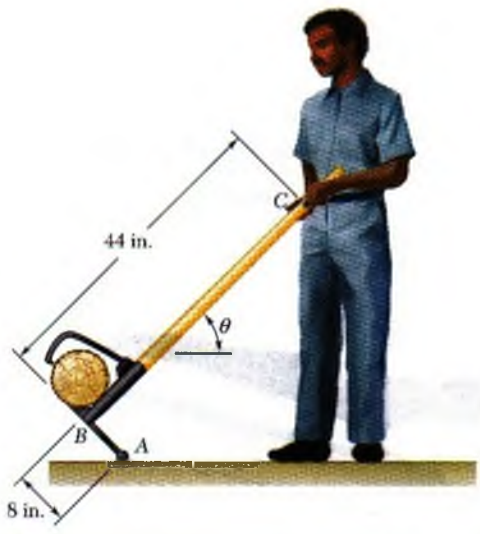


Figura P4.81 y P4.82

4.84 Resuelva el problema 4.25 empleando el método de la sección 4.7.

4.85 La barra uniforme *AB* de masa *m* y longitud *L* está unida a dos bloques, los cuales se deslizan libremente por las ranuras circulares que se muestran en la figura. Si la barra está en equilibrio y $L = 2R$, determine *a*) el ángulo α que forma la barra con la horizontal, *b*) las reacciones en *A* y *B*.

***4.86** La barra uniforme *AB* de masa *m* y longitud *L* está unida a dos bloques, los cuales se deslizan libremente por las ranuras circulares mostradas en la figura. Si $\alpha = 45°$, determine *a*) el máximo valor de *L* para el que la barra se encuentra en equilibrio, *b*) las reacciones correspondientes en *A* y *B*.

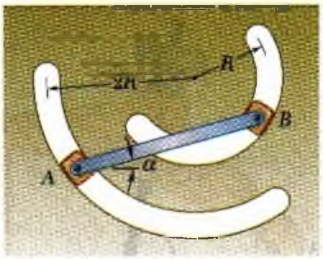


Figura *P4.85* y P4.86

4.87 El peso total de una carretilla llena de grava es de 120 lb. Si la carretilla se sostiene sobre un plano inclinado a 18° en la posición que muestra la figura, determine la magnitud y la dirección de *a*) la fuerza ejercida por el trabajador sobre cada mango, *b*) la reacción en *C*. (*Sugerencia*: Considere que la rueda es un cuerpo sometido a dos fuerzas.)

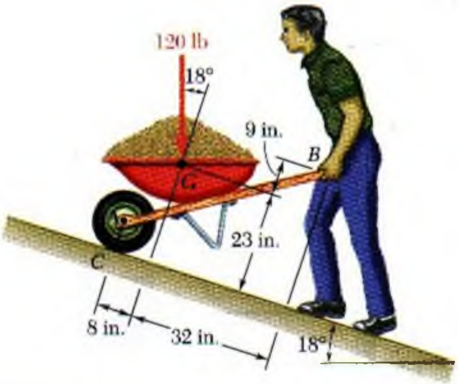


Figura P4.87

4.88 Resuelva el problema 4.87 suponiendo que la pendiente del plano es de 18° hacia abajo.

4.89 Una barra delgada uniforme con longitud de 10 in. y peso de 0.01 lb está balanceada sobre un vaso que tiene diámetro interior de 2.8 in. Sin tomar en cuenta la fricción, determine el ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio.

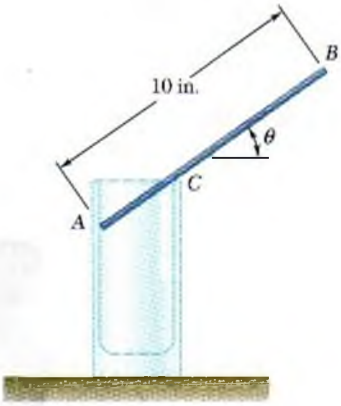


Figura P4.89

4.90 Una barra delgada de longitud *L* y peso *W* está unida a dos collarines que se pueden deslizar libremente a lo largo de las guías mostradas en la figura. Si la barra está en equilibrio, obtenga una expresión para calcular el ángulo θ en términos del ángulo β.

4.91 Una barra delgada de 10 kg y longitud *L* está unida a dos collarines que se pueden deslizar libremente a lo largo de las guías mostradas en la figura. Si la barra está en equilibrio y $\beta = 25°$, determine *a*) el ángulo θ que la barra forma con la vertical, *b*) las reacciones en *A* y *B*.

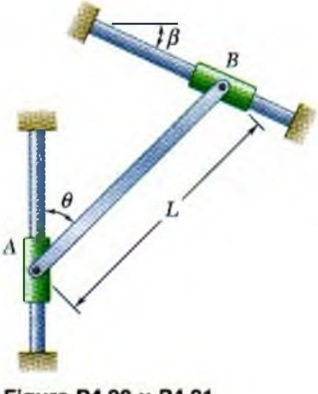


Figura P4.90 y P4.91

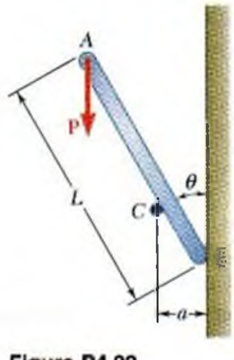


Figura P4.92

4.92 Una barra delgada de longitud *L* se coloca entre la clavija *C* y la pared vertical. La barra soporta una carga **P** en su extremo *A*. Sin tomar en cuenta la fricción ni el peso de la barra, determine el ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio.

4.93 Un atleta hace "lagartijas" sobre una tabla inclinada. Sin tomar en cuenta la fricción entre sus zapatos y la tabla, determine el valor de θ si este deportista desea limitar la magnitud de la fuerza total ejercida sobre sus manos a un 80% de su peso.

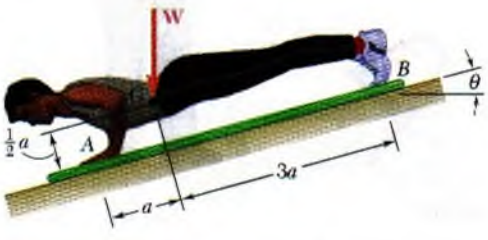


Figura P4.93

4.94 Una barra delgada y uniforme de longitud $2L$ y peso W se apoya sobre un rodillo colocado en D, y se mantiene en la posición de equilibrio mostrada en la figura mediante una cuerda de longitud a. Si $L = 8$ in., determine *a*) el ángulo θ, *b*) la longitud a.

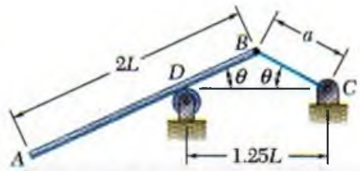


Figura *P4.94*

4.95 Una barra delgada y uniforme de masa m y longitud $4r$ se apoya sobre la superficie mostrada en la figura y se mantiene en la posición de equilibrio gracias a la fuerza **P**. Sin considerar el efecto de la fricción en A y C, *a*) determine el ángulo θ, *b*) obtenga una expresión para P en términos de m y g.

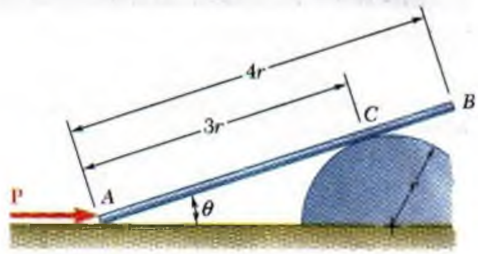


Figura P4.95

EQUILIBRIO EN TRES DIMENSIONES

4.8. EQUILIBRIO DE UN CUERPO RÍGIDO EN TRES DIMENSIONES

En la sección 4.1 se explicó que, para el caso general de tres dimensiones, se requieren seis ecuaciones escalares para expresar las condiciones de equilibrio de un cuerpo rígido:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0 \tag{4.2}$$
$$\Sigma M_x = 0 \qquad \Sigma M_y = 0 \qquad \Sigma M_z = 0 \tag{4.3}$$

Estas ecuaciones pueden resolverse para un máximo de *seis incógnitas* que, generalmente, representarán reacciones en los apoyos o las conexiones.

En la mayor parte de los problemas, las ecuaciones escalares (4.2) y (4.3) se obtendrán de modo más práctico si primero se expresan en forma vectorial las condiciones para el equilibrio del cuerpo rígido considerado. Para ello se escribe

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \qquad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \tag{4.1}$$

y se expresan las fuerzas **F** y los vectores de posición **r** en términos de componentes escalares y vectores unitarios. Después, se calculan todos los productos vectoriales, ya sea mediante cálculo directo o con determinantes (vea la sección 3.8). Se observa que a través de una selección cuidadosa del punto O se pueden eliminar de los cálculos hasta tres componentes desconocidas de las reacciones. Al igualar a cero los coeficientes de los vectores unitarios en cada una de las dos relaciones (4.1), se obtienen las ecuaciones escalares deseadas.[†]

4.9. REACCIONES EN PUNTOS DE APOYO Y CONEXIONES PARA UNA ESTRUCTURA TRIDIMENSIONAL

En una estructura tridimensional, las reacciones abarcan desde una sola fuerza de dirección conocida, que ejerce una superficie sin fricción, hasta un sistema fuerza-par ejercido por un apoyo fijo. Por tanto, en los problemas que involucran el equilibrio de una estructura tridimensional pueden existir entre una y seis incógnitas asociadas con la reacción correspondiente a cada apoyo o conexión. En la figura 4.10 se muestran varios tipos de apoyos y conexiones con sus respectivas reacciones. Una forma sencilla de determinar tanto el tipo de reacción correspondiente a un apoyo o conexión dado, como el número de incógnitas involucradas, consiste en establecer cuáles de los seis movimientos fundamentales

[†] En algunos problemas, es conveniente eliminar de la solución las reacciones en dos puntos A y B escribiendo la ecuación de equilibrio $\Sigma M_{AB} = 0$, la cual implica determinar los momentos de las fuerzas respecto al eje AB que une los puntos A y B (vea el problema resuelto 4.10).

(traslación en las direcciones x, y y z y rotación con respecto a los ejes x, y y z) están permitidos y cuáles de estos movimientos están restringidos.

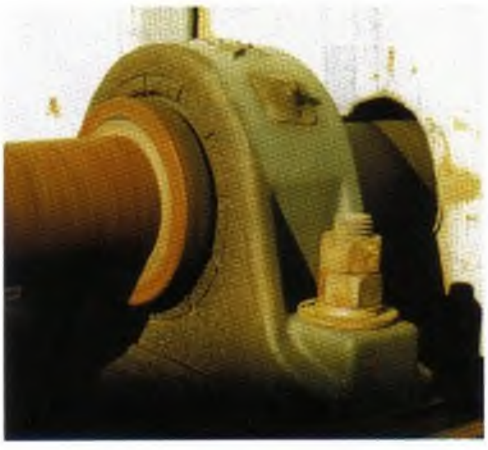
Por ejemplo, los apoyos de bola y cuenca o de rótula, las superficies sin fricción (lisas) y los cables sólo impiden la traslación en una dirección y, por tanto, ejercen una sola fuerza cuya línea de acción es conocida; así, cada uno de estos apoyos involucra una incógnita, la cual está dada por la magnitud de la reacción. Los rodillos sobre superficies rugosas y las ruedas sobre rieles impiden la traslación en dos direcciones; por consiguiente, las reacciones correspondientes consisten en dos componentes de fuerza desconocidas. Las superficies rugosas en contacto directo y las rótulas (bola y cuenca) impiden la traslación en tres direcciones; por tanto estos apoyos involucran tres componentes de fuerza desconocidas.



Fotografía 4.6 Las juntas universales que se encuentran comúnmente en las flechas motrices de los autos y camiones de tracción trasera, permiten la transmisión del movimiento rotacional entre dos ejes no colineales.

Algunos apoyos y conexiones pueden impedir la rotación y la traslación; en estos casos, las reacciones correspondientes incluyen tanto pares como fuerzas. Por ejemplo, la reacción en un apoyo fijo, la cual impide cualquier movimiento (tanto de rotación como de traslación), consiste en tres fuerzas y tres pares, todos desconocidos. Una junta universal diseñada para permitir la rotación alrededor de dos ejes ejercerá una reacción que consiste en tres componentes de fuerza y un par, todos desconocidos.

Otros apoyos y conexiones se usan primordialmente para impedir traslaciones; sin embargo, su diseño es tal que también impiden algunas rotaciones. Las reacciones correspondientes consisten en componentes de fuerza pero también *pueden* incluir pares. Un grupo de apoyos de este tipo incluye las bisagras y los cojinetes diseñados para soportar sólo cargas radiales (por ejemplo, las chumaceras y los cojinetes de rodillos). Las reacciones correspondientes consisten en dos componentes de fuerza pero pueden incluir también dos pares. Otro grupo incluye apoyos de pasador y ménsula, bisagras y cojinetes diseñados para soportar tanto un empuje axial como una carga radial (por ejemplo, los cojinetes de bola). Las reacciones correspondientes consisten en tres componentes de fuerza pero pueden incluir dos pares. Sin embargo, estos apoyos no ejercerán pares apreciables bajo condiciones normales de uso. Por tanto, en su análisis *sólo* se deben incluir las componentes de fuerza *a menos que* se encuentre que los pares son necesarios para mantener el equilibrio del cuerpo rígido o si se sabe que el apoyo ha sido diseñado específicamente para ejercer un par (véanse problemas del 4.128 al 4.131).



Fotografía 4.7 La caja de cojinetes que se muestra en la fotografía sostiene al eje de un ventilador usado en un taller de fundición.

Si las reacciones involucran más de seis incógnitas, hay más incógnitas que ecuaciones y algunas de las reacciones son *estáticamente indeterminadas*. Si las reacciones involucran menos de seis incógnitas, existen más ecuaciones que incógnitas y pueden no cumplirse algunas de las ecuaciones de equilibrio bajo una condición general de carga, en tales circunstancias, el cuerpo rígido sólo *está parcialmente restringido*. Sin embargo, bajo condiciones específicas de carga correspondientes a un problema dado, las ecuaciones adicionales se reducen a identidades triviales, como $0 = 0$ y pueden descartarse; así, aunque el cuerpo rígido sólo está parcialmente restringido, éste permanece en equilibrio (véanse los problemas resueltos 4.7 y 4.8). A pesar de que se tengan seis o más incógnitas, es posible que no se cumplan algunas de las ecuaciones de equilibrio. Esto puede ocurrir cuando las reacciones asociadas con los apoyos son paralelas o intersecan a la misma línea; entonces, el cuerpo rígido tiene *restricción impropia*.

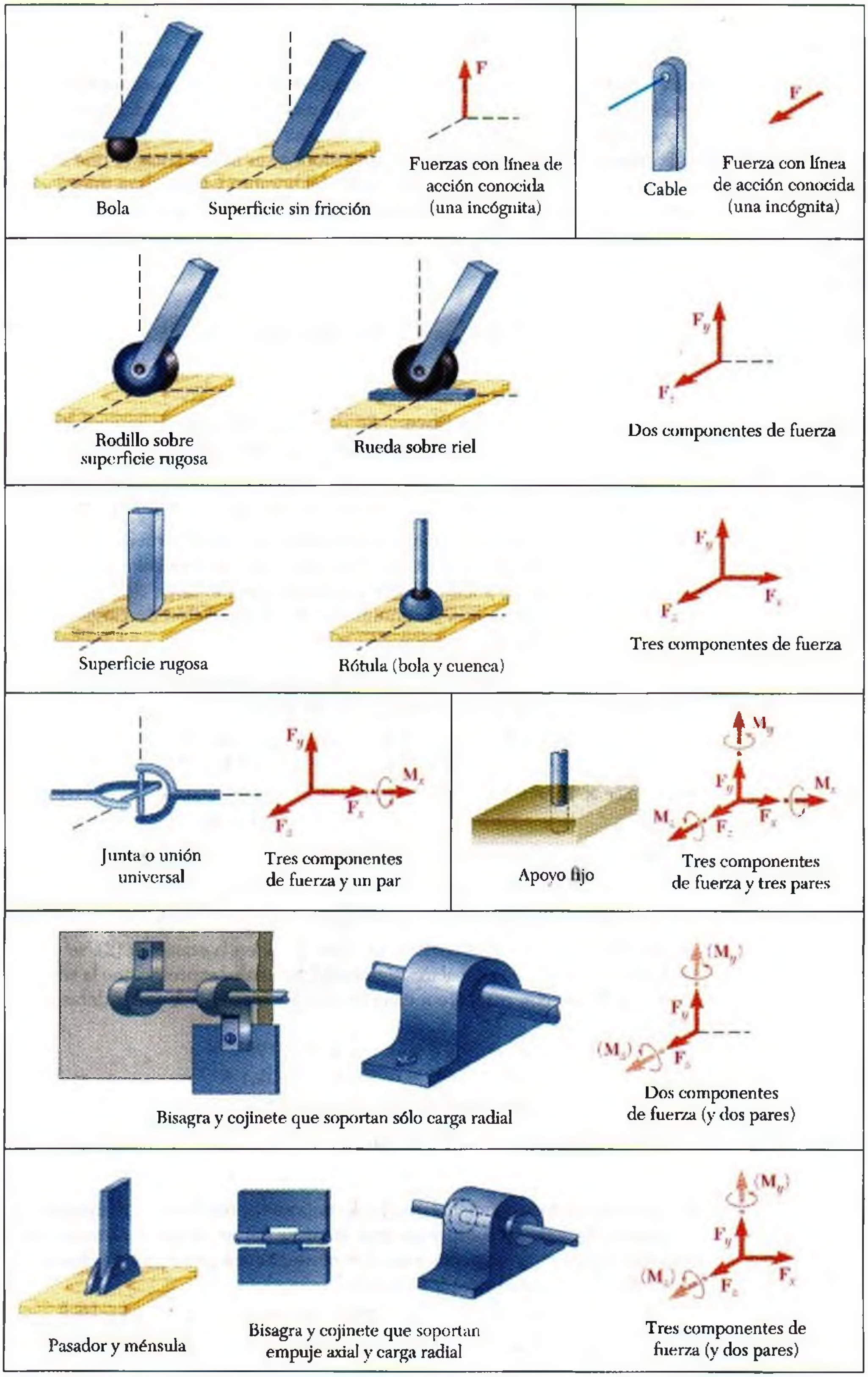
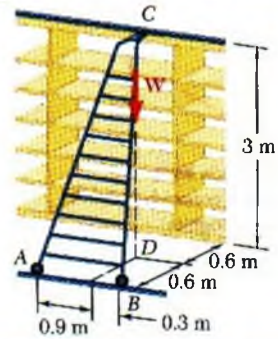
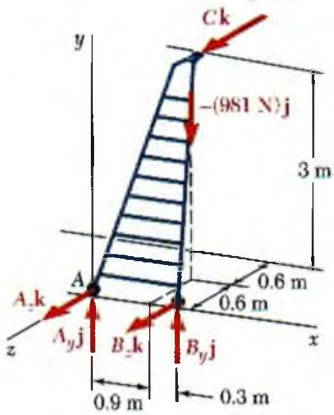


Figura 4.10 Reacciones en apoyos y conexiones.



PROBLEMA RESUELTO 4.7

Una escalera de 20 kg que se usa para alcanzar los estantes superiores en un almacén está apoyada en dos ruedas con pestañas *A* y *B* montadas sobre un riel y en una rueda sin pestañas *C* que descansa sobre un riel fijo a la pared. Un hombre de 80 kg se para sobre la escalera y se inclina hacia la derecha. La línea de acción del peso combinado **W** del hombre y la escalera interseca al piso en el punto D. Determínense las reacciones en *A*, *B* y *C*.



SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la escalera. Las fuerzas involucradas son el peso combinado del hombre y la escalera.

$$\mathbf{W} = -mg\mathbf{j} = -(80 \text{ kg} + 20 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} = -(981 \text{ N})\mathbf{j}$$

y cinco componentes de reacción desconocidos, dos en cada rueda con pestañas y uno en la rueda sin pestañas. Por tanto, la escalera sólo tiene restricción parcial; ésta se puede desplazar libremente a lo largo de los rieles. Sin embargo, la escalera está en equilibrio bajo la condición de carga dada puesto que se satisface la ecuación $\Sigma F_x = 0$.

Ecuaciones de equilibrio. Se expresa que las fuerzas que actúan sobre la escalera forman un sistema equivalente a cero:

$$\Sigma\mathbf{F} = 0: \quad A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k} - (981 \text{ N})\mathbf{j} + C\mathbf{k} = 0$$

$$(A_y + B_y - 981 \text{ N})\mathbf{j} + (A_z + B_z + C)\mathbf{k} = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma\mathbf{M}_A = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0: \quad 1.2\mathbf{i} \times (B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}) + (0.9\mathbf{i} - 0.6\mathbf{k}) \times (-981\mathbf{j}) + (0.6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 1.2\mathbf{k}) \times C\mathbf{k} = 0$$

Calculando los productos vectoriales se tiene[1]

$$1.2B_y\mathbf{k} - 1.2B_z\mathbf{j} - 882.9\mathbf{k} - 588.6\mathbf{i} - 0.6C\mathbf{j} + 3C\mathbf{i} = 0$$

$$(3C - 588.6)\mathbf{i} - (1.2B_z + 0.6C)\mathbf{j} + (1.2B_y - 882.9)\mathbf{k} = 0 \qquad (2)$$

Si se igualan a cero los coeficientes de **i**, **j** y **k** en la ecuación (2), se obtienen las tres ecuaciones escalares siguientes, las cuales expresan que la suma de los momentos con respecto a cada uno de los ejes coordenados debe ser igual a cero.

$$3C - 588.6 = 0 \qquad C = +196.2 \text{ N}$$

$$1.2B_z + 0.6C = 0 \qquad B_z = -98.1 \text{ N}$$

$$1.2B_y - 882.9 = 0 \qquad B_y = +736 \text{ N}$$

Por tanto, las reacciones en *B* y *C* son

$$\mathbf{B} = +(736 \text{ N})\mathbf{j} - (98.1 \text{ N})\mathbf{k} \qquad \mathbf{C} = +(196.2 \text{ N})\mathbf{k} \quad ◀$$

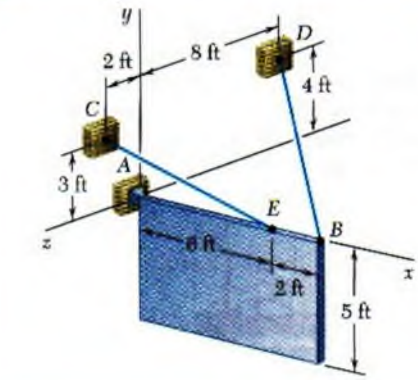
Al igualar a cero los coeficientes de **j** y **k** en la ecuación (1), se obtienen dos ecuaciones escalares que expresan que la suma de las componentes en las direcciones de *y* y *z* son iguales a cero. Si se sustituyen por B_y, B_z y *C* los valores obtenidos anteriormente, se escribe

$$A_y + B_y - 981 = 0 \qquad A_y + 736 - 981 = 0 \qquad A_y = +245 \text{ N}$$

$$A_z + B_z + C = 0 \qquad A_z - 98.1 + 196.2 = 0 \qquad A_z = -98.1 \text{ N}$$

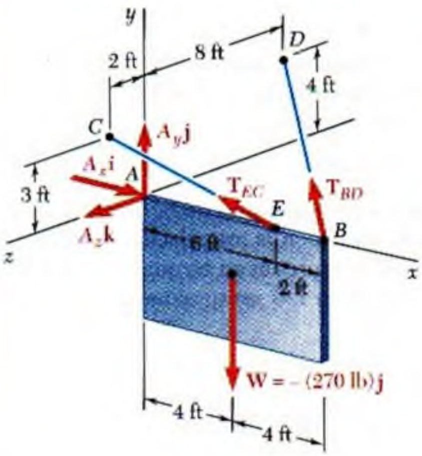
Se concluye que la reacción en *A* es $\qquad \mathbf{A} = +(245 \text{ N})\mathbf{j} - (98.1 \text{ N})\mathbf{k} \quad ◀$

[1] En este problema resuelto y en los problemas resueltos 4.8 y 4.9, los momentos también pueden expresarse en forma de determinantes (véase el problema resuelto 3.10).



PROBLEMA RESUELTO 4.8

Un anuncio de densidad uniforme de 5 × 8 ft pesa 270 lb y está apoyado por una rótula en A y por dos cables. Determine la tensión en cada cable y la reacción en A.



SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja un diagrama de cuerpo libre del anuncio. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son el peso $\mathbf{W} = -(270\text{ lb})\mathbf{j}$ y las reacciones en A, B y E. La reacción en A es una fuerza cuya dirección es desconocida y se representa con tres componentes desconocidas. Como las direcciones de las fuerzas ejercidas por los cables son conocidas, cada una de dichas fuerzas sólo involucra una incógnita: las magnitudes T_{BD} y T_{EC}. Como sólo hay cinco incógnitas, el anuncio tiene restricción parcial. Éste puede rotar libremente alrededor del eje x; sin embargo, el anuncio está en equilibrio bajo la condición de carga dada puesto que se satisface la ecuación $\Sigma M_x = 0$.

Las componentes de las fuerzas $\mathbf{T}_{BD}$ y $\mathbf{T}_{EC}$ pueden expresarse en términos de las magnitudes desconocidas T_{BD} y T_{EC} al escribir

$$\overrightarrow{BD} = -(8\text{ ft})\mathbf{i} + (4\text{ ft})\mathbf{j} - (8\text{ ft})\mathbf{k} \qquad BD = 12\text{ ft}$$

$$\overrightarrow{EC} = -(6\text{ ft})\mathbf{i} + (3\text{ ft})\mathbf{j} + (2\text{ ft})\mathbf{k} \qquad EC = 7\text{ ft}$$

$$\mathbf{T}_{BD} = T_{BD}\left(\frac{\overrightarrow{BD}}{BD}\right) = T_{BD}\left(-\tfrac{2}{3}\mathbf{i} + \tfrac{1}{3}\mathbf{j} - \tfrac{2}{3}\mathbf{k}\right)$$

$$\mathbf{T}_{EC} = T_{EC}\left(\frac{\overrightarrow{EC}}{EC}\right) = T_{EC}\left(-\tfrac{6}{7}\mathbf{i} + \tfrac{3}{7}\mathbf{j} + \tfrac{2}{7}\mathbf{k}\right)$$

Ecuaciones de equilibrio. Se expresa que las fuerzas que actúan sobre el anuncio forman un sistema equivalente a cero:

$$\Sigma\mathbf{F} = 0: \qquad A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} + \mathbf{T}_{BD} + \mathbf{T}_{EC} - (270\text{ lb})\mathbf{j} = 0$$

$$(A_x - \tfrac{2}{3}T_{BD} - \tfrac{6}{7}T_{EC})\mathbf{i} + (A_y + \tfrac{1}{3}T_{BD} + \tfrac{3}{7}T_{EC} - 270\text{ lb})\mathbf{j} + (A_z - \tfrac{2}{3}T_{BD} + \tfrac{2}{7}T_{EC})\mathbf{k} = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma\mathbf{M}_A = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0:$$

$$(8\text{ ft})\mathbf{i} \times T_{BD}(-\tfrac{2}{3}\mathbf{i} + \tfrac{1}{3}\mathbf{j} - \tfrac{2}{3}\mathbf{k}) + (6\text{ ft})\mathbf{i} \times T_{EC}(-\tfrac{6}{7}\mathbf{i} + \tfrac{3}{7}\mathbf{j} + \tfrac{2}{7}\mathbf{k}) + (4\text{ ft})\mathbf{i} \times (-270\text{ lb})\mathbf{j} = 0$$

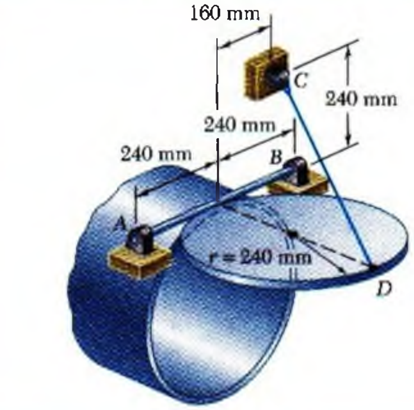
$$(2.667T_{BD} + 2.571T_{EC} - 1080\text{ lb})\mathbf{k} + (5.333T_{BD} - 1.714T_{EC})\mathbf{j} = 0 \qquad (2)$$

Si se igualan a cero los coeficientes de $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ en la ecuación (2), se obtienen dos ecuaciones escalares que deben resolverse para T_{BD} y T_{EC}:

$$T_{BD} = 101.3\text{ lb} \qquad T_{EC} = 315\text{ lb} \quad ◄$$

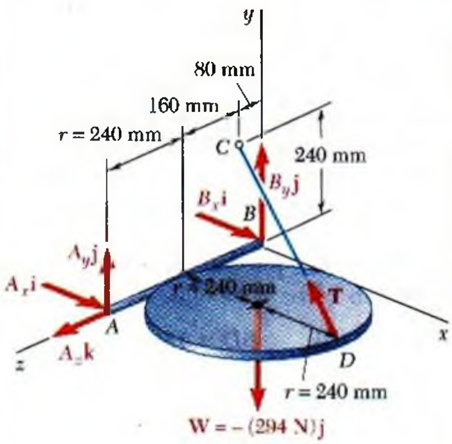
Al igualar a cero los coeficientes de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ en la ecuación (1), se obtienen otras tres ecuaciones que proporcionan las componentes de $\mathbf{A}$. Así, se tiene que

$$\mathbf{A} = +(338\text{ lb})\mathbf{i} + (101.2\text{ lb})\mathbf{j} - (22.5\text{ lb})\mathbf{k} \quad ◄$$



PROBLEMA RESUELTO 4.9

Una tapa uniforme de un tubo que tiene un radio $r = 240$ mm y una masa de 30 kg se mantiene en una posición horizontal por medio del cable CD. Suponga que el cojinete en B no ejerce ninguna fuerza axial, determine la tensión en el cable y las reacciones en A y B.



SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja un diagrama de cuerpo libre con los ejes coordenados, como se muestra en la figura. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son el peso de la tapa

$$\mathbf{W} = -mg\mathbf{j} = -(30 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} = -(294 \text{ N})\mathbf{j}$$

y las reacciones involucran seis incógnitas: la magnitud de la fuerza $\mathbf{T}$ ejercida por el cable, tres componentes de fuerza en la articulación A y dos en la articulación B. Las componentes de $\mathbf{T}$ se expresan en términos de la magnitud desconocida T descomponiendo al vector $\overrightarrow{DC}$ en sus componentes rectangulares y escribiendo

$$\overrightarrow{DC} = -(480 \text{ mm})\mathbf{i} + (240 \text{ mm})\mathbf{j} - (160 \text{ mm})\mathbf{k} \qquad DC = 560 \text{ mm}$$

$$\mathbf{T} = T\frac{\overrightarrow{DC}}{DC} = -\tfrac{6}{7}T\mathbf{i} + \tfrac{3}{7}T\mathbf{j} - \tfrac{2}{7}T\mathbf{k}$$

Ecuaciones de equilibrio. Se expresa que las fuerzas que actúan sobre la tapa constituyen un sistema equivalente a cero:

$$\Sigma\mathbf{F} = 0: \qquad A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} + B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + \mathbf{T} - (294 \text{ N})\mathbf{j} = 0$$

$$(A_x + B_x - \tfrac{6}{7}T)\mathbf{i} + (A_y + B_y + \tfrac{3}{7}T - 294 \text{ N})\mathbf{j} + (A_z - \tfrac{2}{7}T)\mathbf{k} = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma\mathbf{M}_B = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0:$$

$$2r\mathbf{k} \times (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) + (2r\mathbf{i} + r\mathbf{k}) \times (-\tfrac{6}{7}T\mathbf{i} + \tfrac{3}{7}T\mathbf{j} - \tfrac{2}{7}T\mathbf{k}) + (r\mathbf{i} + r\mathbf{k}) \times (-294 \text{ N})\mathbf{j} = 0$$

$$(-2A_y - \tfrac{3}{7}T + 294 \text{ N})r\mathbf{i} + (2A_x - \tfrac{2}{7}T)r\mathbf{j} + (\tfrac{6}{7}T - 294 \text{ N})r\mathbf{k} = 0 \qquad (2)$$

Si se igualan a cero los coeficientes de los vectores unitarios en la ecuación (2), se escriben tres ecuaciones escalares que proporcionan el siguiente resultado

$$A_x = +49.0 \text{ N} \qquad A_y = +73.5 \text{ N} \qquad T = 343 \text{ N} \blacktriangleleft$$

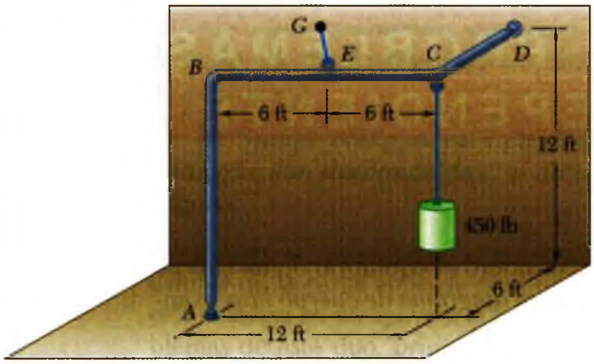
Al igualar a cero los coeficientes de los vectores unitarios en la ecuación (1), se obtienen tres ecuaciones escalares adicionales. Después de sustituir los valores de T, A_x y A_y en estas ecuaciones, se obtiene

$$A_z = +98.0 \text{ N} \qquad B_x = +245 \text{ N} \qquad B_y = +73.5 \text{ N}$$

Por tanto, las reacciones en A y B son

$$\mathbf{A} = +(49.0 \text{ N})\mathbf{i} + (73.5 \text{ N})\mathbf{j} + (98.0 \text{ N})\mathbf{k} \blacktriangleleft$$

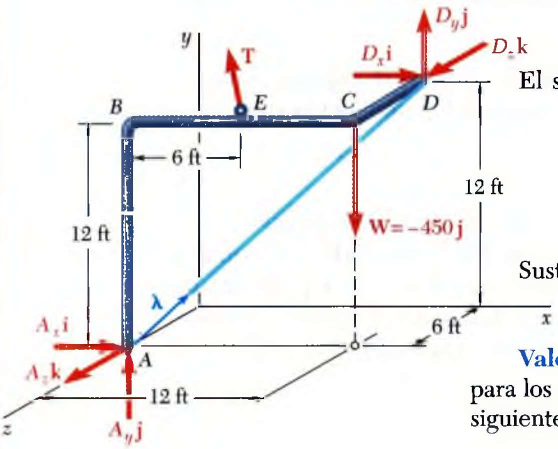
$$\mathbf{B} = +(245 \text{ N})\mathbf{i} + (73.5 \text{ N})\mathbf{j} \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 4.10

Una carga de 450 lb está colgada en la esquina C de un tramo rígido de tubería $ABCD$ que ha sido doblado, como se muestra en la figura. El tubo está apoyado por medio de rótulas en A y D, las cuales están unidas, respectivamente, al piso y a la pared vertical y por un cable que está unido al punto medio E de la porción BC del tubo y al punto G en la pared. Determine: *a*) dónde debe estar ubicado el punto G si la tensión en el cable debe ser mínima y *b*) el valor mínimo correspondiente de la tensión.

SOLUCIÓN



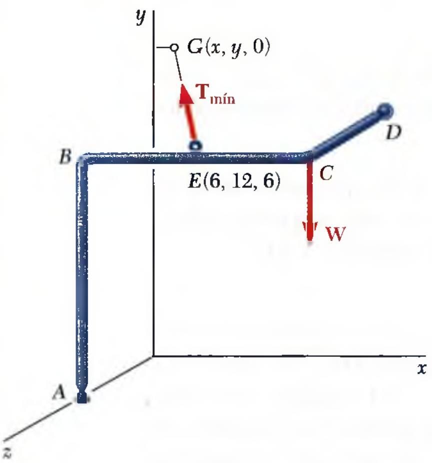


Diagrama de cuerpo libre. El diagrama de cuerpo libre del tubo incluye la carga $\mathbf{W} = (-450 \text{ lb})\mathbf{j}$, las reacciones en A y en D y la fuerza $\mathbf{T}$ ejercida por el cable. Para eliminar de los cálculos a las reacciones en A y en D, se expresa que la suma de los momentos de las fuerzas con respecto a AD es igual a cero. Si se representa con $\boldsymbol{\lambda}$ el vector unitario a lo largo de AD, se escribe

$$\Sigma M_{AD} = 0: \qquad \boldsymbol{\lambda} \cdot (\overrightarrow{AE} \times \mathbf{T}) + \boldsymbol{\lambda} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \mathbf{W}) = 0 \qquad (1)$$

El segundo término en la ecuación (1) se puede calcular como sigue:

$$\overrightarrow{AC} \times \mathbf{W} = (12\mathbf{i} + 12\mathbf{j}) \times (-450\mathbf{j}) = -5\,400\mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\overrightarrow{AD}}{AD} = \frac{12\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 6\mathbf{k}}{18} = \tfrac{2}{3}\mathbf{i} + \tfrac{2}{3}\mathbf{j} - \tfrac{1}{3}\mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \mathbf{W}) = (\tfrac{2}{3}\mathbf{i} + \tfrac{2}{3}\mathbf{j} - \tfrac{1}{3}\mathbf{k}) \cdot (-5\,400\mathbf{k}) = +1\,800$$

Sustituyendo el valor obtenido en la ecuación (1), se escribe

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot (\overrightarrow{AE} \times \mathbf{T}) = -1\,800 \text{ lb} \cdot \text{ft} \qquad (2)$$

Valor mínimo de la tensión. Recordando la propiedad conmutativa para los productos triples escalares, se vuelve a escribir la ecuación (2) de la siguiente forma

$$\mathbf{T} \cdot (\boldsymbol{\lambda} \times \overrightarrow{AE}) = -1\,800 \text{ lb} \cdot \text{ft} \qquad (3)$$

la cual demuestra que la proyección de $\mathbf{T}$ sobre el vector $\boldsymbol{\lambda} \times \overrightarrow{AE}$ es una constante. Se concluye que $\mathbf{T}$ es mínima cuando es paralela al vector

$$\boldsymbol{\lambda} \times \overrightarrow{AE} = (\tfrac{2}{3}\mathbf{i} + \tfrac{2}{3}\mathbf{j} - \tfrac{1}{3}\mathbf{k}) \times (6\mathbf{i} + 12\mathbf{j}) = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

Como el vector unitario correspondiente es $\tfrac{2}{3}\mathbf{i} - \tfrac{1}{3}\mathbf{j} + \tfrac{2}{3}\mathbf{k}$, se escribe

$$\mathbf{T}_{\text{mín}} = T(\tfrac{2}{3}\mathbf{i} - \tfrac{1}{3}\mathbf{j} + \tfrac{2}{3}\mathbf{k}) \qquad (4)$$

Al sustituir a $\mathbf{T}$ y a $\boldsymbol{\lambda} \times \overrightarrow{AE}$ en la ecuación (3) y calcular los productos punto, se obtiene $6T = -1\ 800$ y, por tanto, $T = -300$. Al llevar este valor a la ecuación (4), se obtiene

$$T_{\text{mín}} = -200\mathbf{i} + 100\mathbf{j} - 200\mathbf{k} \qquad T_{\text{mín}} = 300 \text{ lb} \blacktriangleleft$$

Ubicación de G. Como el vector $\overrightarrow{EG}$ y la fuerza $\mathbf{T}_{\text{mín}}$ tienen la misma dirección, sus componentes deben ser proporcionales. Representando las coordenadas de G con x, y, 0, se escribe

$$\frac{x - 6}{-200} = \frac{y - 12}{+100} = \frac{0 - 6}{-200} \qquad x = 0 \qquad y = 15 \text{ ft} \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En las secciones que se acaban de explicar se consideró el equilibrio de un *cuerpo tridimensional*. Es muy importante que se dibuje un *diagrama de cuerpo libre* completo como primer paso en la solución de un problema.

1. A medida que se dibuja el diagrama de cuerpo libre, se debe poner atención especial en las reacciones en los apoyos. El número de incógnitas en un apoyo puede ir desde uno hasta seis (figura 4.10). Para decidir cuándo existe una reacción desconocida o una componente de reacción en un apoyo, es necesario cuestionarse si el apoyo impide el movimiento del cuerpo en una cierta dirección o alrededor de un cierto eje.

a) ***Si se impide el movimiento en una cierta dirección,*** se debe incluir en el diagrama de cuerpo libre una reacción o componente de reacción desconocida que actúa en esa misma dirección.

b) ***Si un apoyo impide la rotación alrededor de un cierto eje,*** se debe incluir en el diagrama de cuerpo libre un par de magnitud desconocida que actúa alrededor de ese mismo eje.

2. Las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo tridimensional constituyen un sistema equivalente a cero. Si se escribe $\Sigma \mathbf{F} = 0$ y $\Sigma \mathbf{M}_A = 0$ con respecto a un punto apropiado A y se igualan a cero los coeficientes de **i**, **j** y **k** en ambas ecuaciones, se obtienen seis ecuaciones escalares. En general, estas ecuaciones se pueden resolver para conocer las seis incógnitas que contendrán.

3. Después de completar el diagrama de cuerpo libre, se puede tratar de buscar ecuaciones que involucren el menor número de incógnitas posible. Las siguientes estrategias pueden ser de utilidad.

a) Sumar momentos con respecto a un apoyo de rótula o a una bisagra, se obtienen ecuaciones en las cuales se han eliminado tres componentes de reacción desconocidos [problemas resueltos 4.8 y 4.9].

b) Dibujar, si es posible, un eje a través de los puntos de aplicación de todas las reacciones desconocidas, excepto una, y sumar momentos con respecto a dicho eje para obtener la ecuación con una incógnita [problema resuelto 4.10].

4. Después de dibujar el diagrama de cuerpo libre, se recomienda comparar el número de incógnitas con el número de ecuaciones de equilibrio escalares y no redundantes para el problema dado. Al realizar esta comparación se sabrá si el cuerpo tiene restricción apropiada o parcial y si el problema es estáticamente determinado o indeterminado. Además, puesto que en capítulos posteriores se considerarán problemas más complejos, el conocimiento del número de incógnitas y ecuaciones ayudará a encontrar las soluciones correctas.

Problemas

4.96 Dos bandas de transmisión pasan sobre una polea de doble disco unida a un eje que se sostiene mediante los cojinetes instalados en A y D. El disco interior tiene radio de 125 mm y el radio del disco exterior mide 250 mm. Cuando el sistema está en reposo la tensión es de 90 N en ambos tramos de la banda B y de 150 N en los dos tramos de la banda C, entonces, determine las reacciones en A y D. Suponga que el cojinete instalado en D no ejerce ningún empuje axial.

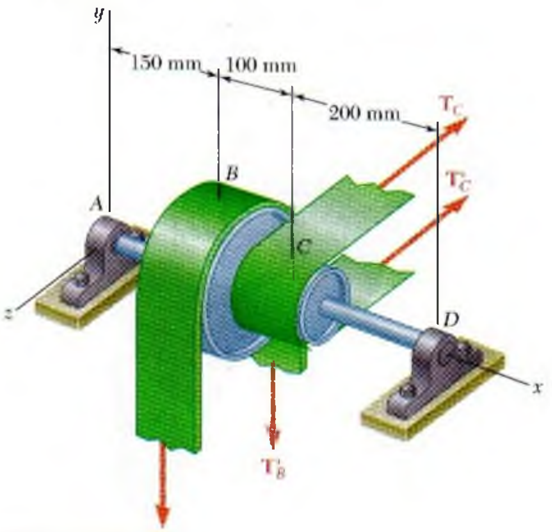


Figura P4.96

4.97 Los engranes A y B están unidos a un eje sostenido por cojinetes instalados en C y D. Los diámetros de los engranes A y B son, respectivamente, de 6 y 3 in.; sobre estos engranes actúan las fuerzas tangenciales y radiales que se muestran en la figura. Si el sistema gira a velocidad angular constante, determine las reacciones en C y D. Suponga que el cojinete puesto en C no ejerce ninguna fuerza axial, y no tome en cuenta los pesos de los engranes y del eje.

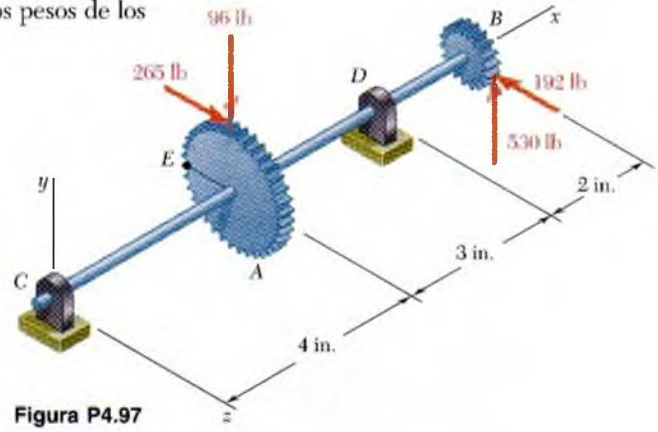


Figura P4.97

4.98 Resuelva el problema 4.97 suponiendo que, para el engrane A, las fuerzas tangencial y radial están actuando en E de tal forma que $\mathbf{F}_A = (265 \text{ lb})\mathbf{j} + (96 \text{ lb})\mathbf{k}$.

4.99 Una hoja de madera de 1.2 × 2.4 m y masa de 18 kg ha sido colocada temporalmente contra la columna *CD*. Está apoyada en *A* y *B* sobre pequeños bloques de madera y contra clavos salientes. Sin tomar en cuenta la fricción de todas las superficies en contacto, determine las reacciones en *A*, *B* y *C*.

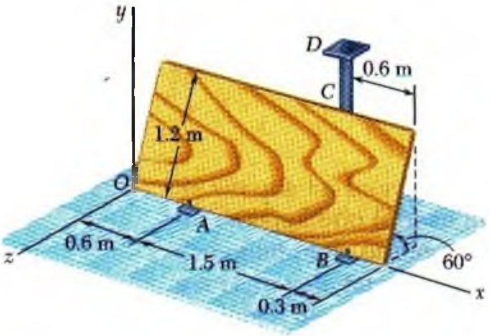


Figura *P4.99*

4.100 Para la porción de máquina mostrada en la figura, la polea *A* de 100 mm de diámetro y la rueda *B* están fijas a un eje sostenido por cojinetes instalados en *C* y *D*. El resorte tiene constante igual a 366 N/m y no está deformado cuando $\theta = 0$, y el cojinete puesto en *C* no ejerce ninguna fuerza axial. Si $\theta = 180°$ y la máquina está en reposo y equilibrio, determine *a*) la tensión *T*, *b*) las reacciones en *C* y *D*. No tome en cuenta los pesos del eje, de la polea ni de la rueda.

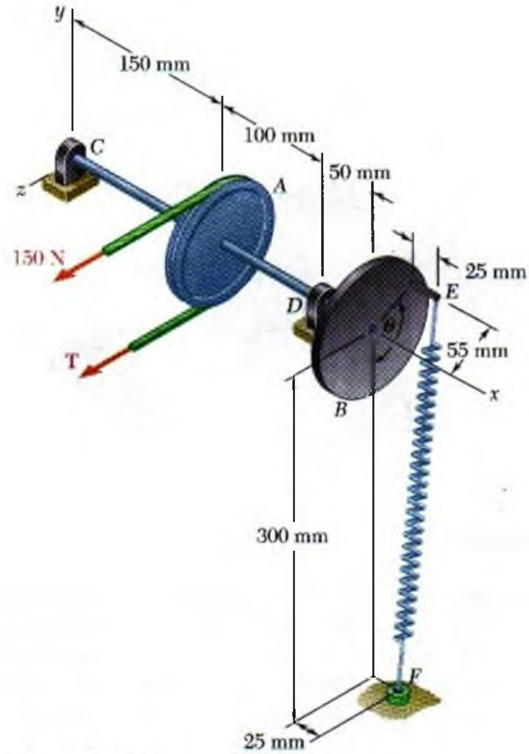


Figura P4.100

4.101 Resuelva el problema 4.100 para $\theta = 90°$.

4.102 Una pila con varias hojas de tablarroca tiene masa de 170 kg y reposa sobre tres bloques de madera colocados bajo sus bordes. Determine la fuerza ejercida sobre cada bloque.

4.103 Una pila con varias hojas de tablarroca tiene masa de 170 kg y reposa sobre tres bloques de madera colocados bajo sus bordes. Determine la masa y la ubicación de la cubeta más ligera de arena de forma que, cuando se coloque sobre la hoja superior de tablarroca, las fuerzas ejercidas sobre los tres bloques sean iguales.

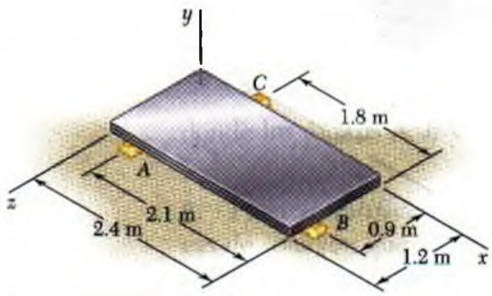


Figura P4.102 y P4.103

4.104 Dos tubos de acero AB y BC, cada uno con peso por unidad de longitud igual a 5 lb/ft, se sueldan juntos en B y se sostienen mediante tres alambres. Si $a = 1.25$ ft, determine la tensión presente en cada alambre.

4.105 Para el arreglo de tubería del problema 4.104, determine *a*) el valor máximo permisible de a si el arreglo no debe ladearse, *b*) la tensión correspondiente en cada alambre.

4.106 Una cámara de 0.53 lb de peso está montada sobre un pequeño trípode de 0.44 lb. Si el peso de la cámara está uniformemente distribuido y la línea de acción del peso del trípode pasa por D, determine *a*) las componentes verticales de las reacciones en A, B y C cuando $\theta = 0$, *b*) el máximo valor permisible de θ si el trípode no debe ladearse.

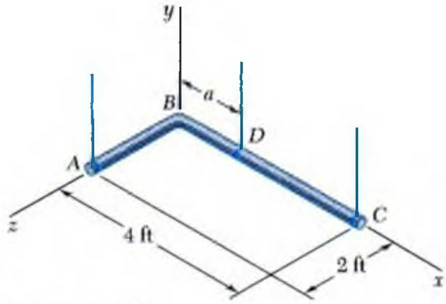


Figura P4.104

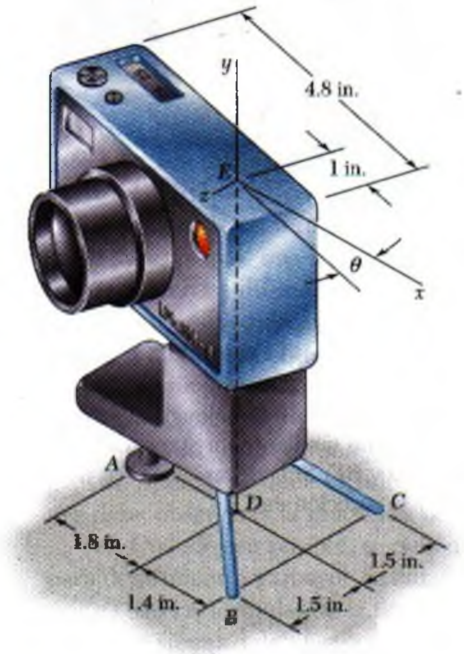


Figura P4.106

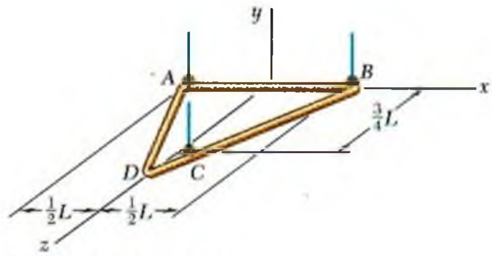


Figura P4.107 y P4.108

4.107 Una varilla uniforme de latón con peso W y longitud $3L$ se dobla en forma de un triángulo equilátero y después se cuelga mediante tres alambres, como indica la figura. Determine la tensión en cada alambre.

4.108 Una varilla uniforme de latón con peso W y longitud $3L$ se dobla en forma de un triángulo equilátero y después se cuelga mediante tres alambres, como indica la figura. Un pequeño collarín de peso W se coloca sobre el lado BD del triángulo y se ubica de tal forma que las tensiones de los alambres en A y B sean iguales. Determine *a*) la tensión en los alambres, *b*) la posición del collarín.

4.109 Una señal cuadrada hecha de acero está unida al marco ABC como indica la figura. Si la dirección del viento es perpendicular a la señal y ejerce una fuerza $\mathbf{F}_W$ de 135 N de magnitud en el centro del frente de la señal, determine *a*) el valor de l para el cual las componentes horizontales de las reacciones en los tres soportes son iguales, *b*) los valores de las componentes horizontales cuando $l = 500$ mm.

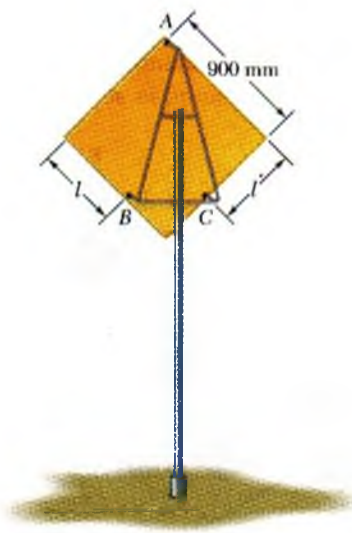


Figura P4.109

4.110 Una abertura en el piso se cubre con una hoja de madera de 4.5 × 6 ft que pesa 27 lb. La hoja de madera está articulada en *A* y *B*, y se mantiene en una posición ligeramente por arriba del piso mediante un bloque pequeño, *C*. Determine la componente vertical de la reacción en *a*) *A*, *b*) *B*, *c*) *C*.

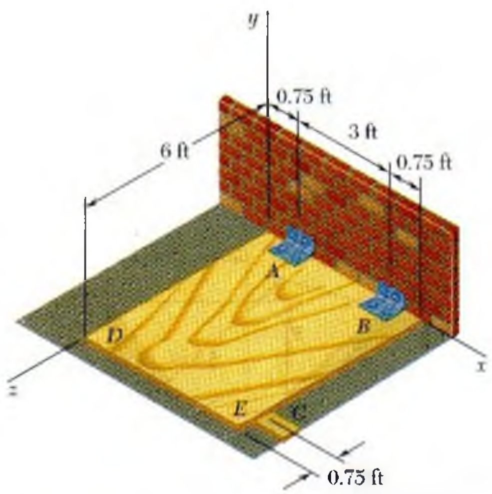


Figura *P4.110*

4.111 Resuelva el problema 4.110, pero ahora suponga que el bloque pequeño *C* se coloca debajo del borde *DE*, a 0.75 ft de la esquina *E*.

4.112 El asta bandera *AC* de 10 ft de longitud forma un ángulo de 30° con el eje *z*. El asta se sostiene mediante un apoyo de rótula colocado en *C* y dos tirantes delgados, *BD* y *BE*. Si la distancia *BC* es de 3 ft, determine la tensión en cada tirante y la reacción en *C*.

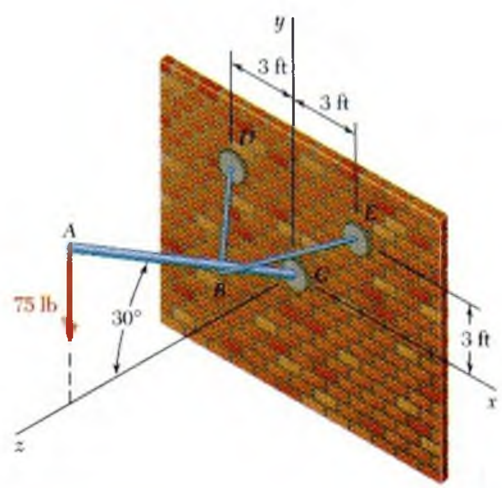


Figura P4.112

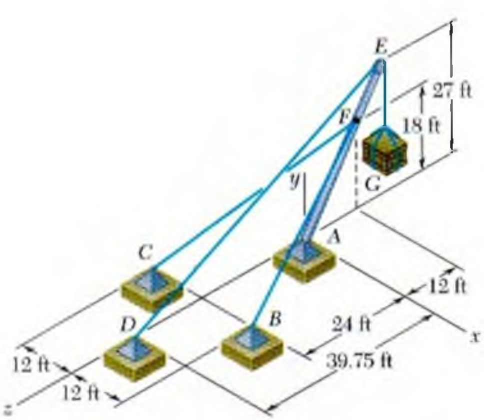


Figura *P4.113*

4.113 Una pieza de maquinaria de 2 720 lb cuelga de un cable que pasa sobre una polea colocada en *E* y está unido al soporte puesto en *D*. El aguilón *AE* se sostiene mediante una junta de rótula instalada en *A* y por medio de los cables *BF* y *CF*. Determine *a*) las tensiones en los cables *BF* y *CF*, *b*) la reacción en *A*.

4.114 El cable CD está unido al mástil ABC de 10 m que se muestra en la figura. La base A del mástil se sostiene mediante una junta de rótula, y el mástil está asegurado por los cables BE y BF. Si $\theta = 30°$ y $\phi = 10°$, y la tensión en el cable CD es de 600 N, determine *a*) la tensión presente en los cables BE y BF, *b*) la reacción en A.

4.115 El cable CD está unido al mástil ABC de 10 m que se muestra en la figura. La base A del mástil se sostiene mediante una junta de rótula, y el mástil está asegurado por los cables BE y BF. Si $\phi = 8°$ y la tensión en los cables BE y BF es de 840 y 450 N, respectivamente, determine *a*) el valor de θ, *b*) la tensión en el cable CD, *c*) la reacción en A.

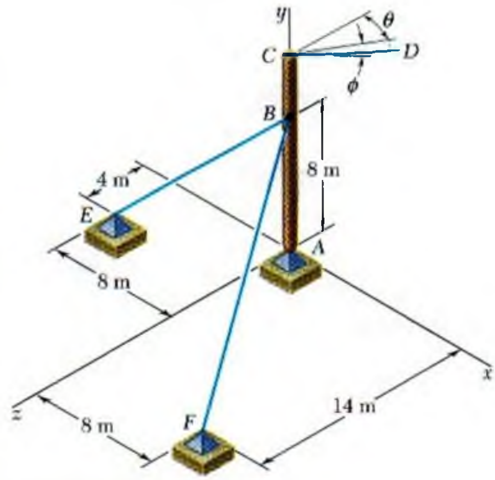


Figura P4.114 y P4.115

4.116 Un brazo de 2.4 m de longitud se sostiene mediante un apoyo de rótula puesto en C y los cables AD y BE. Determine la tensión en cada cable y la reacción en C.

4.117 Resuelva el problema 4.116, pero ahora suponga que la carga de 880 N se reemplaza con dos cargas de 440 N aplicadas en A y B.

4.118 Dos tubos de acero $ABCD$ y EBF se sueldan juntos en B para formar el brazo que se muestra en la figura. El brazo se sostiene mediante un apoyo de rótula colocado en D y por medio de los cables EG e $ICFH$; el cable $ICFH$ pasa sin fricción alrededor de las poleas instaladas en C y F. Para la carga mostrada, determine la tensión en cada cable y la reacción en D.

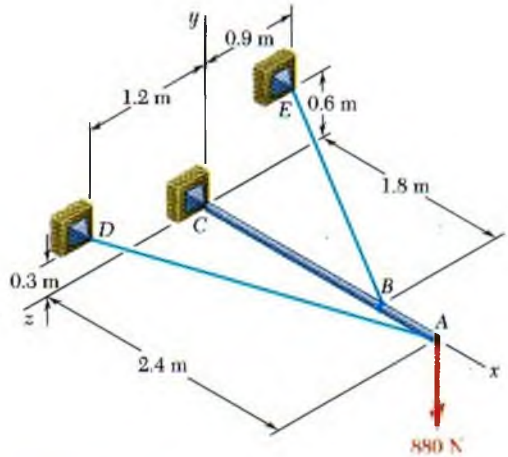


Figura P4.116

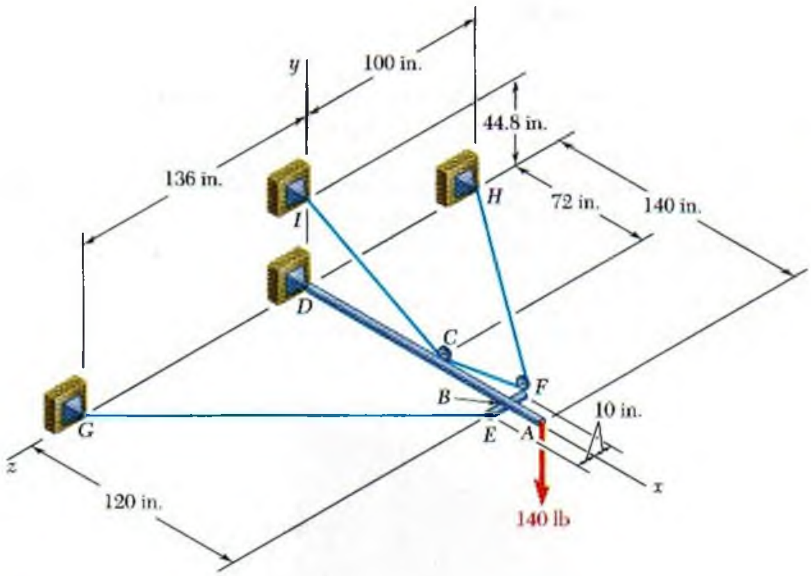


Figura P4.118

4.119 Resuelva el problema 4.118, pero ahora suponga que la carga de 140 lb se aplica en B.

4.120 La tapa de la abertura de un techo pesa 75 lb; tiene bisagras en las esquinas A y B, y se mantiene en la posición deseada mediante una varilla CD articulada en C. Un pasador localizado en el extremo D de la varilla entra en uno de varios orificios perforados en el borde de la tapa. Para la posición mostrada, determine *a*) la magnitud de la fuerza ejercida por la varilla CD, *b*) las reacciones en las bisagras. Suponga que la bisagra puesta en B no ejerce ninguna fuerza de empuje axial.

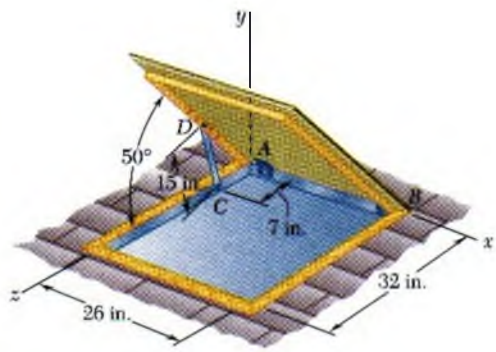


Figura P4.120

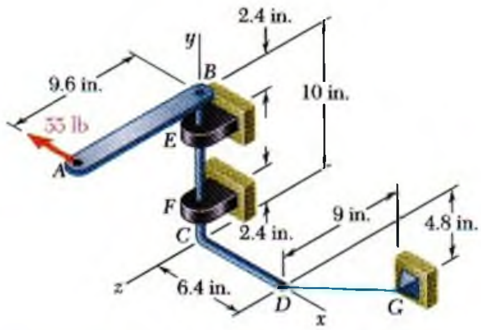


Figura P4.121

4.121 La palanca AB se suelda a la barra doblada BCD que está sostenida mediante cojinetes instalados en E y F y por medio del cable DG. Si el cojinete en E no ejerce ninguna fuerza de empuje axial, determine *a*) la tensión en el cable DG, *b*) las reacciones en E y F.

4.122 La placa rectangular mostrada en la figura tiene masa de 15 kg y se conserva en posición mediante las bisagras instaladas en A y B y por medio del cable EF. Si la bisagra en B no ejerce ninguna fuerza de empuje axial, determine *a*) la tensión en el cable, *b*) las reacciones en A y B.

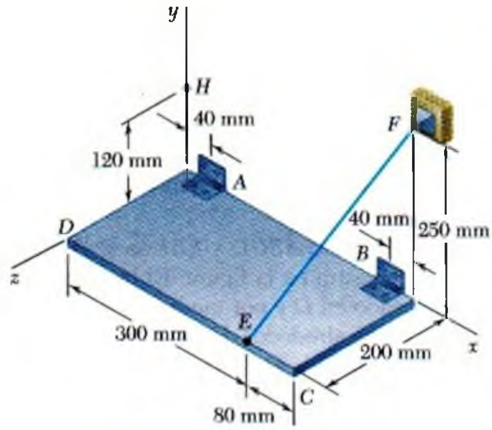


Figura P4.122

4.123 Resuelva el problema 4.122, pero ahora suponga que el cable EF se reemplaza por un cable unido a los puntos E y H.

4.124 Una pequeña puerta con masa de 7 kg está unida mediante las bisagras A y B a una pared, y se sostiene en la posición horizontal mostrada por medio de la cuerda EFH. La cuerda pasa sin fricción alrededor de una polea pequeña instalada en F y está atada a una abrazadera fija en H. Si la bisagra puesta en A no ejerce ninguna fuerza de empuje axial, determine *a*) la tensión en la cuerda, *b*) las reacciones en A y B.

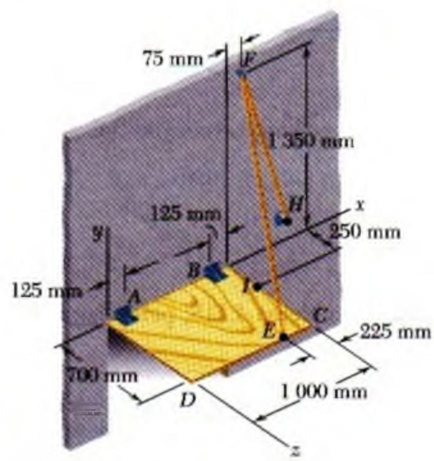


Figura *P4.124*

4.125 Resuelva el problema 4.124, pero ahora suponga que la cuerda está unida a la puerta en I.

4.126 La plataforma horizontal *ABCD* pesa 60 lb y soporta una carga de 240 lb en su centro. Normalmente, la plataforma se mantiene en posición gracias a las bisagras colocadas en *A* y *B* y por medio de los puntales *CE* y *DE*. Si se retira el puntal *DE*, determine las reacciones en las bisagras y la fuerza ejercida por el otro puntal *CE*. La bisagra puesta en *A* no ejerce ninguna fuerza de empuje axial.

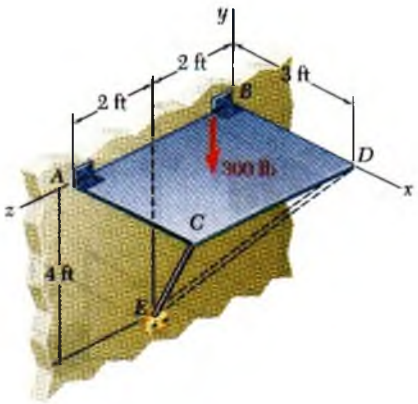


Figura P4.126

4.127 Una hoja de madera de 1.2 × 2.4 m se sostiene temporalmente por medio de clavos, instalados en *D* y *E*, y dos puntales de madera clavados en *A*, *B* y *C*. El viento sopla sobre la cara oculta de la hoja de madera, y se supone que su efecto puede representarse mediante una fuerza *P***k** aplicada en el centro de la hoja. Si cada puntal se vuelve inseguro y comienza a pandearse cuando está sujeto a una fuerza axial de 1.8 kN, determine *a*) el máximo valor permisible para la magnitud *P* de la fuerza del viento, *b*) el valor correspondiente de la componente *z* de la reacción en *E*. Suponga que los clavos están flojos y no ejercen ningún par.

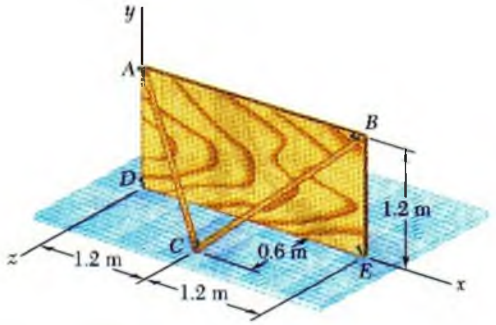


Figura *P4.127*

4.128 El mecanismo tensionante para una banda de transmisión consiste en la polea sin fricción *A*, la placa de montaje *B* y el resorte *C*. Unido a la parte baja de la placa de montaje se encuentra un bloque deslizante *D* que puede moverse libremente en la ranura de la ménsula *E*. Si la polea y la banda pertenecen a un plano horizontal, el tramo *F* de la banda es paralelo al eje *x*, y el tramo *G* forma un ángulo de 30° con el eje *x*, determine *a*) la fuerza en el resorte, *b*) la reacción en *D*.

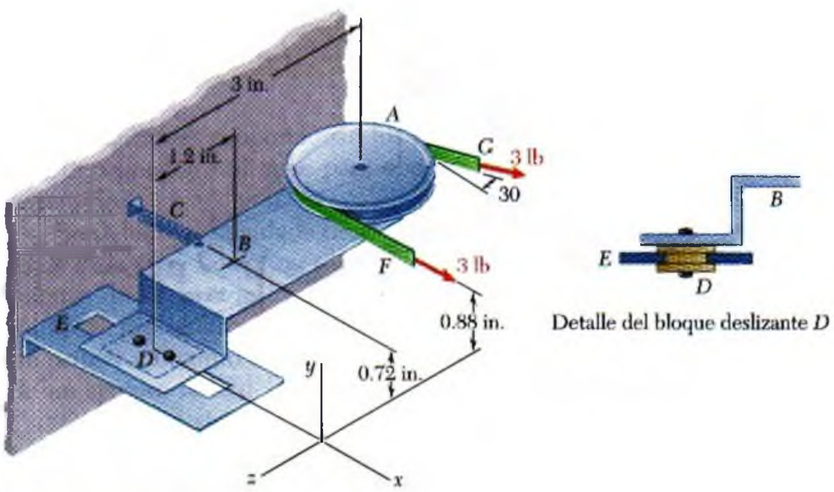


Figura P4.128

4.129 La palanca AB se suelda a la barra doblada BCD que está sostenida por el cojinete E y el cable DG. Si el cojinete puede ejercer una fuerza de empuje axial y pares respecto a ejes paralelos a los ejes x y z, determine *a*) la tensión en el cable DG, *b*) la reacción en E.

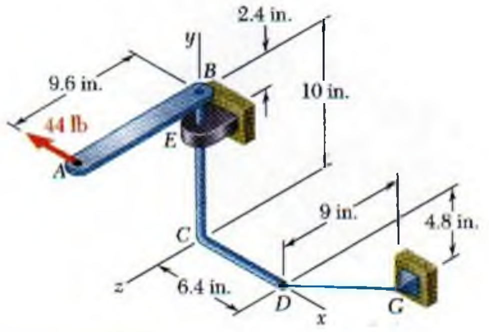


Figura *P4.129*

4.130 La palanca ABD puede deslizarse y girar libremente por el pasador horizontal colocado en B. Si la fuerza de 24 N pertenece a un plano paralelo al plano xy, y el pasador puede ejercer pares respecto a los ejes y y z, determine *a*) las fuerzas presentes en los resortes CF y DE, *b*) la reacción en B.

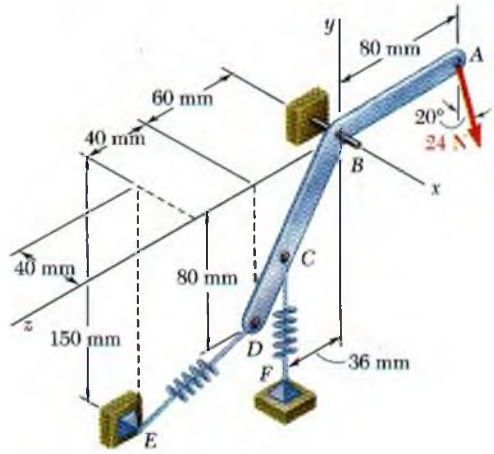


Figura P4.130

4.131 Resuelva el problema 4.124, pero ahora suponga que la bisagra en A se retira y que la bisagra en B puede ejercer pares respecto a los ejes y y z.

4.132 El elemento rígido ABC en forma de L se sostiene mediante un apoyo de rótula instalado en A y tres cables. Determine la tensión en cada cable y la reacción en A que causa la carga de 500 lb aplicada en G.

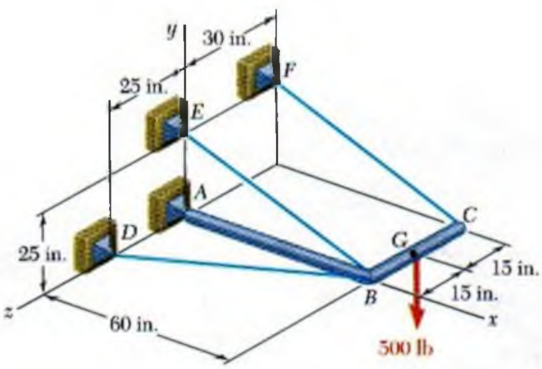


Figura P4.132

4.133 *Resuelva el problema 4.132, pero ahora suponga que se aplica una carga descendente adicional de 800 lb en C.*

4.134 El marco mostrado en la figura se sostiene mediante tres cables y un apoyo de rótula en A. Para $\mathbf{P} = 0$, determine la tensión en cada cable y la reacción en A.

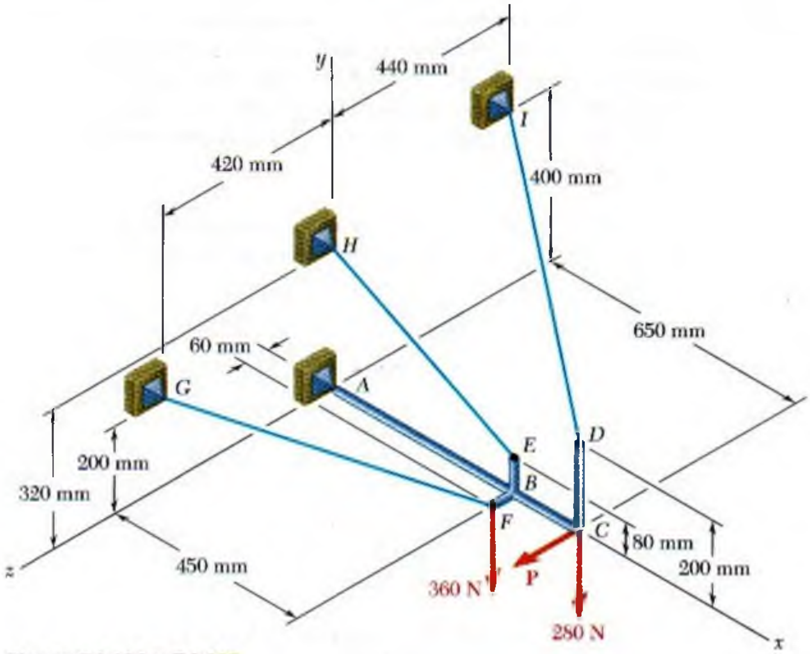


Figura P4.134 y P4.135

4.135 El marco mostrado en la figura se sostiene mediante tres cables y un apoyo de rótula en A. Para $P = 50$ N, determine la tensión en cada cable y la reacción en A.

4.136 Tres barras con longitudes $a = 9$ in., $b = 6$ in. y $c = 12$ in. se sueldan entre sí para formar la componente que se muestra en la figura. Esta componente se sostiene mediante las argollas colocadas en A y C y por medio de una muesca cortada en un bloque en el punto B. Sin tomar en cuenta la fricción, determine las reacciones en A, B y C cuando $P = 40$ lb, $M_A = 36$ lb · ft y $M_C = 0$.

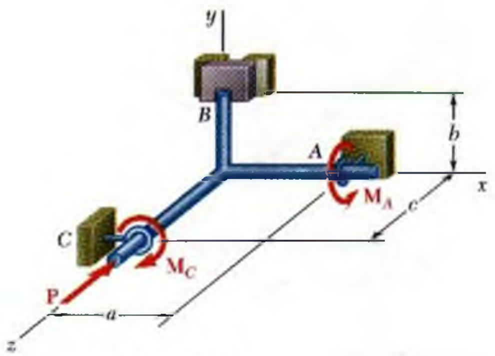


Figura P4.136 y *P4.137*

4.137 Tres barras con longitudes $a = 240$ mm, $b = 200$ mm y $c = 180$ mm se sueldan entre sí para formar la componente que se muestra en la figura. Esta componente se sostiene mediante las argollas colocadas en A y C y por medio de una muesca cortada en un bloque en el punto B. Sin tomar en cuenta la fricción, determine las reacciones en A, B y C cuando $P = 60$ N, $M_A = 6.3$ N · m y $M_C = 13$ N · m.

4.138 Para limpiar la tubería de desagüe obstruida *AE*, un plomero desconecta ambos extremos del tubo e inserta una guía a través de la abertura localizada en *A*. La cabeza cortadora de la guía se conecta mediante un pesado cable a un motor eléctrico que gira a velocidad constante mientras el plomero introduce el cable en la tubería. Las fuerzas ejercidas por el plomero y el motor sobre el extremo del cable se pueden representar mediante una llave de torsión $\mathbf{F} = -(80\text{ N})\mathbf{k}$, $\mathbf{M} = -(144\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$. Determine las reacciones adicionales en *B*, *C* y *D* causadas por la operación de limpieza. Suponga que la reacción en cada soporte consiste en dos componentes de fuerza perpendiculares a la tubería.

4.139 Resuelva el problema 4.138, pero ahora suponga que el plomero ejerce una fuerza $\mathbf{F} = -(80\text{ N})\mathbf{k}$ y que el motor se desconecta ($\mathbf{M} = 0$).

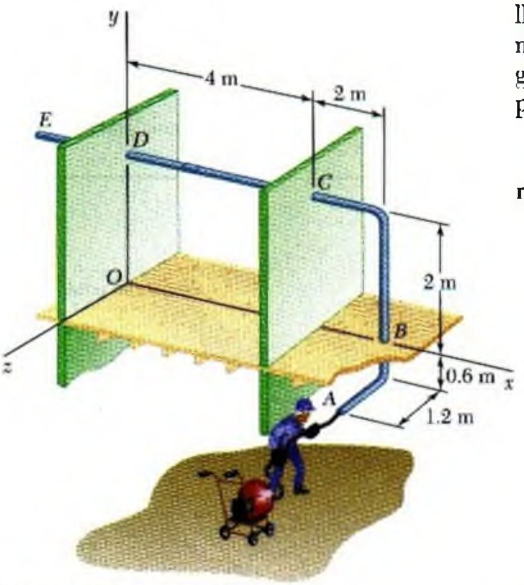


Figura P4.138

4.140 Una barra uniforme *AB* de 525 mm de longitud y masa de 3 kg está unida a un apoyo de rótula en *A*. La barra descansa sin fricción sobre una superficie inclinada y se mantiene en la posición que indica la figura mediante la cuerda *BC*. Si la cuerda tiene longitud de 525 mm, determine *a*) la tensión en la cuerda, *b*) las reacciones en *A* y *B*.

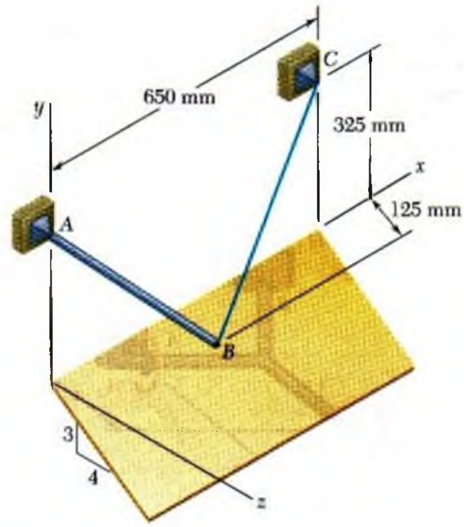


Figura P4.140

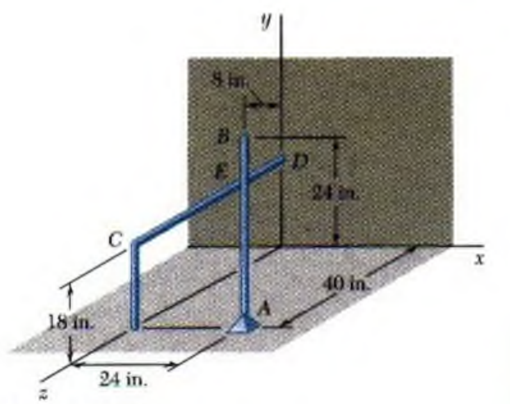


Figura P4.141

4.141 La barra uniforme *AB* de 10 lb se sostiene mediante un apoyo de rótula en *A* y también se apoya sobre la barra *CD* y la pared vertical. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine *a*) la fuerza que ejerce la barra *CD* sobre la barra *AB*, *b*) las reacciones en *A* y *B*. (*Sugerencia*: La fuerza ejercida por *CD* sobre *AB* debe ser perpendicular a ambas barras.)

4.142 Mientras se instala una canaleta *ABCD* de 25 kg, ésta se sujeta a la pared mediante las bisagras *E* y *F* y se asegura con los puntales *GH* e *IJ* en su borde exterior. Si el peso de la canaleta está distribuido uniformemente, determine la magnitud de la fuerza ejercida sobre ésta por el puntal *GH* cuando se retira el puntal *IJ*.

4.143 Mientras se instala una canaleta *ABCD* de 25 kg, ésta se sujeta a la pared mediante las bisagras *E* y *F* y se asegura con los puntales *GH* e *IJ* en su borde exterior. Si el peso de la canaleta está uniformemente distribuido, determine la magnitud de la fuerza ejercida sobre ésta por el puntal *IJ* cuando se retira el puntal *GH*.

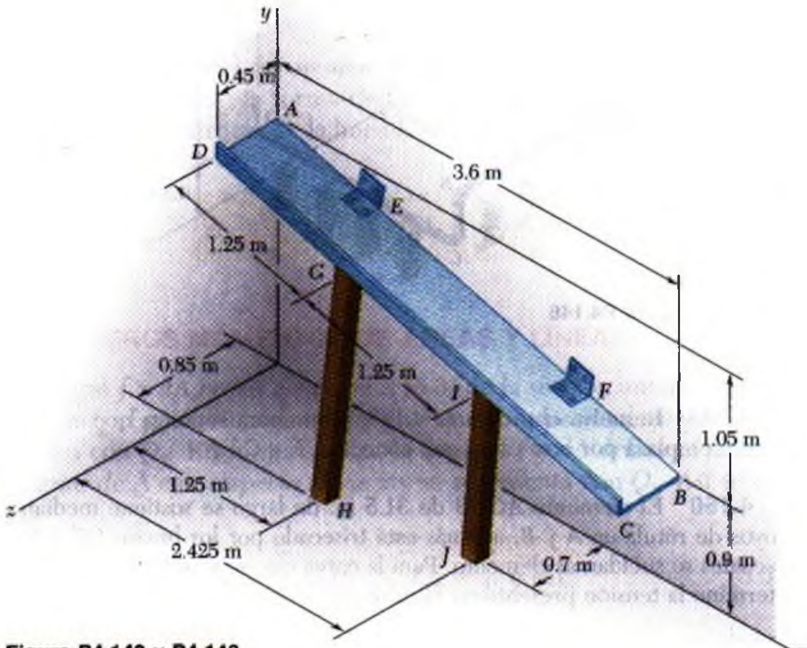


Figura P4.142 y P4.143

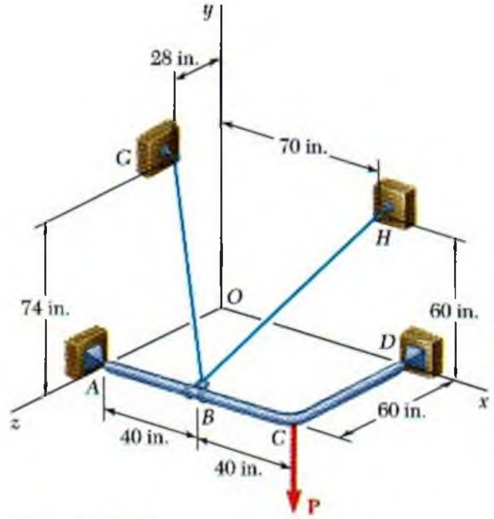


Figura P4.144

4.144 El marco *ACD* se sostiene por medio de rótulas colocadas en *A* y *D* y mediante un cable que pasa por un anillo en *B* y está unido a ganchos en *G* y *H*. Si en el punto *C* el marco soporta una carga de magnitud $P = 75$ lb, determine la tensión presente en el cable.

4.145 Resuelva el problema 4.144, pero ahora suponga que el cable *GBH* se reemplaza por un cable *GB* unido sólo en *G* y *B*.

4.146 Dos paneles de madera de 3×6 ft, que pesan 30 lb cada uno, están clavados entre sí como se muestra en la figura. Los paneles se sostienen mediante apoyos de rótula en *A* y *F* y el alambre *BH*. Determine *a*) la ubicación de *H* en el plano *xy* si la tensión en el alambre debe ser mínima, *b*) la tensión mínima correspondiente.

4.147 Resuelva el problema 4.146 sujeto a la restricción de que *H* debe yacer sobre el eje *y*.

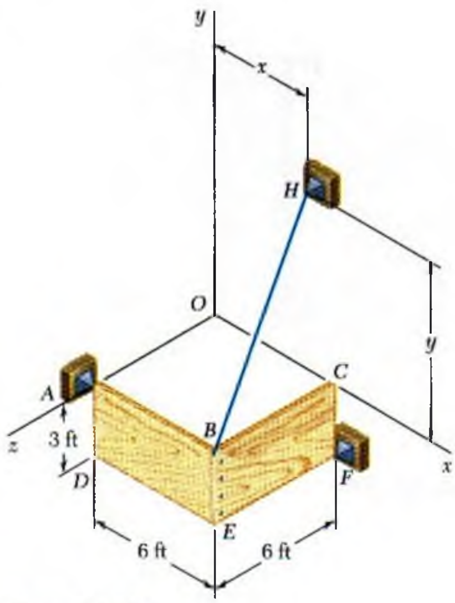


Figura P4.146

4.148 Para regar las plantas que se muestran en la figura, un jardinero une los tres tramos de tubería *AB*, *BC* y *CD* adaptados con rociadores, y sostiene el ensamble usando apoyos articulados en *A* y *D* y mediante el cable *EF*. Si la tubería tiene una masa por unidad de longitud de 1.25 kg/m, determine la tensión en el cable.

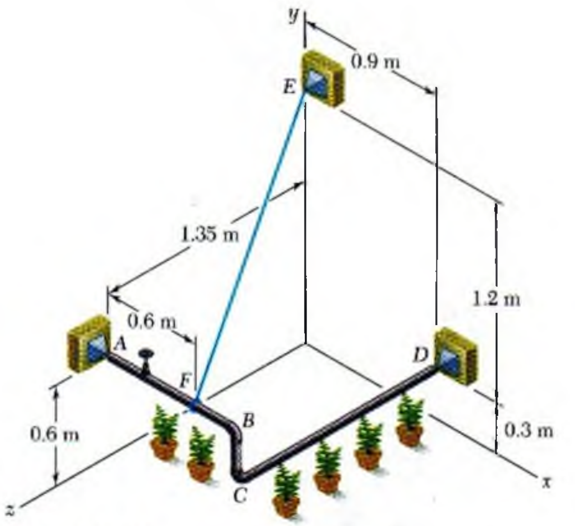


Figura P4.148

4.149 Resuelva el problema 4.148, pero ahora suponga que el cable *EF* se reemplaza por otro cable que conecta a *E* y *C*.

4.150 El elemento *ACDB* de 31.5 in. de largo se sostiene mediante apoyos de rótula en *A* y *B*, además está trisecado por los brazos *CE* y *DF*, los cuales se sueldan al elemento. Para la carga que se muestra en la figura, determine la tensión presente en el cable *FG*.

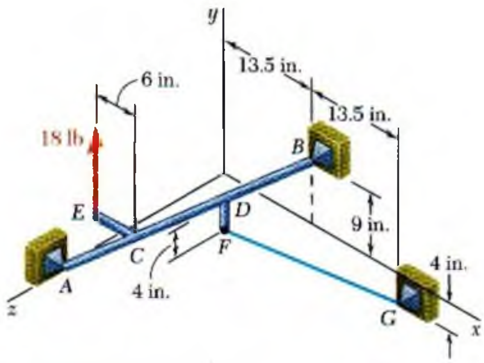


Figura P4.150

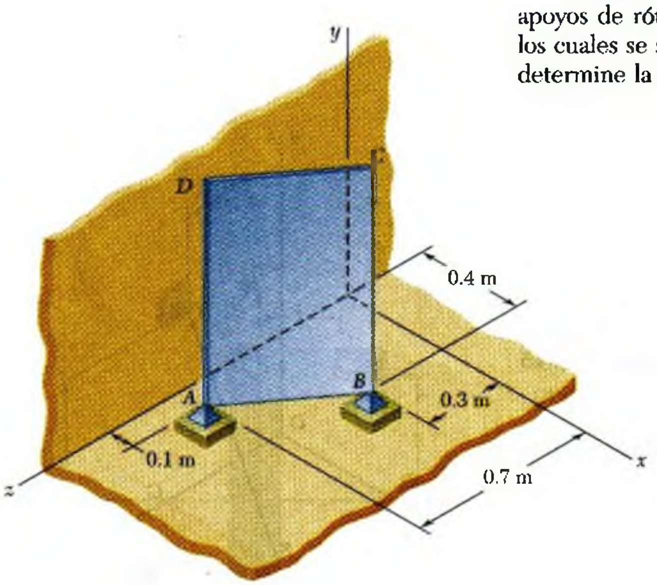


Figura *P4.151*

4.151 Una placa uniforme de acero *ABCD* mide 0.5 × 0.75 m. Tiene masa de 40 kg y está conectada a apoyos de rótula en *A* y *B*. Si la placa se apoya sin fricción en *D* sobre una pared vertical, determine *a*) la ubicación de *D*, *b*) la reacción en *D*.

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 4

Ecuaciones de equilibrio

Este capítulo estuvo dedicado al estudio del *equilibrio de cuerpos rígidos*, esto es, a la situación en la cual las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido *forman un sistema equivalente a cero* [sección 4.1]. Entonces, se tiene que

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \qquad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \qquad (4.1)$$

Si se descomponen cada una de las fuerzas y cada uno de los momentos en sus componentes rectangulares, se pueden expresar las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de un cuerpo rígido a través de las seis ecuaciones escalares que se presentan a continuación:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0 \qquad (4.2)$$

$$\Sigma M_x = 0 \qquad \Sigma M_y = 0 \qquad \Sigma M_z = 0 \qquad (4.3)$$

Estas ecuaciones pueden utilizarse para determinar fuerzas desconocidas aplicadas sobre el cuerpo rígido o reacciones desconocidas ejercidas por sus apoyos.

Diagrama de cuerpo libre

Cuando se resuelve un problema que involucra el equilibrio de un cuerpo rígido, es esencial considerar *todas* las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Por tanto, el primer paso en la solución del problema debe ser dibujar un *diagrama de cuerpo libre* que muestre al cuerpo en estudio y todas las fuerzas, conocidas o no, que actúan sobre el mismo [sección 4.2].

Equilibrio de una estructura bidimensional

En la primera parte del capítulo se estudió el *equilibrio de una estructura bidimensional*; es decir, se supuso que la estructura considerada y la fuerza aplicada sobre ésta estaban contenidas en el mismo plano. Se vio que cada una de las reacciones ejercidas sobre la estructura por sus apoyos podían involucrar una, dos o tres incógnitas, dependiendo del tipo de apoyo [sección 4.3].

En el caso de una estructura bidimensional, las ecuaciones (4.1) o las ecuaciones (4.2) y (4.3) se reducen a *tres ecuaciones de equilibrio*, las cuales son

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_A = 0 \qquad (4.5)$$

donde A es un punto arbitrario en el plano de la estructura [sección 4.4]. Estas ecuaciones pueden utilizarse para determinar tres incógnitas. A pesar de las tres ecuaciones de equilibrio (4.5) no se le pueden *añadir* ecuaciones adicionales, cualquiera de ellas puede ser *reemplazada* por otra. Por tanto, se pueden escribir conjuntos alternativos de ecuaciones de equilibrio como

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0 \qquad (4.6)$$

donde el punto B se selecciona de manera que la línea AB no sea paralela al eje y, o

$$\Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0 \qquad \Sigma M_C = 0 \qquad (4.7)$$

donde los puntos A, B y C no deben ser colineales.

Como cualquier conjunto de ecuaciones de equilibrio se puede resolver para un máximo de tres incógnitas, no se pueden determinar por completo las reacciones en los apoyos de una estructura rígida bidimensional si éstas involucran *más de tres incógnitas*; entonces se dice que dichas reacciones son *estáticamente indeterminadas* [sección 4.5]. Por otra parte, si las reacciones involucran *menos de tres incógnitas*, no se mantendrá el equilibrio bajo condiciones generales de carga, entonces se dice que la estructura tiene *restricción parcial*. El hecho de que las reacciones involucren exactamente tres incógnitas no garantiza que las ecuaciones de equilibrio pueden resolverse para todas las incógnitas. Si los apoyos están ubicados de manera que las reacciones son *concurrentes o paralelas*, las reacciones son estáticamente indeterminadas y se dice que la estructura tiene *restricciones impropias*.

Indeterminación estática

Restricciones parciales

Restricciones impropias

Se prestó atención a dos casos particulares de equilibrio de un cuerpo rígido. En la sección 4.6 se definió a un *cuerpo rígido sujeto a dos fuerzas* como un cuerpo rígido sometido a fuerzas que actúan únicamente en dos puntos y se demostró que las resultantes $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ de estas fuerzas deben tener *la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos* (figura 4.11), esta propiedad simplificará la solución de ciertos problemas en los capítulos posteriores. En la sección 4.7 se definió a un *cuerpo rígido sujeto a tres fuerzas* como un cuerpo rígido sometido a fuerzas que actúan sólo en tres puntos y se demostró que las resultantes $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ de estas fuerzas deben ser *concurrentes* (figura 4.12) o *paralelas*. Esta propiedad proporciona un enfoque alternativo para la solución de problemas que involucran a cuerpos sometidos a la acción de tres fuerzas [problema resuelto 4.6].

Cuerpo sujeto a dos fuerzas

Cuerpo sujeto a tres fuerzas

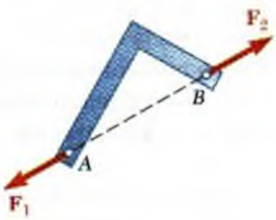


Figura 4.11

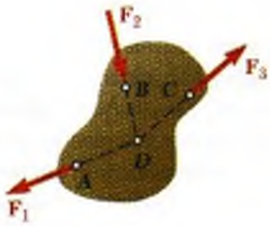


Figura 4.12

Equilibrio de un cuerpo tridimensional

En la segunda parte del capítulo se explicó el *equilibrio de un cuerpo tridimensional* y se vio que cada una de las reacciones ejercidas sobre el cuepo por sus apoyos podía involucrar entre una y seis incógnitas, dependiendo del tipo de apoyo [sección 4.8].

En el caso general del equilibrio de un cuerpo tridimensional, las seis ecuaciones escalares de equilibrio (4.2) y (4.3) listadas al principio de este repaso deben utilizarse y resolverse para *seis incógnitas* [sección 4.9]. Sin embargo, en la mayoría de los problemas estas ecuaciones se obtendrán de manera más conveniente si primero se escribe

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \qquad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \qquad (4.1)$$

y se expresan las fuerzas $\mathbf{F}$ y los vectores de posición $\mathbf{r}$ en términos de componentes escalares y vectores unitarios. Entonces, se pueden

calcular los productos vectoriales, ya sea en forma directa o empleando determinantes, con el fin de obtener las ecuaciones escalares deseadas igualando a cero los coeficientes de los vectores unitarios [problemas resueltos 4.7 a 4.9].

Se ha señalado que es posible eliminar hasta tres componentes de reacción desconocidos del cálculo de $\Sigma \mathbf{M}_O$ en la segunda de las relaciones (4.1) por medio de una selección cuidadosa del punto O. Además, de la solución de algunos problemas se pueden eliminar las reacciones en dos puntos A y B escribiendo la ecuación $\Sigma M_{AB} = 0$, la cual involucra el cálculo de los momentos de las fuerzas con respecto a un eje AB que une a los puntos A y B [problema resuelto 4.10].

Si las reacciones involucran más de seis incógnitas, algunas de las reacciones son *estáticamente indeterminadas*; cuando involucran menos de seis incógnitas, el cuerpo rígido está *parcialmente restringido*. Aunque existan seis o más incógnitas, el cuerpo rígido estará *impropiamente restringido* si las reacciones asociadas con los apoyos dados son paralelas o si intersecan la misma línea.

Problemas de repaso

4.152 El valor máximo permisible para cada una de las reacciones es de 360 N. Sin tomar en cuenta el peso de la viga, determine el rango de valores de la distancia d para los cuales la viga es segura.

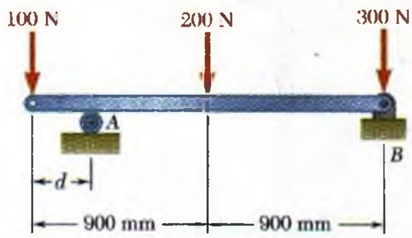


Figura P4.152

4.153 Determine la máxima tensión que puede soportar el cable AB si el máximo valor permisible de la reacción en C es de 1 000 N.

4.154 Sin tomar en cuenta la fricción, determine la tensión en el cable ABD y la reacción en el apoyo C.

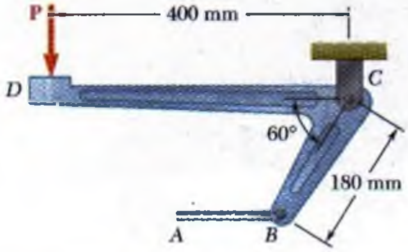


Figura P4.153

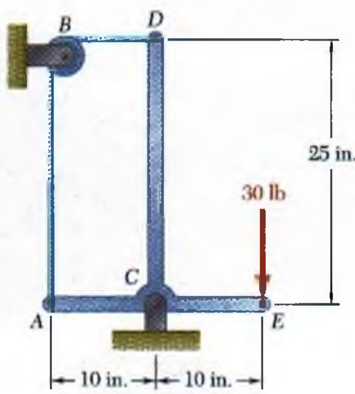


Figura *P4.154*

4.155 Si la tensión en el alambre BD es de 300 lb, determine la reacción en el apoyo fijo C del marco que se muestra en la figura.

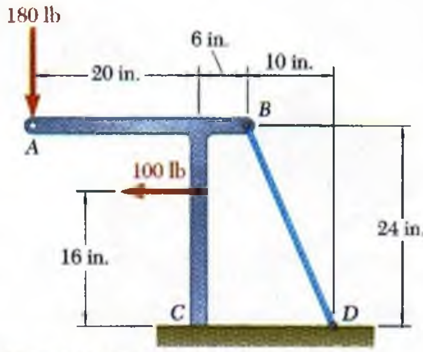


Figura P4.155

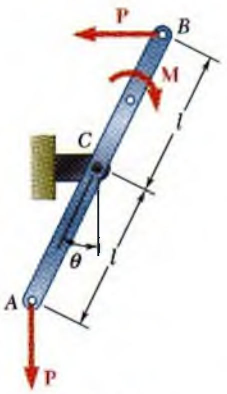


Figura ***P4.156***

4.156 La barra AB se somete a la acción de un par **M** y a dos fuerzas, cada una de las cuales tiene magnitud P. *a*) Encuentre una ecuación en función de θ, P M y l que se cumpla cuando la barra esté en equilibrio. *b*) Determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando $M = 150$ lb · in., $P = 20$ lb y $l = 6$ in.

4.157 Una caja de 200 lb se sostiene mediante la grúa viajera mostrada en la figura. Si $a = 1.5$ ft, determine *a*) la tensión en el cable CD, *b*) la reacción en B.

4.158 La barra AB está doblada en forma circular y se coloca entre las clavijas D y E. La barra soporta una carga **P** en el extremo B. Sin tomar en cuenta la fricción y el peso de la barra, determine la distancia c correspondiente a la posición de equilibrio cuando $a = 25$ mm y $R = 125$ mm.

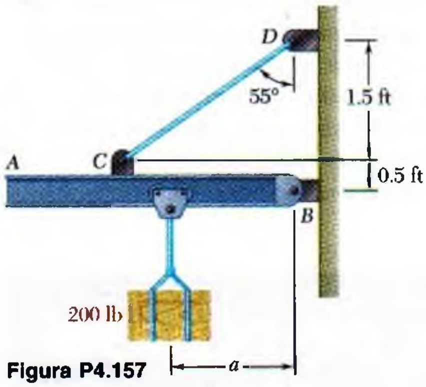


Figura P4.157

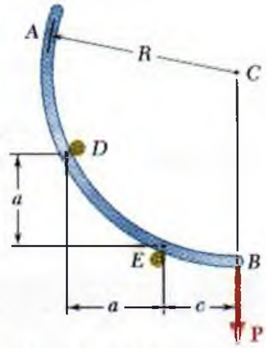


Figura P4.158

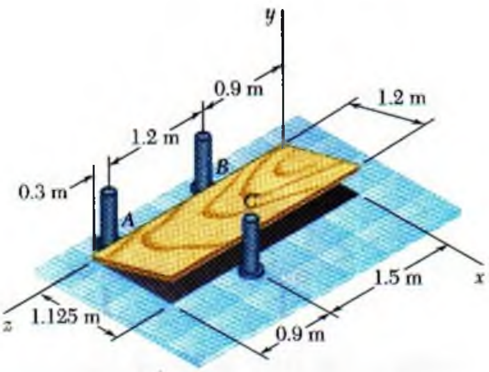


Figura P4.159

4.159 Una hoja de madera de 1.2 × 2.4 m y masa de 17 kg ha sido colocada temporalmente entre tres apoyos tubulares. El costado inferior de la hoja se apoya sobre pequeños collarines instalados en A y B, y el costado superior se apoya en el tubo C. Sin tomar en cuenta la fricción entre todas las superficies en contacto, determine las reacciones en A, B y C.

4.160 Una tapa de 30 kg instalada en la abertura de un techo tiene bisagras en las esquinas A y B. El tejado forma un ángulo de 30° con la horizontal y la tapa se mantiene en posición horizontal mediante el puntal CE. Determine *a*) la magnitud de la fuerza ejercida por la barra, *b*) las reacciones en las bisagras. Suponga que la bisagra colocada en A no ejerce ninguna fuerza de empuje axial.

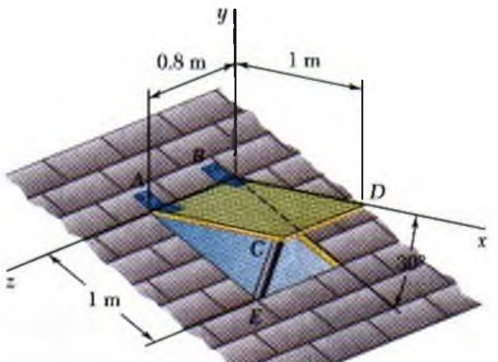


Figura ***P4.160***

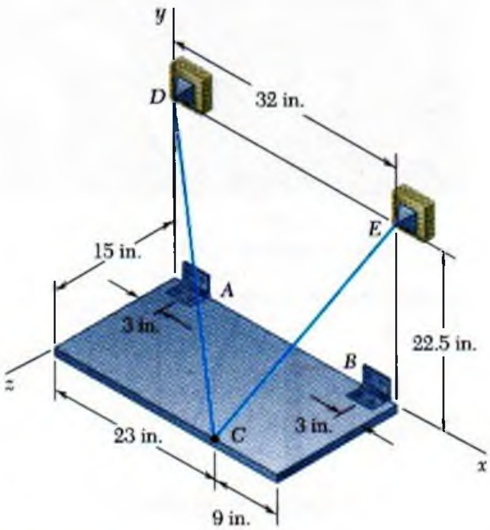


Figura P4.161

4.161 Una placa rectangular uniforme de 285 lb se sostiene en la posición mostrada por medio de bisagras puestas en A y B, y mediante el cable DCE que pasa sin fricción por un gancho colocado en C. Si la tensión en ambos tramos del cable es la misma, determine *a*) la tensión en el cable, *b*) las reacciones en A y B. Suponga que la bisagra en B no ejerce ninguna fuerza de empuje axial.

4.162 El elemento rígido *ABF* en forma de L se sostiene mediante tres cables y un apoyo de rótula colocado en *A*. Para las cargas que se muestran en la figura, determine la tensión en cada cable y la reacción en *A*.

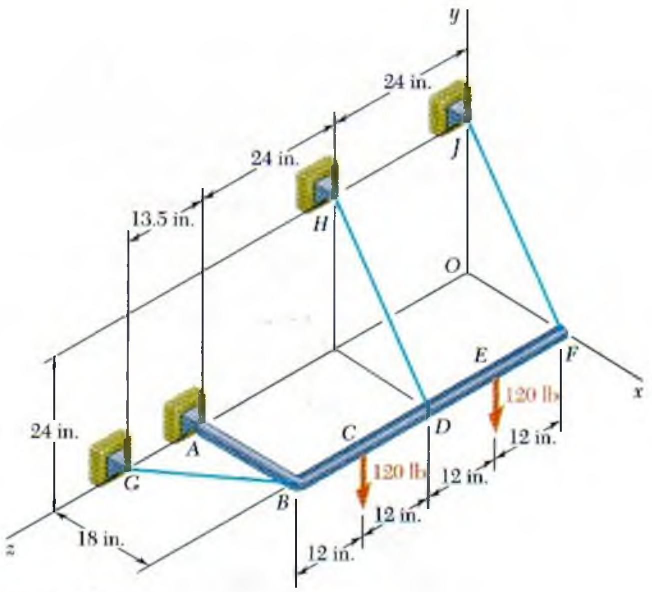


Figura P4.162

4.163 La barra doblada *ABDE* se sostiene por medio de rótulas instaladas en *A* y *E* y el cable *DF*. Si se aplica una carga de 600 N en *C* como indica la figura, determine la tensión presente en el cable.

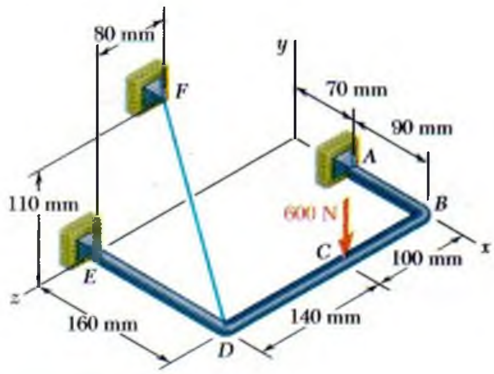


Figura *P4.163*

Problemas de computadora

4.C1 Una barra delgada *AB* de peso *W* se une a los bloques *A* y *B* que se mueven libremente sobre las guías mostradas en la figura. El resorte de constante *k* se encuentra sin deformar cuando la barra está en posición horizontal. Sin tomar en cuenta el peso de los bloques, derive una ecuación en términos de θ, *W*, *l* y *k* a ser satisfecha cuando la barra esté en equilibrio. Sabiendo que $W = 10$ lb y $l = 40$ in., *a*) calcule y grafique el valor de la constante *k* del resorte como una función del ángulo θ para $15° \leq \theta \leq 40°$, *b*) determine los dos valores del ángulo θ correspondientes a la posición de equilibrio cuando $k = 0.7$ lb/in.

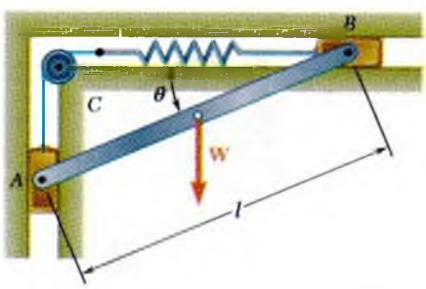


Figura P4.C1

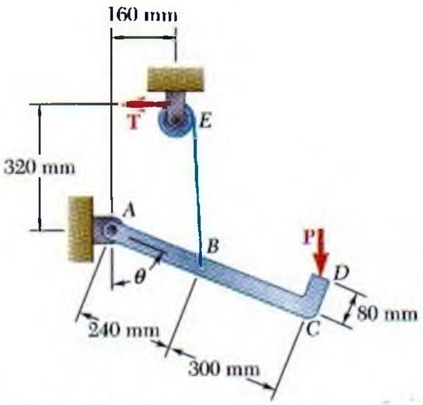


Figura P4.C2

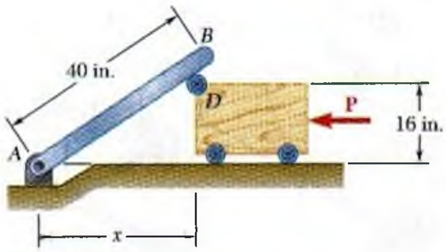


Figura P4.C3

4.C2 La posición de la barra en forma de L mostrada en la figura se controla mediante un cable conectado en el punto B. Si la barra soporta una carga de magnitud $P = 200$ N, utilice un progama de cómputo para calcular y graficar la tensión T en el cable como una función de θ para valores de θ desde 0 hasta 120°. Determine la tensión máxima $T_{\text{máx}}$ y el valor correspondiente de θ.

4.C3 La posición de una barra AB de 20 lb se controla por medio del bloque mostrado en la figura, éste se mueve lentamente hacia la izquierda por la acción de la fuerza **P**. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, use un programa de cómputo para calcular y graficar la magnitud P de la fuerza como una función de los valores descendentes de x entre 30 in. y 0. Determine el valor máximo de P y el valor correspondiente de x.

***4.C4** El elemento ABC se sostiene por medio de un apoyo de pasador colocado en C y un cable rígido con longitud de 3.5 m, el cual está conectado en A y B y pasa sin fricción por una polea puesta en D. Sin tomar en cuenta la masa de ABC y el radio de la polea, *a)* grafique la tensión en el cable como una función de a para $0 \leq a \leq 2.4$ m, *b)* determine el valor máximo de a para el cual puede mantenerse la posición de equilibrio.

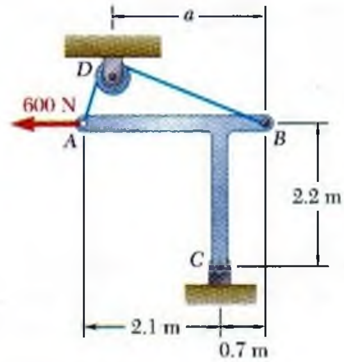


Figura P4.C4

4.C5 y 4.C6 El resorte AB de constante k está sin deformar cuando $\theta = 0$. Si $R = 200$ mm, $a = 400$ mm y $k = 1$ kN/m, use un programa de cómputo para calcular y graficar la masa m correspondiente a la posición de equilibrio como una función de θ para valores de θ desde 0 hasta 90°. Determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando $m = 2$ kg.

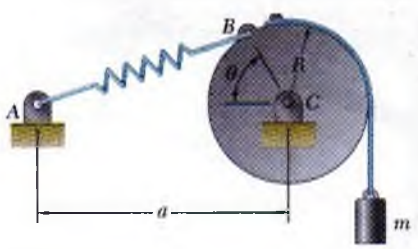


Figura P4.C5

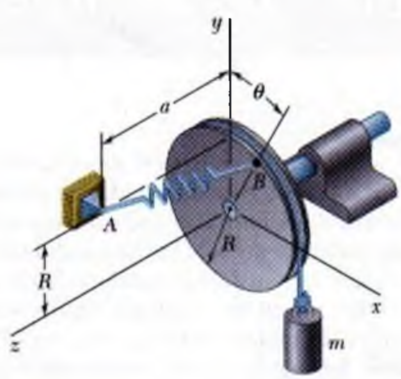


Figura P4.C6

4.C7 Un panel de 8 × 10 in. y peso $W = 40$ lb se sostiene mediante dos bisagras colocadas en el costado AB. El cable CDE, que se une al panel en C y pasa sobre una polea pequeña en D, sostiene un cilindro de peso W. Sin considerar el efecto de la fricción, use un programa de cómputo para calcular y graficar el peso del cilindro correspondiente a la posición de equilibrio como una función de θ para valores de θ desde 0 hasta 90°. Determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando $W = 20$ lb.

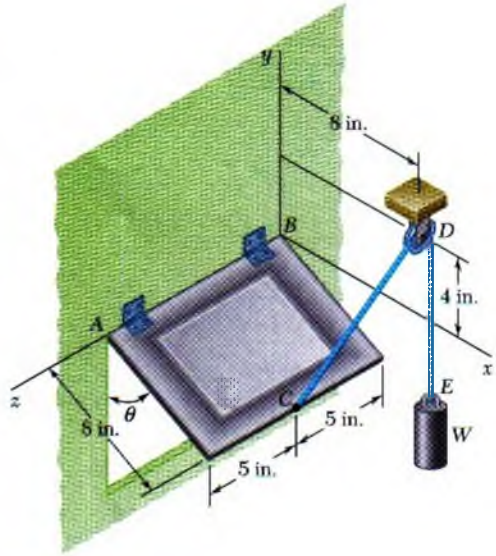


Figura P4.C7

4.C8 Una placa circular uniforme con radio de 300 mm y masa de 26 kg se sostiene mediante tres alambres verticales espaciados uniformemente alrededor del borde de la placa. Un bloque pequeño E de 3 kg, colocado inicialmente sobre la placa en D, se mueve lentamente a lo largo del diámetro CD hasta llegar a C. *a*) Grafique la tensión en los alambres A y C como una función de a, donde a es la distancia medida desde el bloque hasta D. *b*) Determine el valor de a para el cual la tensión en los alambres A y C es mínima.

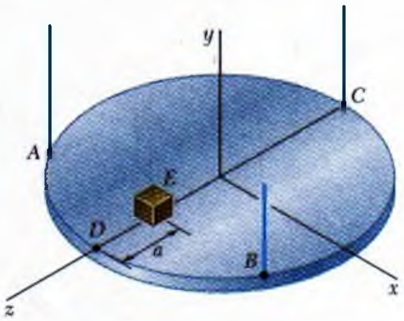


Figura P4.C8

4.C9 La grúa mostrada en la figura soporta una caja de 4 000 lb y se sostiene mediante una rótula colocada en A y dos cables unidos en D y E. Si la grúa se encuentra en un plano vertical que forma un ángulo ϕ con el plano xy, use un programa de cómputo para calcular y graficar la tensión en cada cable como una función de ϕ para valores de ϕ entre 0 y 40°. Determine el valor de ϕ para el cual la tensión en el cable BE es máxima.

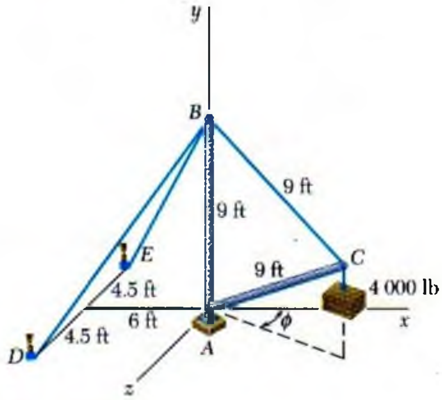


Figura P4.C9

4.C10 La placa uniforme de acero $ABCD$ se suelda al eje EF y se mantiene en la posición mostrada mediante el par **M**. Si los collarines evitan que el eje se deslice sobre los cojinetes y éste pertenece al plano yz, grafique la magnitud M del par como una función de θ para $0 \leq \theta \leq 90°$.

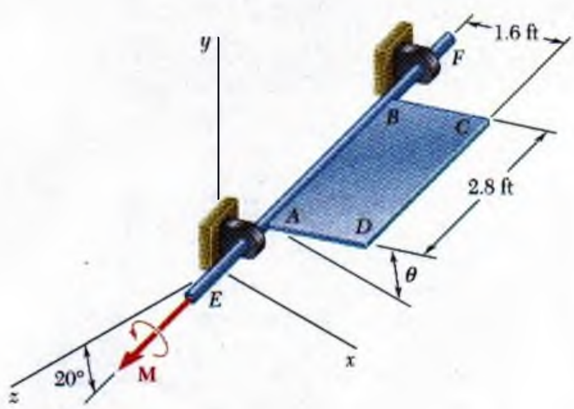


Figura P4.C10

CAPÍTULO **5**

Fuerzas distribuidas: centroides y centros de gravedad



En la fotografía se muestra la construcción de un tramo del viaducto Skyway, el cual cruza la bahía que se encuentra entre San Francisco y Oakland. En este capítulo se introducirá el concepto del centroide de un área; en cursos posteriores se establecerá la relación existente entre la ubicación del centroide y el comportamiento de la carretera tendida sobre el viaducto.



Fotografía 5.1 El balance preciso de los componentes de un móvil requiere de una comprensión de los centros de gravedad y centroides, que son los tópicos principales de este capítulo.

5.1. INTRODUCCIÓN

Hasta ahora se ha supuesto que la atracción ejercida por la Tierra sobre un cuerpo rígido podía representarse por una sola fuerza **W**. Esta fuerza, denominada fuerza de gravedad o peso del cuerpo, debía aplicarse en el *centro de gravedad* del cuerpo (sección 3.2). De hecho, la Tierra ejerce una fuerza sobre cada una de las partículas que constituyen al cuerpo. En este sentido, la acción de la Tierra sobre un cuerpo rígido debe representarse por un gran número de pequeñas fuerzas distribuidas sobre todo el cuerpo. Sin embargo, en este capítulo se aprenderá que la totalidad de dichas fuerzas pequeñas puede ser reemplazada por una sola fuerza equivalente **W**. También se aprenderá cómo determinar el centro de gravedad, esto es, el punto de aplicación de la resultante **W**, para cuerpos de varias formas.

En la primera parte del capítulo se describen cuerpos bidimensionales como placas planas y alambres que están contenidos en un plano dado. Se introducen dos conceptos que están muy relacionados con la determinación del centro de gravedad de una placa o de un alambre: el concepto de *centroide* de un área o de una línea y el concepto del *primer momento* de un área o de una línea con respecto a un eje dado.

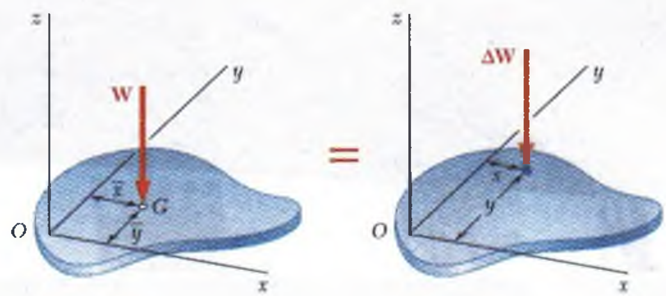
También se aprenderá que el cálculo del área de una superficie de revolución o del volumen de un cuerpo de revolución está directamente relacionado con la determinación del centroide de la línea o del área utilizados para generar dicha superficie o cuerpo de revolución (teoremas de Pappus-Guldinus). Además, como se muestra en las secciones 5.8 y 5.9, la determinación del centroide de un área simplifica el análisis de vigas sujetas a cargas distribuidas y el cálculo de las fuerzas ejercidas sobre superficies rectangulares sumergidas, como compuertas hidráulicas y porciones de presas.

Al final del capítulo se aprenderá cómo determinar tanto el centro de gravedad de cuerpos tridimensionales como el centroide de un volumen y los primeros momentos de dicho volumen con respecto a los planos coordenados.

ÁREAS Y LÍNEAS

5.2. CENTRO DE GRAVEDAD DE UN CUERPO BIDIMENSIONAL

Para iniciar, considere una placa plana horizontal (figura 5.1). La placa puede dividirse en n elementos pequeños. Las coordenadas del pri-



$$\Sigma M_y: \quad \bar{x}W = \Sigma x\, \Delta W$$
$$\Sigma M_x: \quad \bar{y}W = \Sigma y\, \Delta W$$

Figura 5.1 Centro de gravedad de una placa.

mer elemento se representan con x_1 y y_1, las del segundo elemento se representan con x_2 y y_2, etc. Las fuerzas ejercidas por la Tierra sobre los elementos de la placa serán representadas, respectivamente, con $\Delta\mathbf{W}_1$, $\Delta\mathbf{W}_2$, . . . , $\Delta\mathbf{W}_n$. Estas fuerzas o pesos están dirigidos hacia el centro de la Tierra; sin embargo, para todos los propósitos prácticos, se puede suponer que dichas fuerzas son paralelas. Por tanto, su resultante es una sola fuerza en la misma dirección. La magnitud W de esta fuerza se obtiene a partir de la suma de las magnitudes de los pesos de los elementos:

$$\Sigma F_z: \qquad W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \cdots + \Delta W_n$$

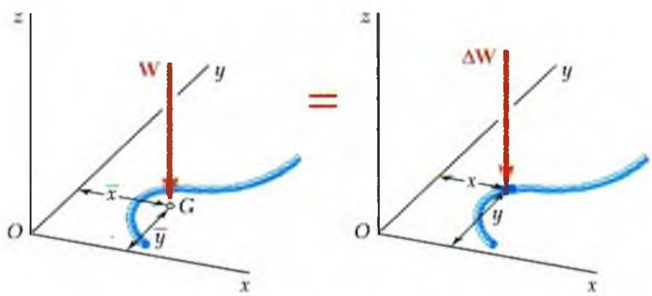
para obtener las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ del punto G, donde debe aplicarse la resultante $\mathbf{W}$, se escribe que los momentos de $\mathbf{W}$ con respecto a los ejes y y x son iguales a la suma de los momentos correspondientes de los pesos elementales, esto es

$$\begin{aligned} \Sigma M_y: &\qquad \bar{x}W = x_1\,\Delta W_1 + x_2\,\Delta W_2 + \cdots + x_n\,\Delta W_n \\ \Sigma M_x: &\qquad \bar{y}W = y_1\,\Delta W_1 + y_2\,\Delta W_2 + \cdots + y_n\,\Delta W_n \end{aligned} \qquad (5.1)$$

Si ahora se incrementa el número de elementos en los cuales se ha dividido la placa y simultáneamente se disminuye el tamaño de cada elemento se obtienen, en el límite, las siguientes expresiones:

$$W = \int dW \qquad \bar{x}W = \int x\,dW \qquad \bar{y}W = \int y\,dW \qquad (5.2)$$

Estas ecuaciones definen el peso $\mathbf{W}$ y las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ del centro de gravedad G de una placa plana. Se pueden derivar las mismas ecuaciones para un alambre que se encuentra en el plano xy (figura 5.2). Se observa que usualmente el centro de gravedad G de un alambre no está localizado sobre este último.



$\Sigma M_y: \quad \bar{x}\,W = \Sigma x\,\Delta W$

$\Sigma M_x: \quad \bar{y}\,W = \Sigma y\,\Delta W$

Figura 5.2 Centro de gravedad de un alambre.

5.3. CENTROIDES DE ÁREAS Y LÍNEAS

En el caso de una placa plana homogénea de espesor uniforme, la magnitud ΔW del peso de un elemento de la placa puede expresarse como

$$\Delta W = \gamma t \, \Delta A$$

donde γ = peso específico (peso por unidad de volumen) del material
t = espesor de la placa
ΔA = área del elemento

En forma similar, se puede expresar la magnitud W del peso de toda la placa como

$$W = \gamma t A$$

donde A es el área total de la placa.

Si se emplean las unidades de uso común en Estados Unidos, se debe expresar el peso específico γ en lb/ft^3, el espesor t en pies y las áreas ΔA y A en pies cuadrados. Entonces, se observa que ΔW y W estarán expresados en libras. Si se usan las unidades del SI, se debe expresar a γ en N/m^3, a t en metros y a las áreas ΔA y A en metros cuadrados; entonces, los pesos ΔW y W estarán expresados en newtons.[1]

Si se sustituye a ΔW y a W en las ecuaciones de momento (5.1) y se divide a todos los términos entre γt, se obtiene

$$\Sigma M_y: \quad \bar{x}A = x_1 \, \Delta A_1 + x_2 \, \Delta A_2 + \cdots + x_n \, \Delta A_n$$
$$\Sigma M_x: \quad \bar{y}A = y_1 \, \Delta A_1 + y_2 \, \Delta A_2 + \cdots + y_n \, \Delta A_n$$

Si se incrementa el número de elementos en los cuales se divide el área A y simultáneamente se disminuye el tamaño de cada elemento, se obtiene en el límite

$$\bar{x}A = \int x \, dA \qquad \bar{y}A = \int y \, dA \tag{5.3}$$

Estas ecuaciones definen las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ del centro de gravedad de una placa homogénea. El punto cuyas coordenadas son $\bar{x}$ y $\bar{y}$ también se conoce como el *centroide C del área A* de la placa (figura 5.3). Si la placa no es homogénea, estas ecuaciones no se pueden utilizar para determinar el centro de gravedad de la placa; sin embargo, éstas aún definen al centroide del área.

En el caso de un alambre homogéneo de sección transversal uniforme, la magnitud ΔW del peso de un elemento de alambre puede expresarse como

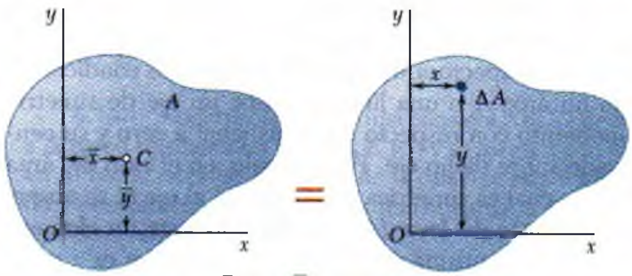
$$\Delta W = \gamma a \, \Delta L$$

donde γ = peso específico del material
a = área de la sección transversal del alambre
ΔL = longitud del elemento

[1] Se debe señalar que en el Sistema Internacional de unidades generalmente se caracteriza a un material dado por su densidad ρ (masa por unidad de volumen) en lugar de caracterizarlo por su peso específico γ. Entonces, el peso específico del material se puede obtener a partir de la relación

$$\gamma = \rho g$$

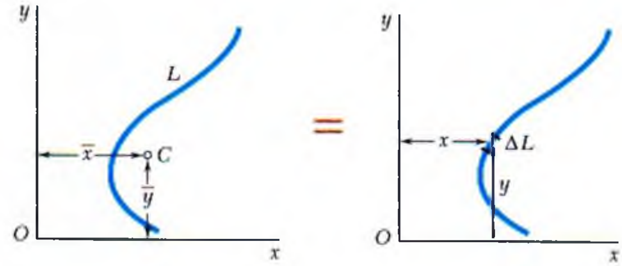
donde $g = 9.81 \, m/s^2$. Como ρ se expresa en kg/m^3, se observa que γ estará expresado en $(kg/m^3)(m/s^2)$, esto es, en N/m^3.



$\Sigma M_y: \quad \bar{x}A = \Sigma x\,\Delta A$

$\Sigma M_x: \quad \bar{y}A = \Sigma y\,\Delta A$

Figura 5.3 Centroide de un área.



$\Sigma M_y: \quad \bar{x}L = \Sigma x\,\Delta L$

$\Sigma M_x: \quad \bar{y}L = \Sigma y\,\Delta L$

Figura 5.4 Centroide de una línea.

El centro de gravedad de un alambre coincide con el *centroide C de la línea L* que define la forma del alambre (figura 5.4). Las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ del centroide de la línea L se obtienen a partir de las ecuaciones

$$\bar{x}L = \int x\,dL \qquad \bar{y}L = \int y\,dL \tag{5.4}$$

5.4. PRIMEROS MOMENTOS DE ÁREAS Y LÍNEAS

La integral $\int x\,dA$ en las ecuaciones (5.3) de la sección anterior se conoce como el *primer momento del área A con respecto al eje y* y se representa con Q_y. En forma similar, la integral $\int y\,dA$ define el *primer momento de A con respecto al eje x* y se representa con Q_x. Así se escribe

$$Q_y = \int x\,dA \qquad Q_x = \int y\,dA \tag{5.5}$$

Si comparamos las ecuaciones (5.3) con las ecuaciones (5.5), se observa que los primeros momentos del área A pueden ser expresados como los productos del área con las coordenadas de su centroide:

$$Q_y = \bar{x}A \qquad Q_x = \bar{y}A \tag{5.6}$$

A partir de las ecuaciones (5.6) se concluye que las coordenadas del centroide de un área pueden obtenerse al dividir los primeros momentos de dicha área entre el área misma. Los primeros momentos de un área también son útiles en la mecánica de materiales para determinar los esfuerzos de corte en vigas sujetas a cargas transversales. Por último, a partir de las ecuaciones (5.6) se observa que si el centroide de un área está localizado sobre un eje coordenado, entonces el primer momento del área con respecto a ese eje es igual a cero. De manera inversa, si el primer momento de un área con respecto a un eje coordenado es igual a cero, entonces el centroide del área está localizado sobre ese eje.

Se pueden utilizar relaciones similares a partir de las ecuaciones (5.5) y (5.6) para definir los primeros momentos de una línea con respecto a los ejes coordenados y para expresar dichos momentos como los productos de la longitud L de la línea y las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ de su centroide.

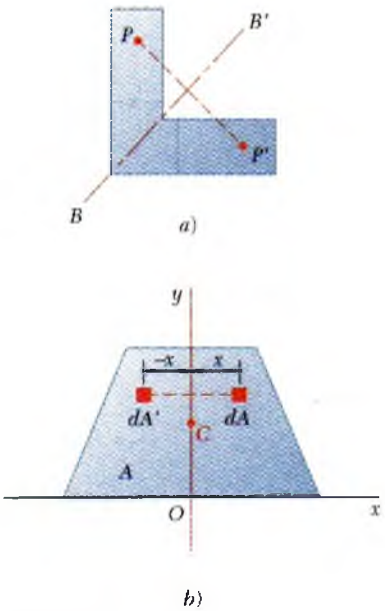


Figura 5.5

Se dice que un área A es *simétrica con respecto a un eje BB'* si para todo punto P del área existe un punto P' de esa misma área tal que la línea PP' sea perpendicular a BB' y dicha línea está dividida en dos partes iguales por el eje en cuestión (figura 5.5*a*). Se dice que una línea L es simétrica con respecto a un eje BB' si satisface condiciones similares. Cuando un área A o una línea L posee un eje de simetría BB', su primer momento con respecto a BB' es igual a cero y su centroide está localizado sobre dicho eje. Por ejemplo, en el caso del área A de la figura 5.5*b*, la cual es simétrica con respecto al eje y, se observa que para cada elemento de área dA de abscisa x existe un elemento de área dA' que tiene la misma superficie y cuya abscisa es $-x$. Se concluye que la integral en la primera de las ecuaciones (5.5) es igual a cero y, por tanto, se tiene que $Q_y = 0$. También se concluye a partir de la primera de las relaciones (5.3) que $\bar{x} = 0$. Por consiguiente, si un área A o una línea L poseen un eje de simetría, su centroide C está localizado sobre dicho eje.

Además, se debe señalar que si un área o una línea posee dos ejes de simetría, su centroide C debe estar localizado en la intersección de esos dos ejes (figura 5.6). Esta propiedad permite determinar de inmediato el centroide de áreas como círculos, elipses, cuadrados, rectángulos, triángulos equiláteros u otras figuras simétricas, así como el centroide de líneas que tienen la forma de la circunferencia de un círculo, el perímetro de un cuadrado, entre otros.

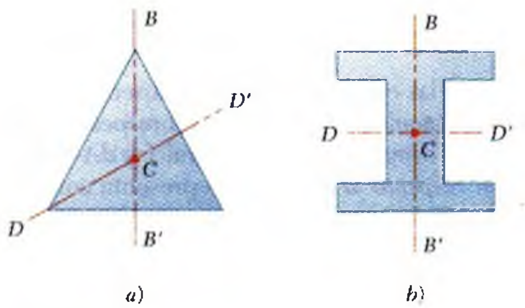


Figura 5.6

Se dice que un área A es *simétrica con respecto a un centro O* si para cada elemento de área dA de coordenadas x y y existe un elemento de área dA' de igual superficie con coordenadas $-x$ y $-y$ (figura 5.7). Entonces, se concluye que ambas integrales en las ecuaciones (5.5) son iguales a cero y que $Q_x = Q_y = 0$. También, a partir de las ecuaciones (5.3), se concluye que $\bar{x} = \bar{y} = 0$, esto es, que el centroide del área coincide con su centro de simetría O. En forma análoga, si una línea posee un centro de simetría O, el centroide de la línea coincidirá con el centro O.

Se debe señalar que una figura con un centro de simetría no necesariamente posee un eje de simetría (figura 5.7) y que una figura con dos ejes de simetría no necesariamente tiene un centro de simetría (figura 5.6*a*). Sin embargo, si una figura posee dos ejes de simetría que son perpendiculares entre sí, el punto de intersección de dichos ejes es un centro de simetría (figura 5.6*b*).

La determinación de los centroides de áreas asimétricas y de líneas y áreas que poseen un solo eje de simetría se estudiará en las secciones 5.6 y 5.7. En las figuras 5.8A y 5.8B se muestran los centroides de formas comunes de áreas y de líneas.

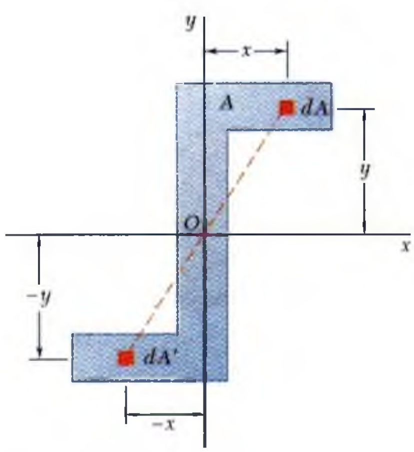


Figura 5.7

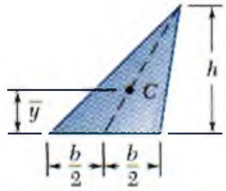
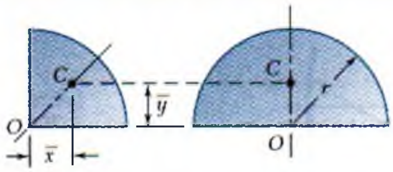
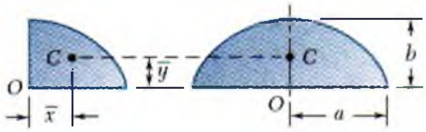
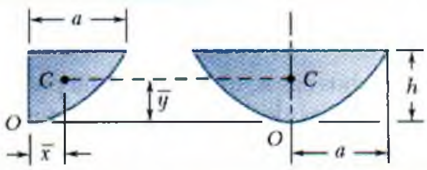
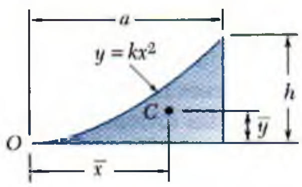
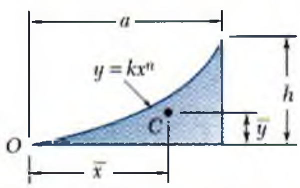
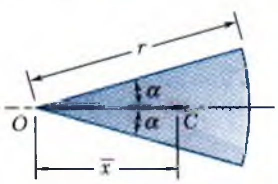
Forma		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Área
Área triangular			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Un cuarto de área circular		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Área semicircular		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Un cuarto de área elíptica		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Área semielíptica		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Área semiparabólica		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Área parabólica		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Enjuta parabólica		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Enjuta general		$\frac{n+1}{n+2}a$	$\frac{n+1}{4n+2}h$	$\frac{ah}{n+1}$
Sector circular		$\frac{2r\operatorname{sen}\alpha}{3\alpha}$	0	αr^2

Figura 5.8A Centroides de áreas comunes.

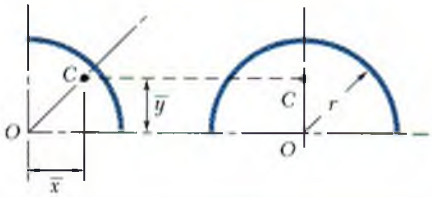
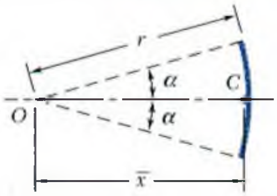
Forma		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Longitud
Un cuarto de arco circular		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Arco semicircular		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Arco de círculo		$\frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

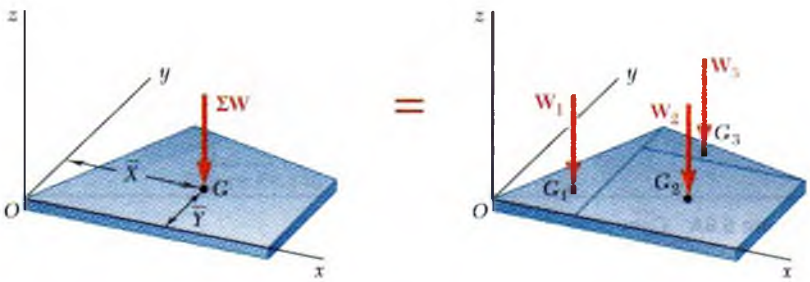
Figura 5.8B Centroides de formas comunes de líneas.

5.5. PLACAS Y ALAMBRES COMPUESTOS

En muchos casos, una placa plana puede dividirse en rectángulos, triángulos u otras de las formas comunes mostradas en la figura 5.8A. La abscisa $\bar{X}$ de su centro de gravedad G puede determinarse a partir de las abscisas $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ de los centros de gravedad de las diferentes partes que constituyen la placa, expresando que el momento del peso de toda la placa con respecto al eje y es igual a la suma de los momentos de los pesos de las diferentes partes con respecto a ese mismo eje (figura 5.9). La ordenada $\bar{Y}$ del centro de gravedad de la placa se encuentra de una forma similar, igualando momentos con respecto al eje x. Así, se escribe

$$\Sigma M_y: \quad \bar{X}(W_1 + W_2 + \cdots + W_n) = \bar{x}_1 W_1 + \bar{x}_2 W_2 + \cdots + \bar{x}_n W_n$$

$$\Sigma M_x: \quad \bar{Y}(W_1 + W_2 + \cdots + W_n) = \bar{y}_1 W_1 + \bar{y}_2 W_2 + \cdots + \bar{y}_n W_n$$



$$\Sigma M_y: \quad \bar{X}\,\Sigma W = \Sigma \bar{x}\, W$$

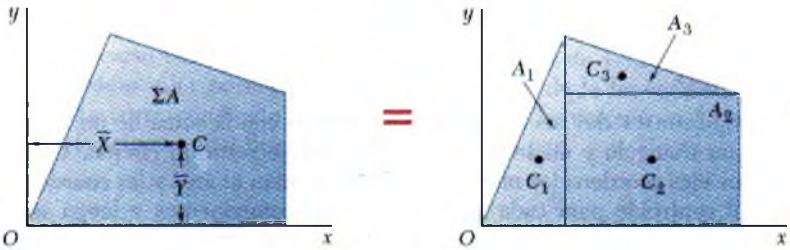
$$\Sigma M_x: \quad \bar{Y}\,\Sigma W = \Sigma \bar{y}\, W$$

Figura 5.9 Centro de gravedad de una placa compuesta.

o en forma condensada,

$$\bar{X}\Sigma W = \Sigma \bar{x} W \qquad \bar{Y}\Sigma W = \Sigma \bar{y} W \tag{5.7}$$

Estas ecuaciones se pueden resolver para las coordenadas $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ del centro de gravedad de la placa.



$$Q_y = \bar{X}\Sigma A = \Sigma \bar{x} A$$
$$Q_x = \bar{Y}\Sigma A = \Sigma \bar{y} A$$

Figura 5.10 Centroide de un área compuesta.

Si la placa es homogénea y de espesor uniforme, el centro de gravedad coincide con el centroide C de su área. La abscisa $\bar{X}$ del centroide del área puede determinarse observando que el primer momento Q_y del área compuesta con respecto al eje y puede expresarse como el producto de $\bar{X}$ con el área total y como la suma de los primeros momentos de las áreas elementales con respecto al eje y (figura 5.10). La ordenada $\bar{Y}$ del centroide se encuentra de forma similar, considerando el primer momento Q_x del área compuesta. Así, se tiene

$$Q_y = \bar{X}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = \bar{x}_1A_1 + \bar{x}_2A_2 + \cdots + \bar{x}_nA_n$$
$$Q_x = \bar{Y}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = \bar{y}_1A_1 + \bar{y}_2A_2 + \cdots + \bar{y}_nA_n$$

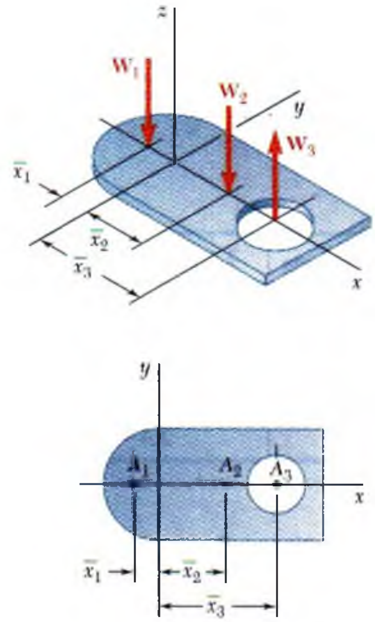
o en forma condensada,

$$Q_y = \bar{X}\Sigma A = \Sigma \bar{x} A \qquad Q_x = \bar{Y}\Sigma A = \Sigma \bar{y} A \tag{5.8}$$

Estas ecuaciones proporcionan los primeros momentos del área compuesta o pueden utilizarse para obtener las coordenadas $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ de su centroide.

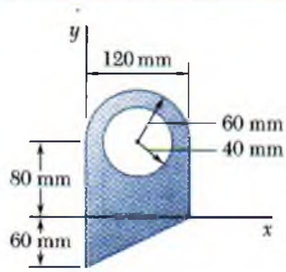
Se debe tener cuidado de asignarle el signo apropiado al momento de cada área. Los primeros momentos de áreas, al igual que los momentos de las fuerzas, pueden ser positivos o negativos. Por ejemplo, un área cuyo centroide está localizado a la izquierda del eje y tendrá un primer momento negativo con respecto a dicho eje. Además al área de un agujero se le debe asignar un signo negativo (figura 5.11).

De manera similar, en muchos casos es posible determinar el centro de gravedad de un alambre compuesto o el centroide de una línea compuesta dividiendo al alambre o a la línea en elementos más simples (véase problema resuelto 5.2).



	$\bar{x}$	A	$\bar{x}A$
A_1 Semicírculo	−	+	−
A_2 Rectángulo completo	+	+	+
A_3 Agujero circular	+	−	−

Figura 5.11

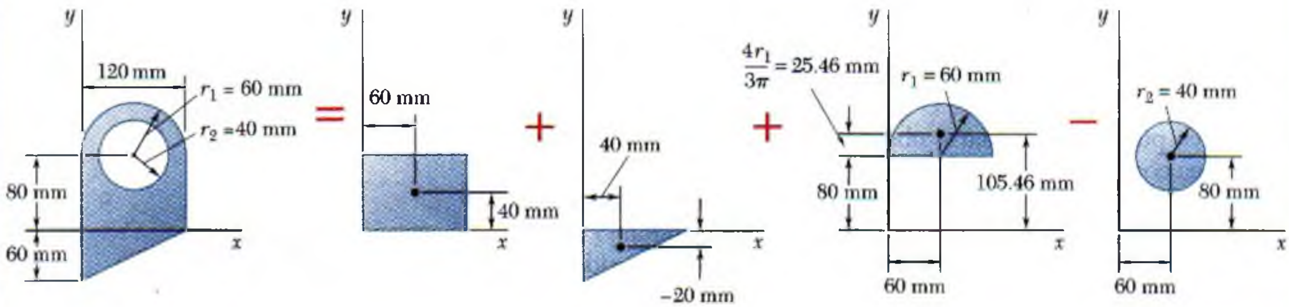


PROBLEMA RESUELTO 5.1

Para el área plana mostrada en la figura, determine: *a*) los primeros momentos con respecto a los ejes x y y, y *b*) la ubicación de su centroide.

SOLUCIÓN

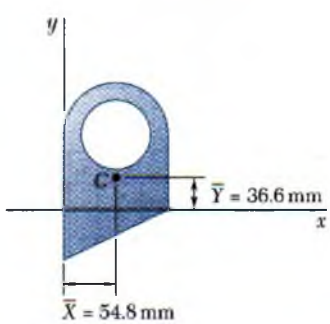
Componentes del área. El área se obtiene con la suma de un rectángulo, un triángulo y un semicírculo y después se resta un círculo. Utilizando los ejes coordenados mostrados, se determinan el área y las coordenadas del centroide para cada una de las áreas componentes y luego se introducen en la tabla que aparece en la parte inferior. El área del círculo se indica como negativa puesto que debe restarse de las demás áreas. Nótese que la coordenada $\bar{y}$ del centroide del triángulo es negativa para los ejes mostrados. Los primeros momentos de las áreas componentes con respecto a los ejes coordenados se calculan y se introducen en la tabla.



Componente	A, mm²	$\bar{x}$, mm	$\bar{y}$, mm	$\bar{x}A$, mm³	$\bar{y}A$, mm³
Rectángulo	$(120)(80) = 9.6 \times 10^3$	60	40	$+576 \times 10^3$	$+384 \times 10^3$
Triángulo	$\frac{1}{2}(120)(60) = 3.6 \times 10^3$	40	−20	$+144 \times 10^3$	-72×10^3
Semicírculo	$\frac{1}{2}\pi(60)^2 = 5.655 \times 10^3$	60	105.46	$+339.3 \times 10^3$	$+596.4 \times 10^3$
Círculo	$-\pi(40)^2 = -5.027 \times 10^3$	60	80	-301.6×10^3	-402.2×10^3
	$\Sigma A = 13.828 \times 10^3$			$\Sigma\bar{x}A = +757.7 \times 10^3$	$\Sigma\bar{y}A = +506.2 \times 10^3$

***a*) Primeros momentos del área.** Con las ecuaciones (5.8), se escribe

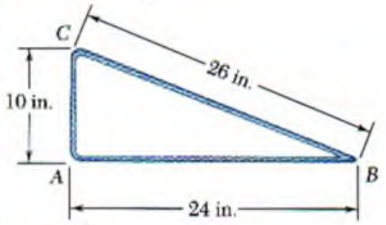
$$Q_x = \Sigma\bar{y}A = 506.2 \times 10^3 \text{ mm}^3 \qquad Q_x = 506 \times 10^3 \text{ mm}^3 \blacktriangleleft$$
$$Q_y = \Sigma\bar{x}A = 757.7 \times 10^3 \text{ mm}^3 \qquad Q_y = 758 \times 10^3 \text{ mm}^3 \blacktriangleleft$$



***b*) Ubicación del centroide.** Si se sustituyen los valores dados en la tabla, dentro de las ecuaciones que definen el centroide de un área compuesta se obtiene

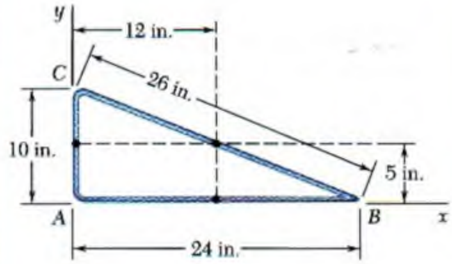
$$\bar{X}\Sigma A = \Sigma\bar{x}A: \qquad \bar{X}(13.828 \times 10^3 \text{ mm}^2) = 757.7 \times 10^3 \text{ mm}^3$$
$$\bar{X} = 54.8 \text{ mm} \blacktriangleleft$$

$$\bar{Y}\Sigma A = \Sigma\bar{y}A: \qquad \bar{Y}(13.828 \times 10^3 \text{ mm}^2) = 506.2 \times 10^3 \text{ mm}^3$$
$$\bar{Y} = 36.6 \text{ mm} \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 5.2

La figura mostrada está hecha a partir de un pedazo de alambre delgado y homogéneo. Determine la ubicación de su centro de gravedad.



SOLUCIÓN

Como la figura está hecha de un alambre homogéneo, su centro de gravedad coincide con el centroide de la línea correspondiente. Por tanto, se determinará dicho centroide. Si se seleccionan los ejes mostrados, con origen en A, se determinan las coordenadas del centroide de cada segmento de línea y se calculan los primeros momentos con respecto a los ejes coordenados.

Segmento	L, in.	$\bar{x}$, in.	$\bar{y}$, in.	$\bar{x}L$, in^2	$\bar{y}L$, in^2
AB	24	12	0	288	0
BC	26	12	5	312	130
CA	10	0	5	0	50
	$\Sigma L = 60$			$\Sigma \bar{x}L = 600$	$\Sigma \bar{y}L = 180$

Con la sustitución de los valores obtenidos en la tabla, en las ecuaciones que definen el centroide de una línea compuesta, se obtiene

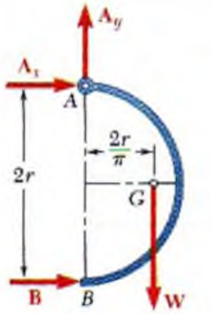
$\bar{X}\Sigma L = \Sigma \bar{x}L$: $\quad \bar{X}(60 \text{ in.}) = 600 \text{ in}^2 \qquad \bar{X} = 10 \text{ in.}$ ◀

$\bar{Y}\Sigma L = \Sigma \bar{y}L$: $\quad \bar{Y}(60 \text{ in.}) = 180 \text{ in}^2 \qquad \bar{Y} = 3 \text{ in.}$ ◀



PROBLEMA RESUELTO 5.3

Una barra semicircular uniforme de peso W y radio r está unida a un perno en A y descansa contra una superficie sin fricción en B. Determine las reacciones en A y B.



SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja un diagrama de cuerpo libre de la barra. Las fuerzas que actúan sobre la barra son su peso $\mathbf{W}$, el cual está aplicado en el centro de gravedad G (cuya posición se obtiene a partir de la figura 5.8B); una reacción en A, representada por sus componentes $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$ y una reacción horizontal en B.

Ecuaciones de equilibrio

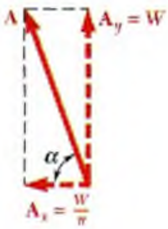
$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \qquad B(2r) - W\left(\frac{2r}{\pi}\right) = 0$$

$$B = +\frac{W}{\pi} \qquad\qquad \mathbf{B} = \frac{W}{\pi} \rightarrow \blacktriangleleft$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \qquad A_x + B = 0$$

$$A_x = -B = -\frac{W}{\pi} \qquad \mathbf{A}_x = \frac{W}{\pi} \leftarrow$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad A_y - W = 0 \qquad\qquad \mathbf{A}_y = W\uparrow$$



Sumando las dos componentes de la reacción en A:

$$A = \left[W^2 + \left(\frac{W}{\pi}\right)^2\right]^{1/2} \qquad\qquad A = W\left(1 + \frac{1}{\pi^2}\right)^{1/2} \blacktriangleleft$$

$$\tan \alpha = \frac{W}{W/\pi} = \pi \qquad\qquad \alpha = \tan^{-1} \pi \blacktriangleleft$$

Las respuestas también pueden expresarse como sigue:

$$\mathbf{A} = 1.049W \measuredangle 72.3° \qquad \mathbf{B} = 0.318W \rightarrow \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se desarrollaron las ecuaciones generales para localizar los centros de gravedad de cuerpos bidimensionales y alambres [ecuaciones (5.2)] y los centroides de áreas planas [ecuaciones (5.3)] y de líneas [ecuaciones (5.4)]. En los problemas que se presentan a continuación, se deberán localizar los centroides de áreas compuestas y líneas o tendrán que determinarse los primeros momentos del área de placas compuestas [ecuaciones (5.8)].

1. *Localización de centroides de áreas compuestas y líneas.* Los problemas resueltos 5.1 y 5.2 ilustran el procedimiento que debe seguirse al resolver problemas de este tipo. Sin embargo, hay ciertos puntos que se deben enfatizar.

a) El primer paso en la solución debe ser decidir cómo construir el área o la línea dada, a partir de las formas comunes de la figura 5.8. Se debe reconocer que, en el caso de áreas planas, una forma en particular se puede construir de varias maneras. Además, mostrar las diferentes componentes (como se hace en el problema resuelto 5.1) ayudará a establecer correctamente sus centroides y sus áreas o longitudes. No debe olvidarse que, para obtener la forma deseada, es posible restar o sumar áreas.

b) Se recomienda que para cada problema se construya una tabla que contenga las áreas o las longitudes y las coordenadas respectivas de sus centroides. Es esencial recordar que las áreas que son "removidas" (por ejemplo los agujeros) se toman como negativas. Además se debe incluir el signo de las coordenadas negativas. Por tanto, siempre debe observarse la ubicación del origen de los ejes coordenados.

c) Cuando sea posible, se deben utilizar consideraciones de simetría [sección 5.4] para determinar con mayor facilidad la ubicación de un centroide.

d) En las fórmulas de la figura 5.8 para el sector circular y para el arco del círculo, el ángulo siempre debe ser expresado en radianes.

2. *Cálculo de los primeros momentos de un área.* Los procedimientos para ubicar el centroide de un área y para determinar los primeros momentos de un área son similares; sin embargo, para calcular estos últimos no es necesario determinar el área total. Además, como se señaló en la sección 5.4, se debe reconocer que el primer momento de un área con respecto a un eje centroidal es igual a cero.

3. *Resolución de problemas que involucran al centro de gravedad.* En los problemas que se presentan a continuación se considera que los cuerpos son homogéneos; por tanto, sus centros de gravedad coinciden con sus centroides. Además, cuando un cuerpo que está suspendido de un solo perno está en equilibrio, el perno y el centro de gravedad del cuerpo deben estar localizados sobre la misma línea vertical.

Pudiera parecer que muchos de los problemas en esta lección tienen poco que ver con el estudio de la mecánica. Sin embargo, ser capaz de localizar el centroide de formas compuestas será esencial en varios tópicos que se estudiarán más adelante.

Problemas

5.1 a 5.8 Localice el centroide del área plana mostrado en cada figura.

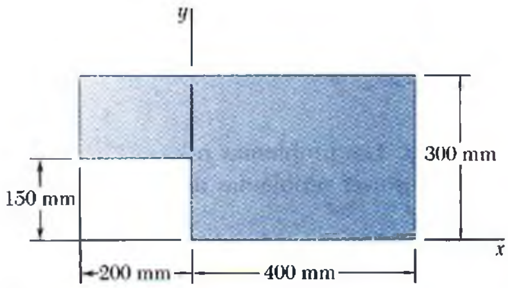


Figura P5.1

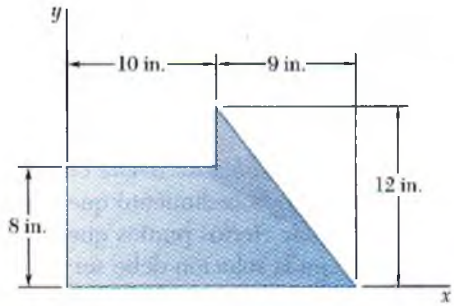


Figura P5.2

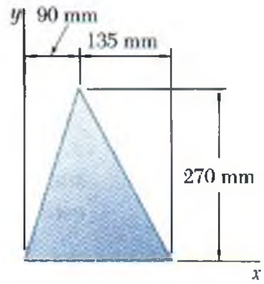


Figura P5.3

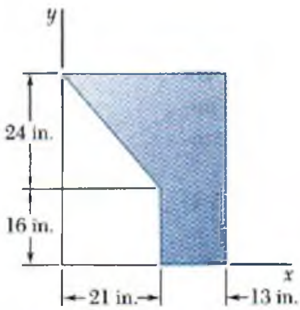


Figura *P5.4*

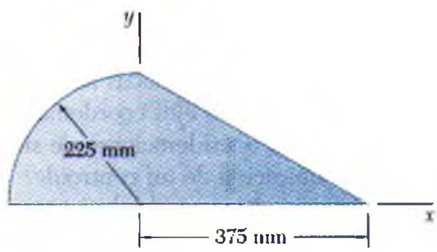


Figura P5.5

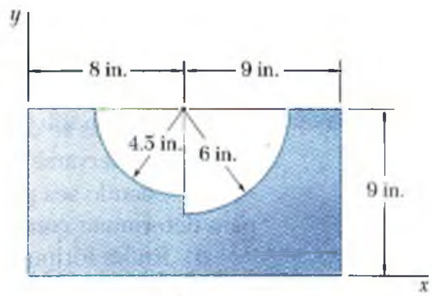


Figura P5.6

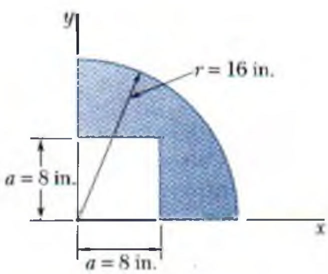


Figura *P5.7*

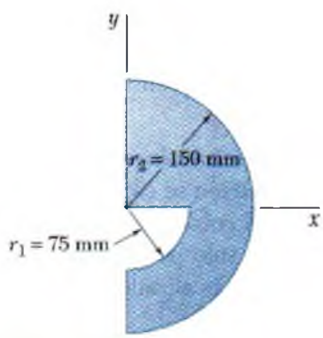


Figura P5.8

5.9 Para el área del problema 5.8, determine la relación r_2/r_1 tal que $\bar{x} = 4r_1/3$.

5.10 Para el área mostrada en la figura, demuestre que si r_1 tiende a r_2, la localización de su centroide tiende a ser igual al centroide de un arco circular con radio $(r_1 + r_2)/2$.

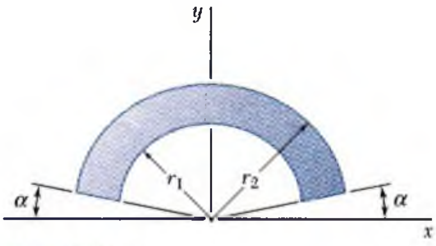


Figura P5.10

5.11 a 5.16 Localice el centroide del área plana mostrada en cada figura.

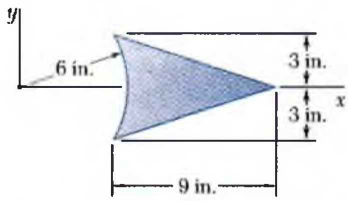


Figura P5.11

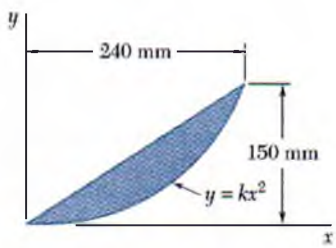


Figura *P5.12*

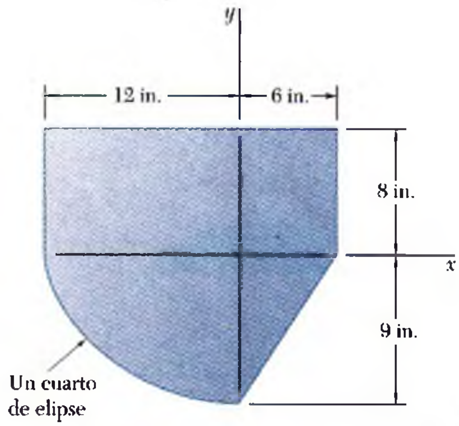


Figura P5.13

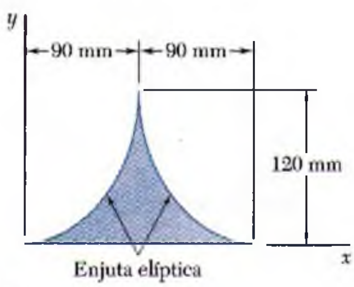


Figura P5.14

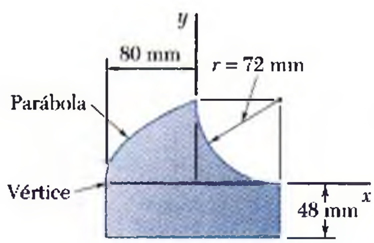


Figura *P5.15*

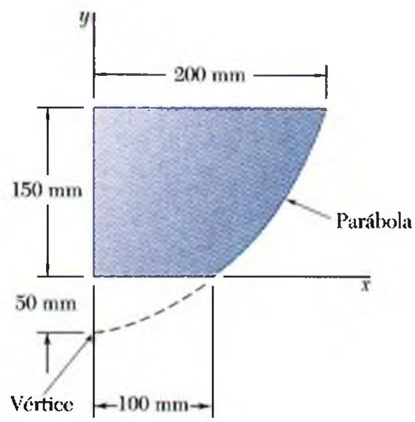


Figura P5.16

5.17 y 5.18 El eje horizontal x se traza a través del centroide C y divide al área mostrada en dos áreas componentes A_1 y A_2. Determine el primer momento de cada área componente respecto al eje x y explique los resultados obtenidos.

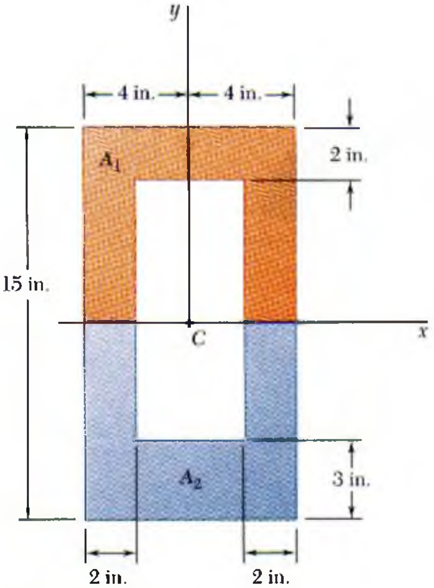


Figura P5.17

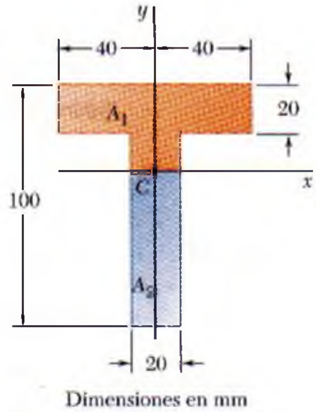


Figura P5.18

5.19 El primer momento respecto al eje x del área sombreada que se muestra en la figura se representa mediante Q_x. *a*) Exprese Q_x en términos de r y θ. *b*) Determine el valor de θ para el cual Q_x es máximo y encuentre dicho valor máximo.

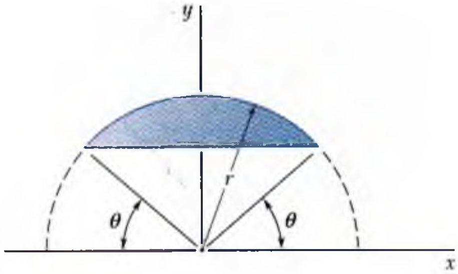


Figura *P5.19*

5.20 Una viga compuesta se construye atornillando cuatro placas a cuatro ángulos de 60 × 60 × 12 mm, como indica la figura. Los tornillos están igualmente espaciados a lo largo de la viga, la cual sostiene una carga vertical. Tal como se demuestra en mecánica de materiales, las fuerzas cortantes ejercidas sobre los tornillos colocados en A y B son proporcionales a los primeros momentos respecto al eje centroidal x de las áreas sombreadas con rojo, respectivamente, en las partes *a* y *b* de la figura. Si la fuerza ejercida en el tornillo A es de 280 N, determine la fuerza ejercida sobre el tornillo B.

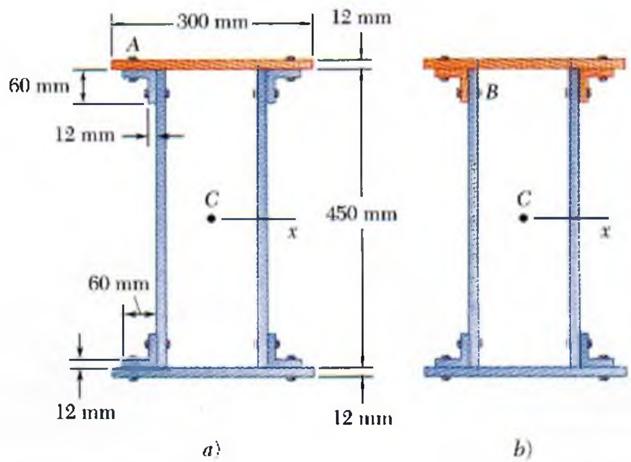


Figura *P5.20*

5.21 a 5.24 Un alambre delgado y homogéneo se dobla para formar el perímetro de la figura que se indica en cada inciso. Localice el centro de gravedad de la figura formada con el alambre.

5.21 Figura P5.1.
5.22 Figura P5.2.
5.23 Figura P5.5.
5.24 Figura P5.8.

5.25 Una barra uniforme de acero pesa 1.75 lb y se dobla para formar un arco de 20 in. de radio como el que muestra la figura. La barra se sostiene mediante un pasador puesto en A y la cuerda BC. Determine *a*) la tensión en la cuerda, *b*) la reacción en A.

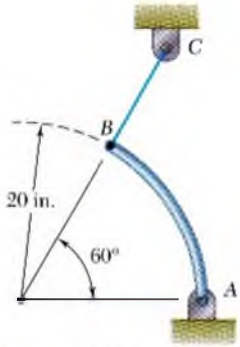


Figura P5.25

5.26 El alambre homogéneo $ABCD$ está doblado como indica la figura y se sostiene mediante un pasador puesto en B. Si $l = 200$ mm, determine el ángulo θ para el que el tramo BC del alambre se mantiene horizontal.

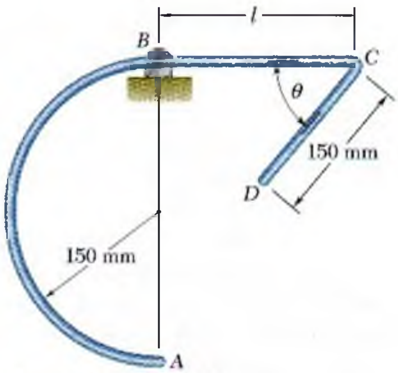


Figura P5.26 y P5.27

5.27 El alambre homogéneo $ABCD$ está doblado como indica la figura y se sostiene mediante un pasador instalado en B. Si $\theta = 30°$, determine la longitud l para la cual el tramo CD del alambre se mantiene horizontal.

5.28 Si la figura que se muestra está formada con un alambre homogéneo delgado, determine la longitud l del tramo CE del alambre para el cual el centro de gravedad de la figura se localiza en el punto C cuando *a*) $\theta = 15°$, *b*) $\theta = 60°$.

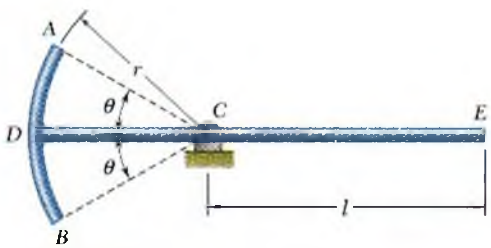


Figura P5.28

5.29 Determine la distancia h tal que el centroide del área sombreada esté tan cerca como sea posible de la línea BB' cuando *a*) $k = 0.2$, *b*) $k = 0.6$.

5.30 Si la distancia h es seleccionada para minimizar la distancia $\bar{y}$ desde la línea BB' hasta el centroide del área sombreada que muestra la figura, demuestre que $\bar{y} = h$.

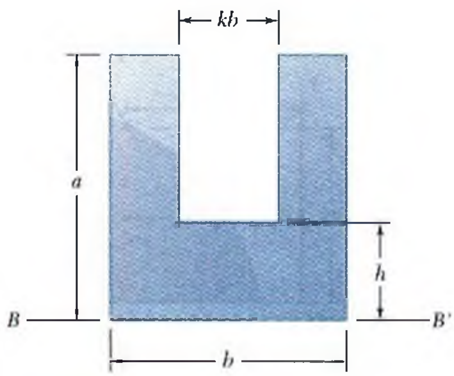


Figura *P5.29* y *P5.30*

5.6. DETERMINACIÓN DE CENTROIDES POR INTEGRACIÓN

El centroide de un área limitada por curvas analíticas (esto es, curvas definidas por ecuaciones algebraicas) por lo general se determina evaluando las integrales que aparecen en las ecuaciones (5.3) de la sección 5.3:

$$\bar{x}A = \int x\,dA \qquad \bar{y}A = \int y\,dA \tag{5.3}$$

Si el elemento de área dA es un pequeño rectángulo de lados dx y dy, la evaluación de cada una de estas integrales requiere una *integración doble* con respecto a x y y. También es necesaria una integración doble si se usan coordenadas polares para las cuales dA es un elemento de lados dr y $r\,d\theta$.

Sin embargo, en la mayoría de los casos es posible determinar las coordenadas del centroide de un área con una sola integración. Esto se logra seleccionando a dA como un rectángulo o tira delgada o como un sector circular delgado (figura 5.12A); el centroide de un rectángulo delgado está localizado en su centro y el centroide de un sector delgado está localizado a una distancia de $\frac{2}{3}r$ a partir de su vértice (como en el caso de un triángulo). Entonces, las coordenadas del centroide del área en consideración se obtienen expresando que el primer momento del área total con respecto a cada uno de los ejes coordenados es igual a la suma (o integral) de los momentos correspondientes de los elementos del área. Representando con $\bar{x}_{el}$ y $\bar{y}_{el}$ las coordenadas del centroide del elemento dA, se escribe

$$\begin{aligned} Q_y &= \bar{x}A = \int \bar{x}_{el}\,dA \\ Q_x &= \bar{y}A = \int \bar{y}_{el}\,dA \end{aligned} \tag{5.9}$$

Si el área A no se conoce aún, ésta también puede calcularse a partir de estos elementos.

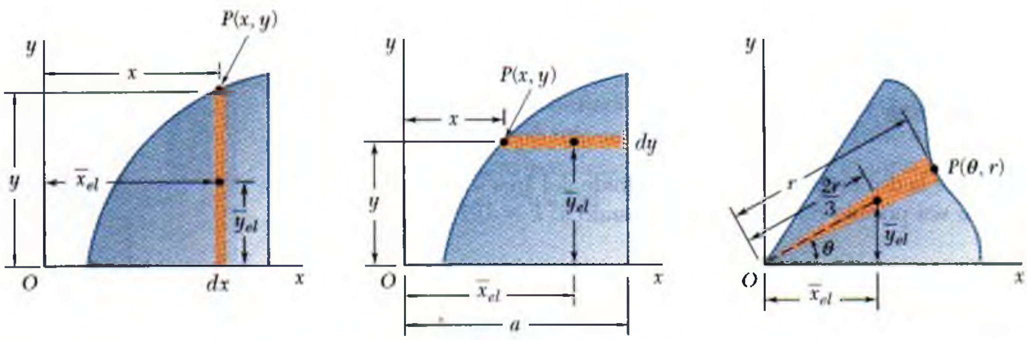


Figura 5.12A Centroides y áreas de elementos diferenciales.

Las coordenadas $\bar{x}_{el}$ y $\bar{y}_{el}$ del centroide del elemento del área dA deben expresarse en términos de las coordenadas de un punto localizado sobre la curva que limita al área en consideración. Además, el área del elemento dA debe expresarse en términos de las coordenadas de dicho punto y de los diferenciales apropiados. Esto se ha hecho en la figura 5.12B para tres tipos comunes de elementos; la porción de círculo de la parte c debe utilizarse cuando la ecuación de la curva que limita al área esté dada en coordenadas polares. Deben sustituirse las expresiones apropiadas en las fórmulas (5.9) y debe utilizarse la ecuación de la curva que limita al área para expresar a una de las coordenadas en términos de la otra. De esta forma, se reduce a una sola integración. Una vez que se ha determinado el área y han sido evaluadas las integrales en las ecuaciones (5.9), estas ecuaciones pueden resolverse para las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ del centroide del área.

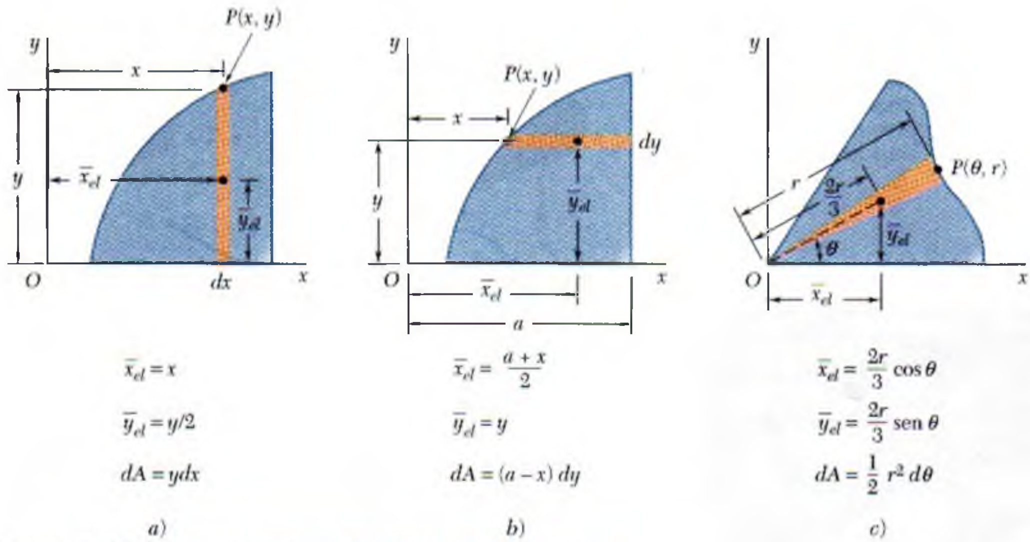


Figura 5.12B Centroides y áreas de elementos diferenciales.

Cuando una línea está definida por una ecuación algebraica, puede determinarse su centroide al evaluar las integrales que aparecen en las ecuaciones (5.4) de la sección 5.3:

$$\bar{x}L = \int x\,dL \qquad \bar{y}L = \int y\,dL \tag{5.4}$$

El diferencial de longitud dL debe reemplazarse por una de las siguientes expresiones, dependiendo de cuál coordenada x, y o θ, se seleccione como la variable independiente en la ecuación utilizada para definir la línea (estas expresiones pueden derivarse con el uso del teorema de Pitágoras):

$$dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dy \qquad dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dy$$

$$dL = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

Después de que se ha utilizado la ecuación de la línea para expresar una de las coordenadas en términos de la otra, se puede llevar a cabo la integración y se pueden resolver las ecuaciones (5.4) para las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ del centroide de la línea.

5.7. TEOREMAS DE PAPPUS-GULDINUS

Estos teoremas fueron formulados primero por el geómetra griego Pappus durante el siglo III después de Cristo y fueron replanteados posteriormente por el matemático suizo Guldinus o Guldin (1577-1643), se refieren a superficies y cuerpos de revolución.

Una *superficie de revolución* se genera mediante la rotación de una curva plana con respecto a un eje fijo. Por ejemplo (figura 5.13), se

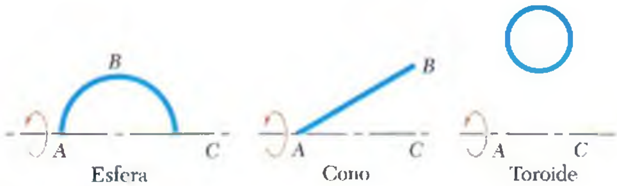


Figura 5.13

puede obtener la superficie de una esfera rotando un arco semicircular ABC con respecto al diámetro AC; se puede producir la superficie de un cono rotando una línea recta AB con respecto a un eje AC y se puede generar la superficie de un toroide o anillo rotando la circunferencia de un círculo con respecto a un eje que no interseca a dicha circunferencia. Un *cuerpo de revolución* se genera mediante la rotación de un área plana alrededor de un eje fijo. Como se muestra en la figura 5.14, se puede generar una esfera, un cono y un toroide rotando la forma apropiada con respecto al eje que se indica.



Fotografía 5.2 Todos los tanques de almacenamiento que se muestran en la fotografía son cuerpos de revolución. Por tanto, las áreas de sus superficies y sus volúmenes pueden determinarse con los teoremas de Pappus-Guldinus.

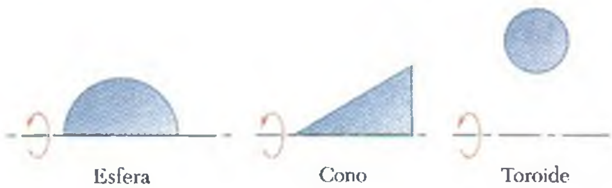


Figura 5.14

TEOREMA I. *El área de una superficie de revolución es igual a la longitud de la curva generatriz multiplicada por la distancia recorrida por el centroide de dicha curva al momento de generar la superficie.*

Demostración. Considérese un elemento dL de la línea L (figura 5.15) que rota alrededor del eje x. El área dA generada por el elemento dL es igual a $2\pi y\ dL$. Por tanto, el área total generada por L es $A = \int 2\pi y\ dL$. En la sección 5.3 se encontró que la integral $\int y\ dL$ es igual

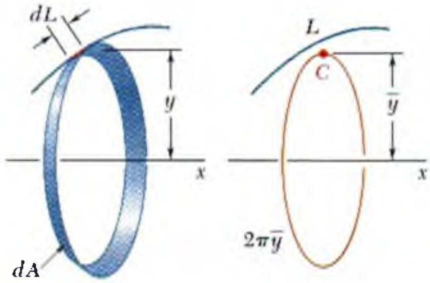


Figura 5.15

a $\bar{y}L$, por tanto, se tiene

$$A = 2\pi\bar{y}L \tag{5.10}$$

donde $2\pi\bar{y}$ es la distancia recorrida por el centroide de L (figura 5.15). Se debe señalar que la curva generatriz no debe cruzar el eje sobre el cual rota; si lo hiciera, las dos secciones, una a cada lado del eje, generarían áreas que tendrían signos opuestos y el teorema no podría aplicarse.

TEOREMA II. *El volumen de un cuerpo de revolución es igual al área generatriz multiplicada por la distancia recorrida por el centroide del área al momento de generar el cuerpo.*

Demostración. Considérese un elemento dA del área A, el cual se rota con respecto al eje x (figura 5.16). El volumen dV generado por

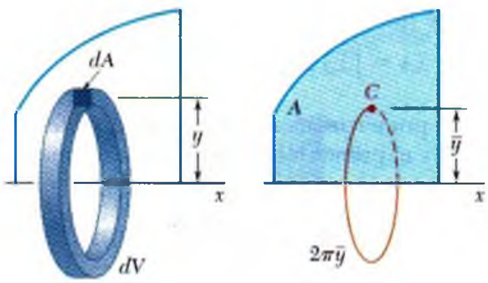


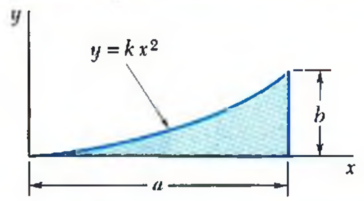
Figura 5.16

el elemento dA es igual a $2\pi y\, dA$. Por tanto, el volumen total generado por A es $V = \int 2\pi y\, dA$ y, puesto que la integral $\int y\, dA$ es igual a $\bar{y}A$ (sección 5.3), se tiene

$$V = 2\pi\bar{y}A \tag{5.11}$$

donde $2\pi\bar{y}$ es la distancia recorrida por el centroide de A. Es importante señalar que el teorema no puede aplicarse si el eje de rotación interseca al área generatriz.

Los teoremas de Pappus-Guldinus proporcionan una forma sencilla de calcular las áreas de superficies de revolución y los volúmenes de cuerpos de revolución. En forma inversa, estos teoremas se emplean para determinar el centroide de una curva plana cuando el área de la superficie generada por la curva es conocida o para determinar el centroide de un área plana cuando el volumen del cuerpo generado por el área es conocido (véase el problema resuelto 5.8).



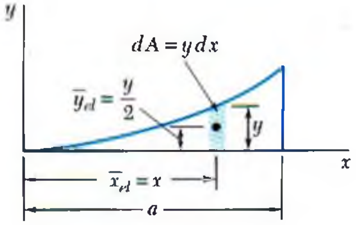
PROBLEMA RESUELTO 5.4

Determine por integración directa la localización del centroide de una enjuta parabólica.

SOLUCIÓN

Determinación de la constante k. El valor de k se determina sustituyendo $x = a$ y $y = b$ en la ecuación dada. Se tiene $b = ka^2$ o $k = b/a^2$. Por tanto, la ecuación de la curva es

$$y = \frac{b}{a^2}x^2 \qquad \text{o} \qquad x = \frac{a}{b^{1/2}}y^{1/2}$$



Elemento diferencial vertical. Se selecciona el elemento diferencial mostrado y se determina el área total de la figura.

$$A = \int dA = \int y\,dx = \int_0^a \frac{b}{a^2}x^2\,dx = \left[\frac{b}{a^2}\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{ab}{3}$$

El primer momento del elemento diferencial con respecto al eje y es $\bar{x}_{el}\,dA$; por tanto, el primer momento de toda el área con respecto a dicho eje es

$$Q_y = \int \bar{x}_{el}\,dA = \int xy\,dx = \int_0^a x\left(\frac{b}{a^2}x^2\right)dx = \left[\frac{b}{a^2}\frac{x^4}{4}\right]_0^a = \frac{a^2b}{4}$$

Como $Q_y = \bar{x}A$, se tiene que

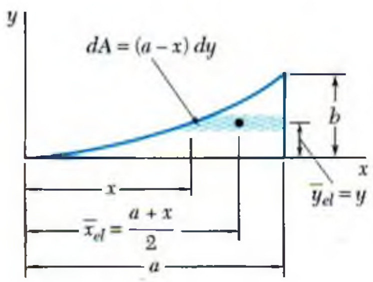
$$\bar{x}A = \int \bar{x}_{el}\,dA \qquad \bar{x}\frac{ab}{3} = \frac{a^2b}{4} \qquad \bar{x} = \tfrac{3}{4}a \quad ◀$$

De la misma forma, el primer momento del elemento diferencial con respecto al eje x es $\bar{y}_{el}\,dA$ y el primer momento de toda el área es

$$Q_x = \int \bar{y}_{el}\,dA = \int \frac{y}{2}y\,dx = \int_0^a \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a^2}x^2\right)^2 dx = \left[\frac{b^2}{2a^4}\frac{x^5}{5}\right]_0^a = \frac{ab^2}{10}$$

Como $Q_x = \bar{y}A$, se tiene que

$$\bar{y}A = \int \bar{y}_{el}\,dA \qquad \bar{y}\frac{ab}{3} = \frac{ab^2}{10} \qquad \bar{y} = \tfrac{3}{10}b \quad ◀$$



Elemento diferencial horizontal. Se pueden obtener los mismos resultados considerando un elemento horizontal. Los primeros momentos del área son

$$Q_y = \int \bar{x}_{el}\,dA = \int \frac{a + x}{2}(a - x)\,dy = \int_0^b \frac{a^2 - x^2}{2}\,dy$$

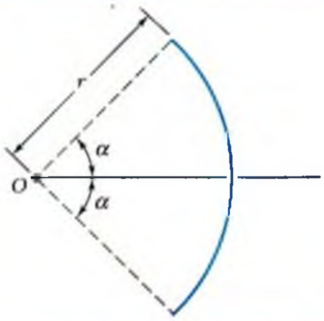
$$= \frac{1}{2}\int_0^b \left(a^2 - \frac{a^2}{b}y\right)dy = \frac{a^2b}{4}$$

$$Q_x = \int \bar{y}_{el}\,dA = \int y(a - x)\,dy = \int y\left(a - \frac{a}{b^{1/2}}y^{1/2}\right)dy$$

$$= \int_0^b \left(ay - \frac{a}{b^{1/2}}y^{3/2}\right)dy = \frac{ab^2}{10}$$

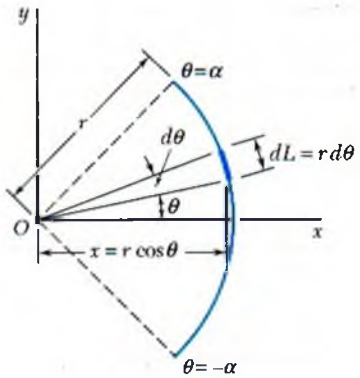
Para determinar $\bar{x}$ y $\bar{y}$, las expresiones obtenidas se sustituyen nuevamente en las ecuaciones que definen el centroide del área.

PROBLEMA RESUELTO 5.5



Determine la ubicación del centroide del arco mostrado.

SOLUCIÓN



Como el arco es simétrico con respecto al eje x, $\bar{y} = 0$. Se selecciona un elemento diferencial, como se muestra en la figura, y se determina la longitud del arco por integración.

$$L = \int dL = \int_{-\alpha}^{\alpha} r\,d\theta = r\int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta = 2r\alpha$$

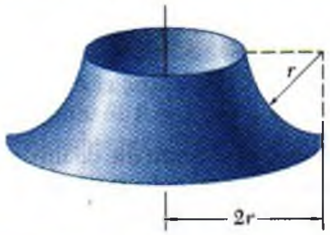
El primer momento del arco con respecto al eje y es

$$Q_y = \int x\,dL = \int_{-\alpha}^{\alpha} (r\cos\theta)(r\,d\theta) = r^2\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta\,d\theta$$
$$= r^2[\text{sen}\,\theta]_{-\alpha}^{\alpha} = 2r^2\,\text{sen}\,\alpha$$

Como $Q_y = \bar{x}L$, se escribe

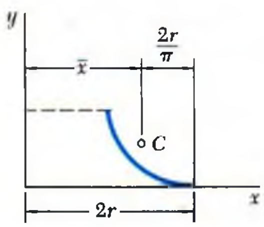
$$\bar{x}(2r\alpha) = 2r^2\,\text{sen}\,\alpha \qquad \bar{x} = \frac{r\,\text{sen}\,\alpha}{\alpha} \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESUELTO 5.6



Determine el área de la superficie de revolución mostrada en la figura, la cual se obtiene rotando un cuarto de arco circular con respecto a un eje vertical.

SOLUCIÓN

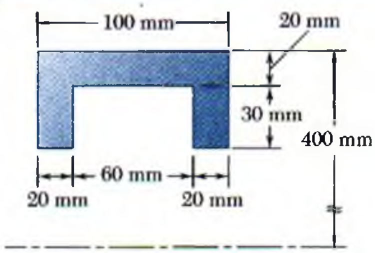


De acuerdo con el teorema I de Pappus-Guldinus, el área generada es igual al producto de la longitud del arco y la distancia recorrida por su centroide. Refiriéndose a la figura 5.8B, se tiene que

$$\bar{x} = 2r - \frac{2r}{\pi} = 2r\left(1 - \frac{1}{\pi}\right)$$

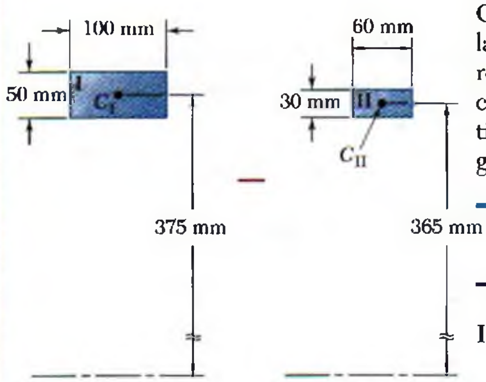
$$A = 2\pi\bar{x}L = 2\pi\left[2r\left(1 - \frac{1}{\pi}\right)\right]\left(\frac{\pi r}{2}\right)$$

$$A = 2\pi r^2(\pi - 1) \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 5.7

El diámetro exterior de una polea es 0.8 m y la sección transversal de su corona es como se muestra en la figura. Se sabe que la polea está hecha de acero y que la densidad de dicho material es $\rho = 7.85 \times 10^3$ kg/m^3, determine la masa y el peso de la corona.



SOLUCIÓN

El volumen de la corona se puede encontrar con el teorema II de Pappus-Guldinus, el cual establece que el volumen es igual al producto del área de la sección transversal dada por la distancia recorrida por su centroide en una revolución completa. Sin embargo, el volumen se puede determinar más fácilmente si se observa que la sección transversal se puede transformar a partir del rectángulo I, cuya área es positiva y del rectángulo II, cuya área es negativa.

	Área, mm^2	$\bar{y}$, mm	Distancia viajada por C, mm	Volumen, mm^3
I	+5 000	375	$2\pi(375) = 2\,356$	$(5\,000)(2\,356) = 11.78 \times 10^6$
II	−1 800	365	$2\pi(365) = 2\,293$	$(-1\,800)(2\,293) = -4.13 \times 10^6$
				Volumen de la corona $= 7.65 \times 10^6$

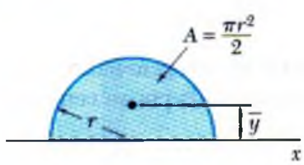
Como 1 mm $= 10^{-3}$ m, se tiene que 1 mm$^3 = (10^{-3}\text{ m})^3 = 10^{-9}$ m^3, y se obtiene $V = 7.65 \times 10^6$ mm$^3 = (7.65 \times 10^6)(10^{-9}\text{ m}^3) = 7.65 \times 10^{-3}$ m^3.

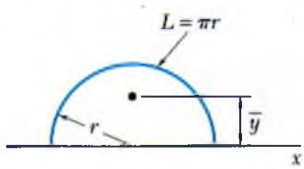
$$m = \rho V = (7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(7.65 \times 10^{-3} \text{ m}^3) \qquad m = 60.0 \text{ kg} \blacktriangleleft$$

$$W = mg = (60.0 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 589 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 \qquad W = 589 \text{ N} \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESUELTO 5.8

Con los teoremas de Pappus-Guldinus, determine: *a*) el centroide de un área semicircular y *b*) el centroide de un arco semicircular. Se debe recordar que el volumen y el área superficial de una esfera son, respectivamente, $\frac{4}{3}\pi r^3$ y $4\pi r^2$.





SOLUCIÓN

El volumen de una esfera es igual al producto del área de un semicírculo y la distancia recorrida por el centroide del semicírculo en una revolución alrededor del eje x.

$$V = 2\pi\bar{y}A \qquad \tfrac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi\bar{y}(\tfrac{1}{2}\pi r^2) \qquad \bar{y} = \frac{4r}{3\pi} \blacktriangleleft$$

De la misma forma, el área superficial de una esfera es igual al producto de la longitud del semicírculo generatriz por la distancia recorrida por su centroide en una revolución.

$$A = 2\pi\bar{y}L \qquad 4\pi r^2 = 2\pi\bar{y}(\pi r) \qquad \bar{y} = \frac{2r}{\pi} \blacktriangleleft$$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los problemas propuestos correspondientes a esta lección se usarán las ecuaciones

$$\bar{x}A = \int x\, dA \qquad \bar{y}A = \int y\, dA \tag{5.3}$$

$$\bar{x}L = \int x\, dL \qquad \bar{y}L = \int y\, dL \tag{5.4}$$

para localizar, respectivamente, los centroides de áreas y líneas planas. Además, se aplicarán los teoremas de Pappus-Guldinus (sección 5.7) para determinar las áreas de superficie de revolución y los volúmenes de cuerpos de revolución.

1. ***Determinación de los centroides de áreas y líneas por integración directa.*** Cuando se resuelven problemas de este tipo, se debe seguir el método de solución mostrado en los problemas resueltos 5.4 y 5.5: calcular A o L, determinar los primeros momentos del área o de la línea y resolver las ecuaciones (5.3) o (5.4) para las coordenadas del centroide. Además, se debe poner atención especial en los siguientes puntos.

a) La solución se inicia con la definición o determinación cuidadosa de cada término en las integrales de las fórmulas aplicables. Es bastante recomendable mostrar en el esquema del área o de la línea dada la elección que se ha hecho para dA o para dL y las distancias a su centroide.

b) Como se explicó en la sección 5.6, la x y la y en las ecuaciones anteriores representan las *coordenadas del centroide* de los elementos diferenciales dA y dL. Es importante reconocer que las coordenadas del centroide de dA no son iguales a las coordenadas de un punto localizado sobre la curva que limita al área en consideración. Se debe estudiar con detalle la figura 5.12 hasta que se comprenda en forma cabal este punto que es tan importante.

c) Para tratar de simplificar o minimizar los cálculos, siempre se debe examinar la forma del área o de la línea dada antes de definir el elemento diferencial que se utilizará. Por ejemplo, algunas veces es preferible utilizar elementos rectangulares que sean horizontales en lugar de verticales. Por lo general es mejor emplear coordenadas polares cuando una línea o un área tienen simetría circular.

d) A pesar de que la mayoría de las integraciones en esta lección son sencillas, en algunas ocasiones es posible que se tengan que utilizar técnicas más avanzadas como la sustitución trigonométrica o la integración por partes. Por supuesto, emplear una tabla de integrales es el método más rápido para evaluar integrales difíciles.

2. ***Aplicación de los teoremas de Pappus-Guldinus.*** Como se mostró en los problemas resueltos 5.6 al 5.8, estos teoremas, que son simples pero muy útiles, permiten aplicar el conocimiento sobre centroides para el cálculo de áreas y volúmenes. A pesar de que los teoremas hacen referencia a la distancia recorrida por el centroide y a la longitud de la curva generatriz o del área generatriz, las ecuaciones resultantes [ecuaciones (5.10) y (5.11)] contienen los productos de estas cantidades, los cuales son simplemente los primeros momentos de una línea ($\bar{y}L$) y de un área ($\bar{y}A$), respectivamente. Por tanto, para aquellos problemas en los cuales la línea o el área generatriz consista de más de una forma común, sólo se necesita determinar $\bar{y}L$ o $\bar{y}A$; de esta manera, no se tiene que calcular la longitud de la curva generatriz o el área generatriz.

Problemas

5.31 a *5.33* Determine por integración directa el centroide del área mostrada en cada figura. Exprese la respuesta en términos de a y h.

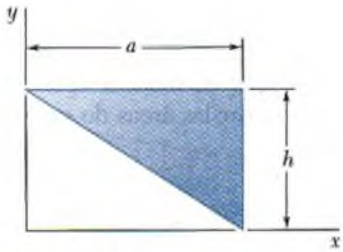


Figura P5.31

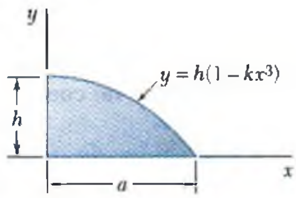


Figura P5.32

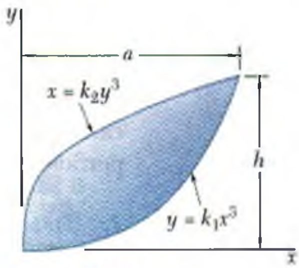


Figura *P5.33*

5.34 a 5.36 Determine por integración directa el centroide del área mostrada en cada figura.

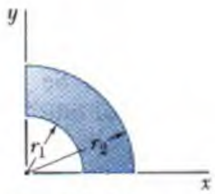


Figura *P5.34*

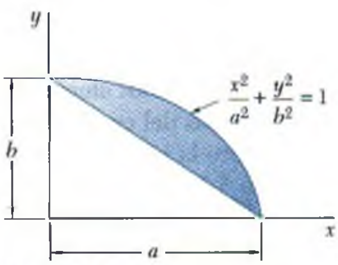


Figura P5.35

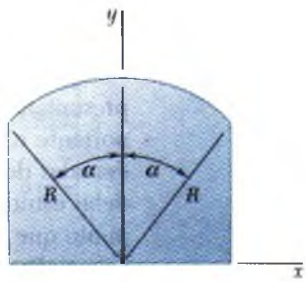


Figura P5.36

5.37 y 5.38 Determine por integración directa el centroide del área mostrada en cada figura. Exprese la respuesta en términos de a y b.

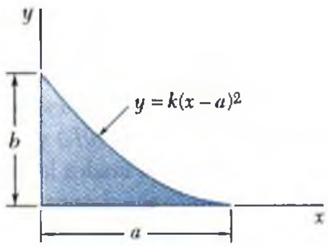


Figura P5.37

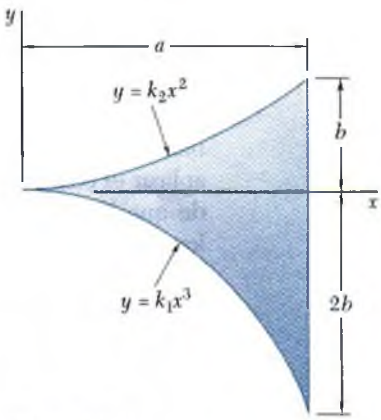


Figura P5.38

5.39 Determine por integración directa el centroide del área mostrada en la figura.

5.40 y *5.41* Determine por integración directa el centroide del área mostrada en cada figura. Exprese la respuesta en términos de a y b.

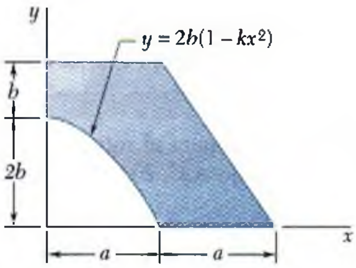


Figura P5.40

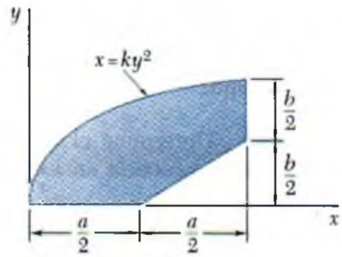


Figura *P5.41*

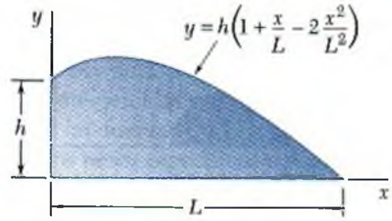


Figura P5.39

5.42 y 5.43 Un alambre homogéneo se dobla en la forma indicada por la figura. Determine por integración directa la coordenada x de su centroide.

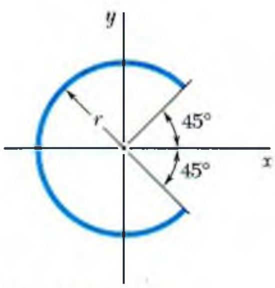


Figura P5.42

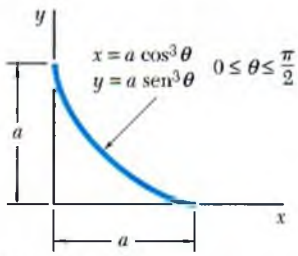


Figura P5.43

******5.44*** Un alambre homogéneo se dobla en la forma indicada por la figura. Determine por integración directa la coordenada x de su centroide. Exprese la respuesta en términos de a.

***5.45 y *5.46** Determine por integración directa el centroide del área mostrada en la figura.

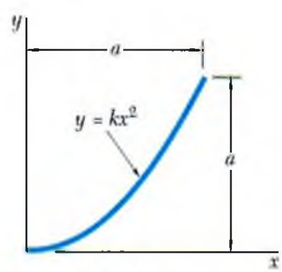


Figura *P5.44*

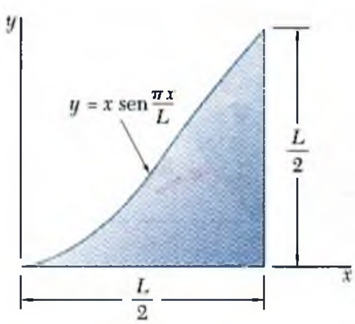


Figura P5.45

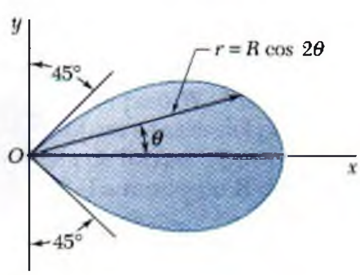


Figura P5.46

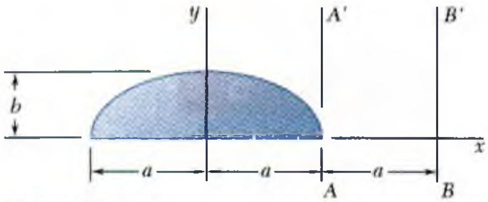


Figura P5.50

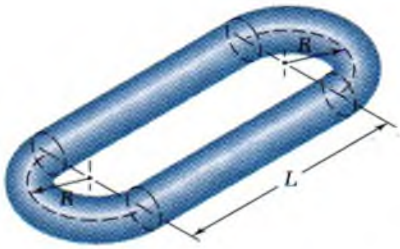


Figura P5.51

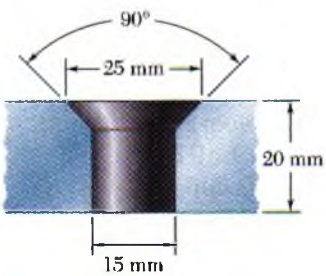


Figura P5.53

5.47 Determine el volumen y el área de la superficie del sólido que se obtiene al rotar el área del problema 5.2 respecto a *a*) el eje x, *b*) la línea $x = 19$ in.

5.48 Determine el volumen y el área de la superficie del sólido que se obtiene al rotar el área del problema 5.4 respecto a *a*) el eje y, *b*) la línea $y = 40$ in.

5.49 Determine el volumen y el área de la superficie del sólido que se obtiene al rotar el área del problema 5.1 respecto a *a*) el eje x, *b*) la línea $x = 400$ mm.

5.50 Determine el volumen del sólido que se genera al rotar el área semielíptica mostrada en la figura respecto a *a*) el eje AA', *b*) el eje BB', *c*) el eje y.

5.51 Si $R = 0.75$ in., y $L = 3$ in, determine el volumen y el área de la superficie del eslabón de cadena mostrado en la figura, el cual fue hecho a partir de una barra de 0.5 in. de diámetro.

5.52 Verifique si las expresiones para los volúmenes de las primeras cuatro formas dadas en la figura 5.21 de la página 261 son correctas.

5.53 Se taladra un agujero de 15 mm de diámetro en una pieza de acero de 20 mm de espesor, y después se avellana como indica la figura. Determine el volumen de acero removido durante el proceso de avellanado.

5.54 Tres perfiles diferentes de bandas motrices se someten a un estudio. Si, en todo momento, las bandas hacen contacto con la mitad de la circunferencia de su polea, determine el *área de contacto* que hay entre la banda y la polea en cada diseño.

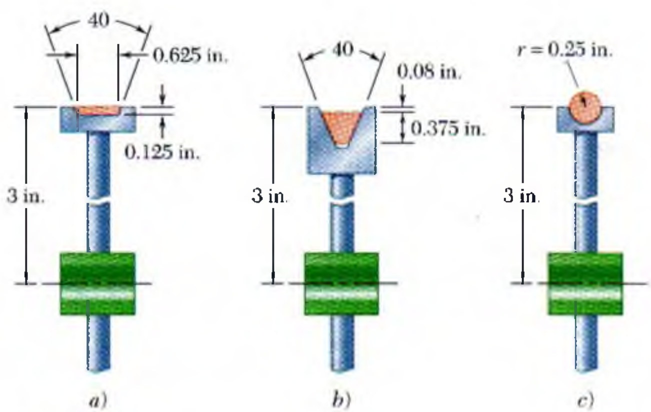


Figura *P5.54*

5.55 Determine el volumen y el área de la superficie del cuerpo que se muestra en la figura.

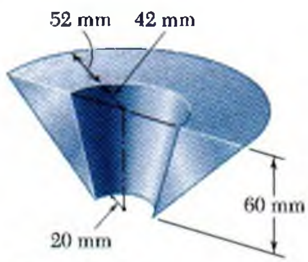


Figura P5.55

5.56 El escudete (una placa decorativa colocada sobre la parte de tubería que sale de una pared) fue moldeado en latón como indica la figura. Si la densidad del latón es de 8 470 kg/m^3, determine la masa del escudete.

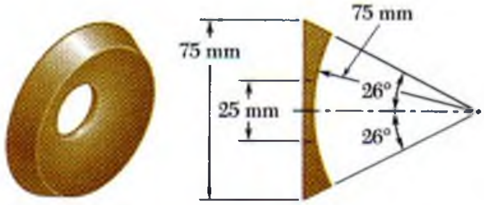


Figura P5.56

5.57 La cubierta redondeada de una mesa de madera tiene el perfil que muestra la figura. Si el diámetro de la cubierta es de 44 in. antes de darle forma, y el peso específico de la madera es de 0.025 lb/in^3, determine el peso del desperdicio que resulta de la producción de 5 000 cubiertas.

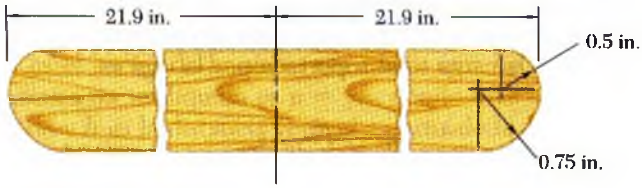


Figura P5.57 y P5.58

5.58 La cubierta redondeada de una mesa de madera tiene la forma que muestra la figura. Si a cada cubierta se le aplican tres capas de laca y cada litro de laca cubre 500 ft^2 de material, determine la cantidad de galones de laca requeridos para darle este acabado a 5 000 cubiertas.

5.59 El reflector de aluminio de una pequeña lámpara de alta intensidad tiene espesor uniforme de 1 mm. Si la densidad del aluminio es de 2 800 kg/m^3, determine la masa del reflector.

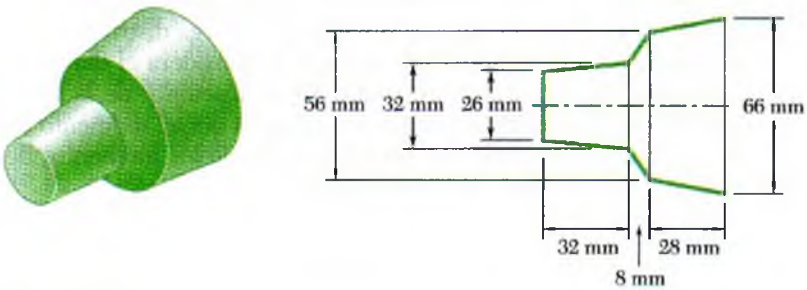


Figura P5.59

***5.60** El reflector de una pequeña linterna eléctrica tiene la forma parabólica que muestra la figura. Determine el área de la superficie interior del reflector.

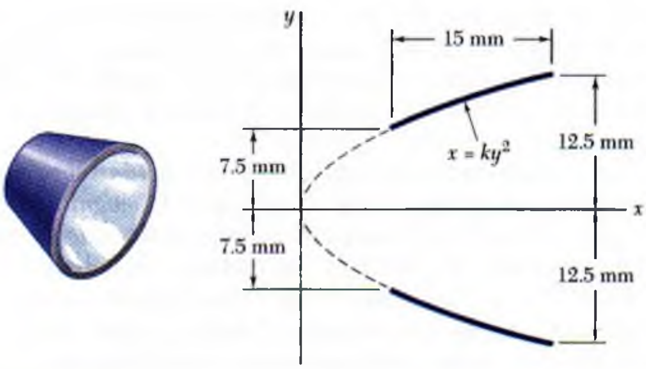


Figura *P5.60*

*5.8. CARGAS DISTRIBUIDAS EN VIGAS

El concepto del centroide de un área puede utilizarse para resolver otros problemas distintos a los relacionados con los pesos de placas planas. Por ejemplo, considérese una viga que soporta una *carga distribuida*; esta carga puede estar constituida por el peso de los materiales soportados directa o indirectamente por la viga o puede ser ocasionada por el viento o por una presión hidrostática. La carga distribuida puede representarse al graficar la carga w soportada por unidad de longitud (figura 5.17); esta carga está expresada en N/m o en lb/ft. La magnitud de la fuerza ejercida sobre un elemento de viga de longitud dx es $dW = w\,dx$, y la carga total soportada por la viga es

$$W = \int_0^L w\,dx$$

Se observa que el producto $w\,dx$ es igual en magnitud al elemento de área dA mostrado en la figura 5.17*a*. Por tanto, la carga W es igual en magnitud al área total A bajo la curva de carga:

$$W = \int dA = A$$

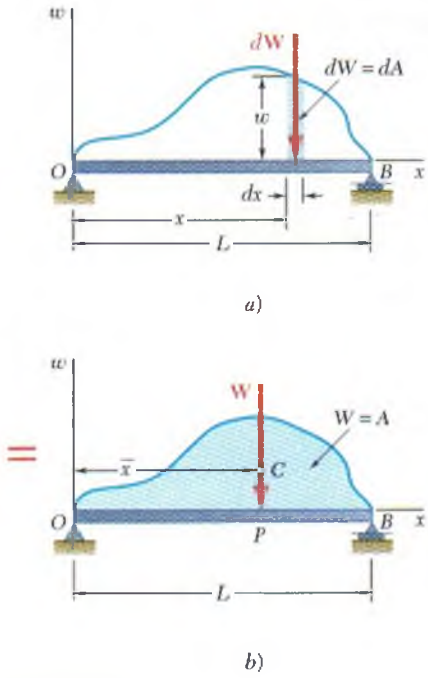


Figura 5.17

Ahora se procede a determinar dónde debe aplicarse, sobre la viga, *una sola carga concentrada* **W**, de la misma magnitud W que la carga distribuida total, si se deben producir las mismas reacciones en los apoyos (figura 5.17*b*). Sin embargo, debe aclararse que esta carga concentrada **W**, la cual representa la resultante de la carga distribuida dada, es equivalente a esta última sólo cuando se considera el diagrama de cuerpo libre de toda la viga. El punto de aplicación P de la carga concentrada equivalente **W** se obtiene expresando que el momento de **W** con respecto a un punto O es igual a la suma de los momentos de las cargas elementales d**W** con respecto a O:

$$(OP)W = \int x\,dW$$

o, como $dW = w\,dx = dA$ y $W = A$,

$$(OP)A = \int_0^L x\,dA \qquad (5.12)$$

Puesto que la integral representa el primer momento con respecto al eje w del área bajo la curva de carga, ésta puede ser reemplazada por el producto $\bar{x}A$. Por tanto, se tiene que $OP = \bar{x}$, donde $\bar{x}$ es la distancia desde el eje w hasta el centroide C del área A (nótese que dicho centroide *no* es el centroide de la viga).

En este sentido, una carga distribuida que actúa sobre una viga puede reemplazarse por una carga concentrada, la magnitud de dicha carga es igual al área bajo la curva de carga y su línea de acción pasa a través del centroide de dicha área. Sin embargo, se debe señalar que la carga concentrada es equivalente a la carga distribuida dada sólo en lo que respecta a las fuerzas externas. Esta carga concentrada puede utilizarse para determinar reacciones pero no debe ser empleada para calcular fuerzas internas y deflexiones.



Fotografía 5.3 Los techos de las construcciones que se muestran en la fotografía pueden ser capaces de soportar no sólo el peso de la nieve, sino también las cargas distribuidas no simétricas causadas por el amontonamiento de la nieve.

*5.9. FUERZAS SOBRE SUPERFICIES SUMERGIDAS

El procediamiento usado en la sección anterior puede emplearse para determinar la resultante de las fuerzas de presión hidrostática ejercidas sobre una *superficie rectangular* sumergida en un líquido. Considérese la placa rectangular mostrada en la figura 5.18, la cual tiene una longitud L y un ancho b, donde b se mide perpendicular al plano de la figura. Como se señaló en la sección 5.8, la carga ejercida sobre un elemento de la placa de longitud dx es $w\,dx$, donde w es la carga por unidad de longitud. Sin embargo, esta carga también puede expresarse como $p\,dA = pb\,dx$, donde p es la presión manométrica en el líquido[†] y b es el ancho de la placa; por tanto, $w = bp$. Como la presión manométrica en un líquido es $p = \gamma h$, donde γ es el peso específico del líquido y h es la distancia vertical a partir de la superficie libre, se concluye que

$$w = bp = b\gamma h \qquad (5.13)$$

lo cual demuestra que la carga por unidad de longitud w es proporcional a h y, por tanto, varía linealmente con x.

De acuerdo con los resultados de la sección 5.8, se observa que la resultante **R** de las fuerzas hidrostáticas ejercidas sobre un lado de la placa es igual en magnitud al área trapezoidal bajo la curva de carga y su línea de acción pasa a través del centroide C de dicha área. El punto P de la placa donde se aplica **R** se conoce como el *centro de presión*.[1]

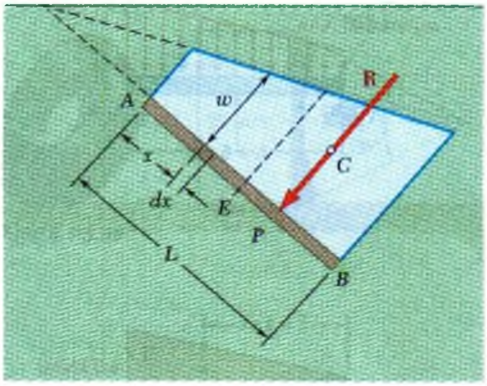


Figura 5.18

A continuación se consideran las fuerzas ejercidas por un líquido sobre una superficie curva de ancho constante (figura 5.19*a*). Como la determinación por integración directa de la resultante **R** de dichas fuerzas podría no ser fácil, se considera el cuerpo libre obtenido por la separación del volumen de líquido ABD el cual está limitado por la superficie curva AB y por las dos superficies planas AD y DB como se muestra en la figura 5.19*b*. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre ABD son el peso **W** del volumen de líquido separado, la resultante $\mathbf{R}_1$ de las fuerzas ejercidas sobre AD, la resultante $\mathbf{R}_2$ de las fuerzas ejercidas sobre BD y la resultante $-\mathbf{R}$ de las fuerzas ejercidas *por la superficie curva sobre el líquido*. La resultante $-\mathbf{R}$ es igual y opuesta y tiene la misma línea de acción que la resultante **R** de las fuerzas ejercidas *por el líquido sobre la superficie curva*. Las fuerzas **W**, $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$ se pueden determinar mediante los métodos convencionales; una vez que se han encontrado estos valores, la fuerza $-\mathbf{R}$ se obtiene al resolver las ecuaciones de equilibrio para el cuerpo libre de la figura 5.19*b*. Entonces la resultante **R** de las fuerzas hidrostáticas ejercidas sobre la superficie curva se obtienen invirtiendo el sentido de $-\mathbf{R}$.

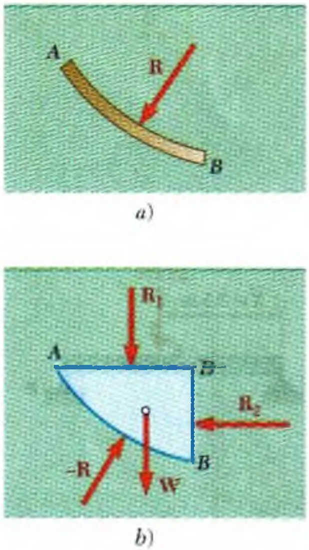


Figura 5.19

Los métodos presentados en esta sección pueden emplearse para determinar la resultante de las fuerzas hidrostáticas ejercidas sobre las superficies de presas y de compuertas rectangulares y álabes. Las resultantes de las fuerzas que actúan sobre superficies sumergidas de ancho variable se determinarán en el capítulo 9.



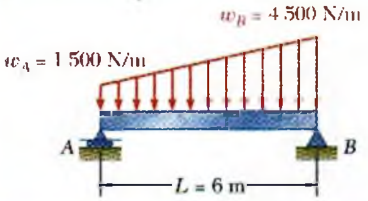
Fotografía 5.4 Como se expuso en esta sección, la presa Grand Coulee soporta tres diferentes tipos de cargas distribuidas: los pesos de los elementos que la constituyen, las fuerzas de presión ejercidas por el agua sobre su cara sumergida y las fuerzas de presión ejercidas por el suelo sobre su base.

[†]La presión p, la cual representa una carga por unidad de área, se expresa en N/m² o en lb/ft². La unidad derivada del SI N/m² recibe el nombre de *pascal* (Pa).

[1]Observe que el área bajo la curva de carga es igual a $w_E L$, donde w_E es la carga por unidad de longitud en el centro E de la placa y de acuerdo con la ecuación (5.13), se puede escribir

$$R = w_E L = (bp_E)L = p_E(bL) = p_E A$$

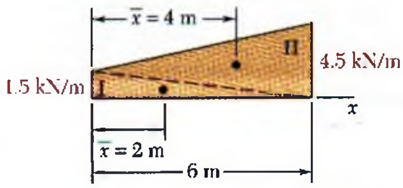
donde A representa el área de la *placa*. Por tanto, se puede obtener la magnitud de **R** si se multiplica el área de la placa por la presión en su centro E. Sin embargo, la resultante **R** *debe ser aplicada en P, no en E.*



PROBLEMA RESUELTO 5.9

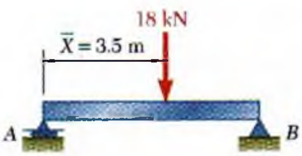
Una viga soporta una carga distribuida como lo muestra la figura; *a*) determine la carga concentrada equivalente y *b*) determine las reacciones en los apoyos.

SOLUCIÓN



***a*) Carga concentrada equivalente.** La magnitud de la resultante de la carga es igual al área bajo la curva de carga y la línea de acción de la resultante pasa a través del centroide de dicha área. Se divide el área bajo la curva de carga en dos triángulos y se construye la tabla que se presenta a continuación. Para simplificar los cálculos y la tabulación, las cargas por unidad de longitud dadas se han convertido a kN/m.

Componente	A, kN	$\bar{x}$, m	$\bar{x}A$, kN · m
Triángulo I	4.5	2	9
Triángulo II	13.5	4	54
	$\Sigma A = 18.0$		$\Sigma \bar{x}A = 63$



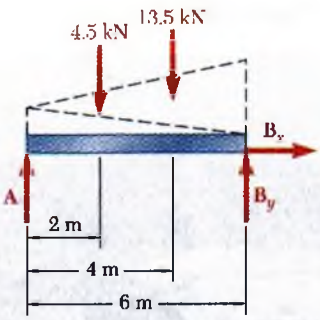
Por tanto, $\bar{X}\Sigma A = \Sigma \bar{x}A$: $\quad \bar{X}(18\text{ kN}) = 63\text{ kN}\cdot\text{m} \quad \bar{X} = 3.5\text{ m}$

La carga concentrada equivalente es

$$\mathbf{W} = 18\text{ kN}\downarrow \quad ◀$$

y su línea de acción está localizada a una distancia

$$\bar{X} = 3.5\text{ m a la derecha de } A \quad ◀$$



***b*) Reacciones.** La reacción en A es vertical y se representa con **A**; la reacción en B está representada por sus componentes $\mathbf{B}_x$ y $\mathbf{B}_y$. Como se muestra en la figura, la carga dada se puede considerar como la suma de dos cargas triangulares. La resultante de cada carga triangular es igual al área del triángulo y actúa en su centroide. Se escriben las siguientes ecuaciones de equilibrio para el cuerpo libre mostrado:

$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0$: $\qquad \mathbf{B}_x = 0 \quad ◀$

$+\circlearrowleft\Sigma M_A = 0$: $\qquad -(4.5\text{ kN})(2\text{ m}) - (13.5\text{ kN})(4\text{ m}) + B_y(6\text{ m}) = 0$

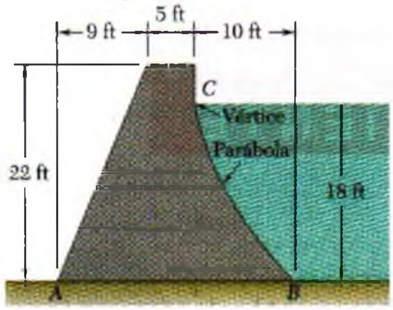
$$\mathbf{B}_y = 10.5\text{ kN}\uparrow \quad ◀$$

$+\circlearrowleft\Sigma M_B = 0$: $\qquad +(4.5\text{ kN})(4\text{ m}) + (13.5\text{ kN})(2\text{ m}) - A(6\text{ m}) = 0$

$$\mathbf{A} = 7.5\text{ kN}\uparrow \quad ◀$$

Solución alternativa. La carga distribuida dada se puede reemplazar por su resultante, la cual se determinó en la parte *a*. Las reacciones pueden determinarse con las ecuaciones de equilibrio $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma M_A = 0$ y $\Sigma M_B = 0$. De nuevo se obtiene

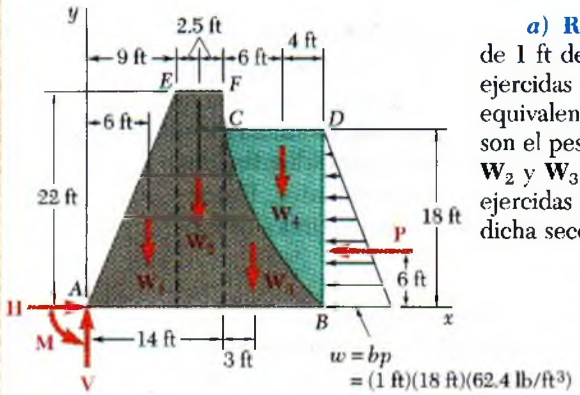
$$\mathbf{B}_x = 0 \qquad \mathbf{B}_y = 10.5\text{ kN}\uparrow \qquad \mathbf{A} = 7.5\text{ kN}\uparrow \quad ◀$$



PROBLEMA RESUELTO 5.10

La sección transversal de una presa de concreto es como se muestra en la figura. Considere una sección de la presa de 1 ft de espesor y determine: *a*) la resultante de las fuerzas de reacción ejercidas por el suelo sobre la base *AB* de la presa y *b*) la resultante de las fuerzas de presión ejercidas por el agua sobre la cara *BC* de la presa. Los pesos específicos del concreto y del agua son, respectivamente, 150 lb/ft^3 y 62.4 lb/ft^3.

SOLUCIÓN



***a*) Reacción del suelo.** Se selecciona como cuerpo libre la sección de 1 ft de espesor *AEFCDB* de la presa y el agua. Las fuerzas de reacción ejercidas por el suelo sobre la base *AB* están representadas por un sistema equivalente fuerza-par en *A*. Otras fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son el peso de la presa, representado con los pesos de sus componentes $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$ y $\mathbf{W}_3$; el peso del agua $\mathbf{W}_4$ y la resultante **P** de las fuerzas de presión ejercidas sobre la sección *BD* por el agua que se encuentra a la derecha de dicha sección. Así se tiene

$$W_1 = \tfrac{1}{2}(9\text{ ft})(22\text{ ft})(1\text{ ft})(150\text{ lb/ft}^3) = 14\,850\text{ lb}$$
$$W_2 = (5\text{ ft})(22\text{ ft})(1\text{ ft})(150\text{ lb/ft}^3) = 16\,500\text{ lb}$$
$$W_3 = \tfrac{1}{3}(10\text{ ft})(18\text{ ft})(1\text{ ft})(150\text{ lb/ft}^3) = 9\,000\text{ lb}$$
$$W_4 = \tfrac{2}{3}(10\text{ ft})(18\text{ ft})(1\text{ ft})(62.4\text{ lb/ft}^3) = 7\,488\text{ lb}$$
$$P = \tfrac{1}{2}(18\text{ ft})(1\text{ ft})(18\text{ ft})(62.4\text{ lb/ft}^3) = 10\,109\text{ lb}$$

Ecuaciones de equilibrio

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0$: $\quad H - 10\,109\text{ lb} = 0$ $\qquad \mathbf{H} = 10\,110\text{ lb} \rightarrow$ ◀

$+\uparrow\Sigma F_y = 0$: $\quad V - 14\,850\text{ lb} - 16\,500\text{ lb} - 9\,000\text{ lb} - 7\,488\text{ lb} = 0$

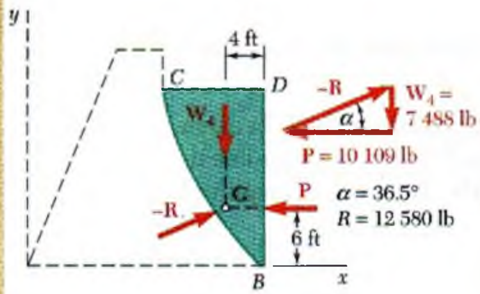
$\mathbf{V} = 47\,840\text{ lb}\uparrow$ ◀

$+\circlearrowleft\Sigma M_A = 0$: $\quad -(14\,850\text{ lb})(6\text{ ft}) - (16\,500\text{ lb})(11.5\text{ ft}) - (9\,000\text{ lb})(17\text{ ft})$
$- (7\,488\text{ lb})(20\text{ ft}) + (10\,109\text{ lb})(6\text{ ft}) + M = 0$

$\mathbf{M} = 520\,960\text{ lb}\cdot\text{ft}\circlearrowleft$ ◀

Se puede reemplazar el sistema fuerza-par obtenido por una fuerza que actúa a una distancia *d* a la derecha de *A*, donde

$$d = \frac{520\,960\text{ lb}\cdot\text{ft}}{47\,840\text{ lb}} = 10.89\text{ ft}$$



***b*) Resultante R de las fuerzas ejercidas por el agua.** Se elige como cuerpo libre la sección parabólica de agua *BCD*. Las fuerzas involucradas son la resultante $-\mathbf{R}$ de las fuerzas ejercidas por la presa sobre el agua, el peso $\mathbf{W}_4$ y la fuerza **P**. Como estas fuerzas deben ser concurrentes, $-\mathbf{R}$ pasa a través del punto de intersección *G* de $\mathbf{W}_4$ y **P**. Se dibuja un triángulo de fuerzas a partir del cual se determinan la magnitud y la dirección de $-\mathbf{R}$. La resultante **R** de las fuerzas ejercidas por el agua sobre la cara *BC* es igual y opuesta:

$\mathbf{R} = 12\,580\text{ lb} \measuredangle 36.5°$ ◀

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Los problemas en esta lección involucran dos tipos de cargas comunes muy importantes: cargas distribuidas sobre vigas y fuerzas sobre superficies sumergidas de ancho constante. Como se estudió en las secciones 5.8 y 5.9 y se ilustró en los problemas resueltos 5.9 y 5.10, la determinación de la fuerza equivalente única para cada una de estas cargas requiere conocimiento sobre centroides.

1. Análisis de vigas sujetas a cargas distribuidas. En la sección 5.8 se demostró que una carga distribuida que actúa sobre una viga puede reemplazarse por una fuerza equivalente. La magnitud de dicha fuerza es igual al área bajo la curva de la carga distribuida y su línea de acción pasa a través del centroide de dicha área. Por tanto, la solución debe comenzar reemplazando las diversas cargas distribuidas que actúan sobre una viga dada, por sus respectivas fuerzas equivalentes. Entonces, las reacciones en los apoyos de la viga pueden determinarse empleando los métodos del capítulo 4.

Cuando sea posible, las cargas distribuidas complejas deben dividirse en áreas que correspondan a las formas comunes mostradas en la figura 5.8A [problema resuelto 5.9]. Entonces, cada una de estas áreas se puede reemplazar por una sola fuerza equivalente. Si así se requiere, el sistema de fuerzas equivalentes puede reducirse aún más a una sola fuerza equivalente. A medida que se estudie el problema resuelto 5.9, observe cómo se ha utilizado la analogía entre fuerza y área y las técnicas para localizar el centroide de áreas compuestas para analizar una viga sujeta a una carga distribuida.

2. Resolución de problemas que involucran fuerzas que actúan sobre cuerpos sumergidos. Se deben recordar los siguientes puntos y las siguientes técnicas al momento de resolver problemas de este tipo.

a) La presión p a una profundidad h por debajo de la superficie libre de un líquido es igual a γh o $\rho g h$, donde γ y ρ son, respectivamente, el peso específico y la densidad del líquido. Por tanto, la carga por unidad de longitud w que actúa sobre una superficie sumergida de ancho constante b está dada por

$$w = bp = b\gamma h = b\rho g h$$

b) La línea de acción de la fuerza resultante **R** que actúa sobre una superficie plana sumergida es perpendicular a dicha superficie.

c) Para una superficie rectangular plana vertical o inclinada de ancho b, la carga que actúa sobre la superficie puede representarse por medio de una carga linealmente distribuida que tiene forma trapezoidal (figura 5.18). Además, la magnitud de **R** está dada por

$$R = \gamma h_E A$$

donde h_E es la distancia vertical al centro de la superficie y A es el área de la superficie.

d) En virtud de que la presión del líquido en la superficie libre del mismo es igua a cero, la curva de carga será triangular (en lugar de trapezoidal) cuando el borde superior de una superficie rectangular plana coincida con la superficie libre del líquido. Para este caso, la línea de acción de **R** puede determinarse fácilmente debido a que pasa a través del centroide de una carga distribuida *triangular*.

e) Para el caso general, en lugar de analizar un trapezoide, se sugiere que se use el método señalado en la parte *b* del problema resuelto 5.9. Primero se divide a la carga distribuida trapezoidal en dos triángulos y, entonces, se calcula la magnitud de la resultante de cada carga triangular. (La magnitud es igual al producto del área del triángulo por el ancho de la placa.) Observe que la línea de acción de cada fuerza resultante pasa a través del centroide del triángulo correspondiente y que la suma de dichas fuerzas es equivalente a **R**. Por tanto, en lugar de utilizar **R**, se pueden usar las dos fuerzas resultantes equivalentes cuyos puntos de aplicación pueden determinarse fácilmente. Por supuesto, la ecuación dada para *R* en el párrafo *c* se debe utilizar cuando sólo se necesite conocer la magnitud de **R**.

f) Cuando la superficie sumergida de ancho constante es curva, la fuerza resultante que actúa sobre la superficie se obtiene al considerar el equilibrio del volumen del líquido, limitado por la superficie curva y por planos horizontales y verticales (figura 5.19). Obsérvese que la fuerza $\mathbf{R}_1$ de la figura 5.19 es igual al peso del líquido que se encuentra por encima del plano *AD*. El método de solución para problemas que involucran superficies curvas se muestra en la parte *b* del problema resuelto 5.10.

En los cursos subsecuentes de mecánica (en particular el curso de mecánica de materiales y el curso de mecánica de fluidos) se tendrá una oportunidad amplia de utilizar las ideas presentadas en esta lección.

Problemas

5.61 y 5.62 Para la viga y las cargas mostradas en cada figura, determine *a*) magnitud y localización de la resultante de la carga distribuida, *b*) las reacciones en los apoyos de la viga.

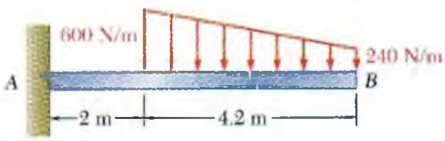


Figura P5.61

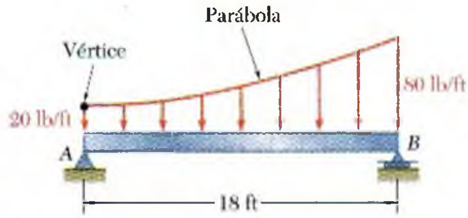


Figura P5.62

5.63 a 5.68 Para las cargas dadas, determine las reacciones en los apoyos de cada viga.

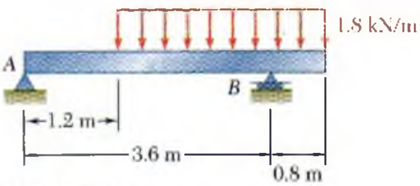


Figura P5.63

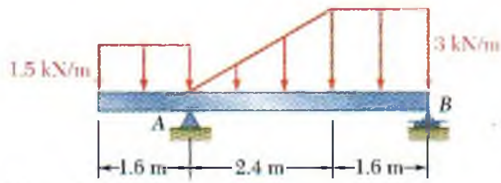


Figura P5.64

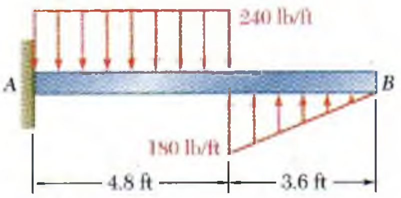


Figura *P5.65*

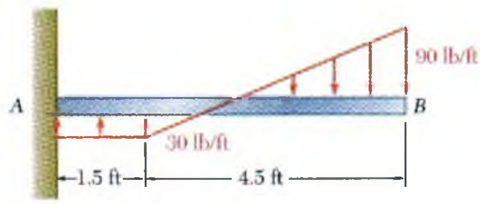


Figura P5.66

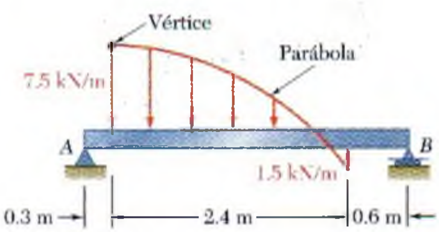


Figura P5.67

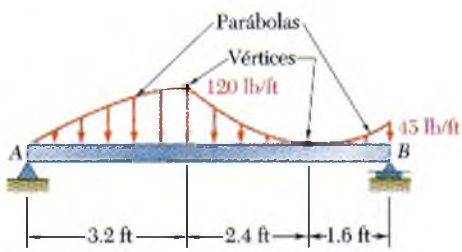


Figura *P5.68*

5.69 Para la carga aplicada en la viga que se muestra en la figura, determine las reacciones en los apoyos, cuando $w_0 = 1.5$ kN/m.

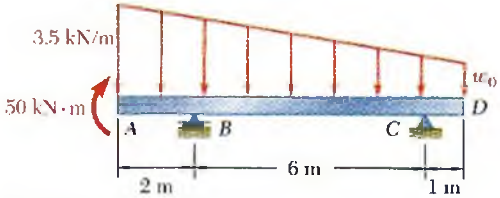


Figura P5.69 y *P5.70*

5.70 Determine *a*) la carga distribuida w_0 en el extremo D de la viga $ABCD$ para la cual la reacción en B es cero, *b*) la reacción correspondiente en C.

5.71 Si $w = 300$ N/m, determine *a*) la distancia mínima a para la cual la reacción vertical en el apoyo B es igual a A, *b*) las reacciones correspondientes en los apoyos.

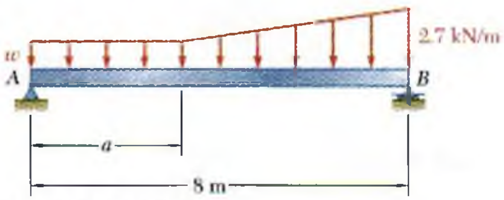


Figura P5.71 y *P5.72*

5.72 Si $w = 300$ N/m, determine *a*) la distancia a para la cual la razón de la reacción vertical en el apoyo B respecto a la reacción vertical en el soporte A es máxima, *b*) las reacciones correspondientes en los apoyos.

5.73 Una viga de nivel AB soporta tres cargas concentradas y descansa sobre el suelo encima de una roca grande. El suelo ejerce una carga distribuida hacia arriba, y la roca ejerce una carga concentrada $\mathbf{R}_R$ como indica la figura. Si $P = 1$ kip y $w_B = \frac{1}{2}w_A$, determine los valores de w_A y R_R correspondientes al estado de equilibrio.

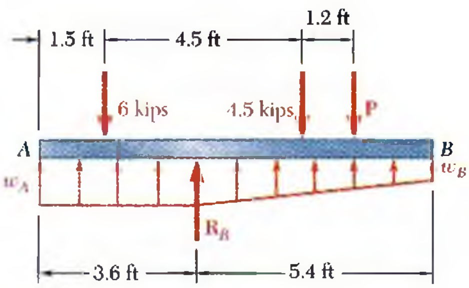


Figura P5.73 y P5.74

5.74 Una viga de nivel AB soporta tres cargas concentradas y descansa sobre el suelo encima de una roca grande. El suelo ejerce una carga distribuida hacia arriba, y la roca ejerce una carga concentrada $\mathbf{R}_R$ como indica la figura. Si $w_B = 0.4w_A$, determine *a*) el valor máximo de $\mathbf{P}$ en el cual la viga está equilibrada, *b*) el valor correspondiente de w_A.

En los problemas siguientes, debe usarse $\gamma = 62.4$ lb/ft^3 para el peso específico del agua dulce y $\gamma_c = 150$ lb/ft^3 para el peso específico del concreto cuando se utilicen las unidades del sistema inglés. Al emplear unidades SI, se debe utilizar $\rho = 10^3$ kg/m^3 para la densidad del agua dulce y $\rho_c = 2.40 \times 10^3$ kg/m^3 para la densidad del concreto. (Vea la nota al pie de la página 222 para saber cómo se determina el peso específico de un material a partir de su densidad.)

5.75 y 5.76 La sección transversal de un dique de concreto tiene la forma que se muestra en la figura. Para una sección del dique de una unidad de ancho, determine *a*) las fuerzas de reacción ejercidas por el suelo sobre la base *AB* del dique, *b*) el punto de aplicación de la resultante de las fuerzas de reacción encontradas en el inciso *a*), *c*) la resultante de las fuerzas de presión ejercidas por el agua sobre la cara *BD* del dique.

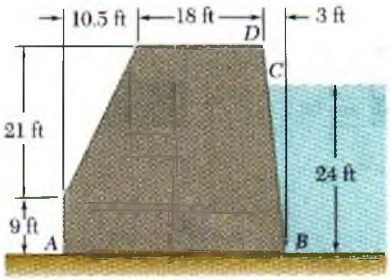


Figura P5.75

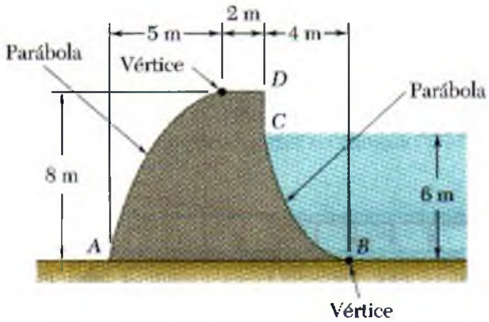


Figura P5.76

5.77 Una válvula automática consiste en una placa cuadrada de 225 × 225 mm pivoteada respecto a un eje horizontal a través de *A*, localizado a una distancia $h = 90$ mm por encima del borde inferior. Determine la profundidad *d* del agua para la cual la válvula se abrirá.

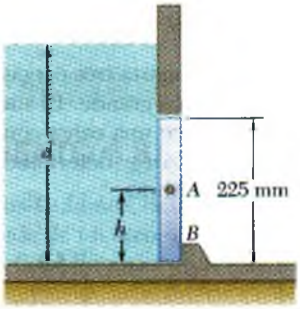


Figura *P5.77* y P5.78

5.78 Una válvula automática consiste en una placa cuadrada de 225 × 225 mm pivoteada respecto a un eje horizontal a través de *A*. Si la válvula se abre cuando la profundidad del agua es $d = 450$ mm, determine la distancia *h* desde la parte baja de la válvula hasta el pivote *A*.

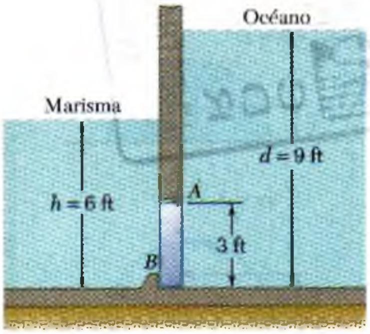


Figura P5.79

5.79 Una marisma de agua dulce drena hacia el océano a través de una compuerta de marea automática que tiene 4 ft de ancho y 3 ft de alto. La compuerta se sostiene mediante bisagras ubicadas a lo largo de su borde superior en *A* y se apoya sobre un tope en *B*. En un momento determinado, los niveles de agua en la marisma y el océano son $h = 6$ ft y $d = 9$ ft, respectivamente. Determine la fuerza ejercida por el tope sobre la compuerta en *B* y la reacción de las bisagras en *A*. (El peso específico del agua salada es de 64 lb/ft^3.)

5.80 El dique de un lago se diseña para soportar la fuerza adicional producida por el sedimento acumulado en el fondo del lago. Si la densidad del sedimento es equivalente a la de un líquido con densidad $\rho_s = 1.76 \times 10^3$ kg/m^3 y considerando que el ancho del dique es de 1 m, determine el porcentaje de incremento en la fuerza que actúa sobre la cara del dique cuando se tiene una acumulación de sedimento de 1.5 m de profundidad.

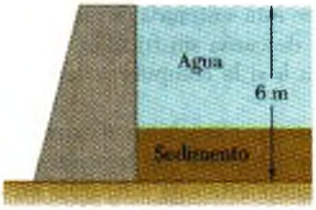


Figura P5.80 y *P5.81*

5.81 La base del dique de un lago se diseña para soportar hasta el 150 por ciento de la fuerza horizontal ejercida por el agua. Después de su construcción, se descubrió que se está acumulando sedimento (el cual es equivalente a un líquido de densidad $\rho_s = 1.76 \times 10^3$ kg/m^3) en el fondo del lago a razón de 20 mm/año. Si el ancho del dique mide 1 m, determine el número de años que deben transcurrir para que el dique se vuelva inseguro.

5.82 En un canal de agua dulce, de 1.5 m de ancho, se construye un dique temporal clavando dos tablas a los pilotes ubicados a los lados del canal y apuntalando una tercera tabla AB contra los pilotes y el piso del canal. Sin tomar en cuenta la fricción BC, determine *a*) la fuerza horizontal ejercida sobre la tabla AB por cada uno de los pilotes, *b*) la fuerza vertical que se ejerce sobre la superficie de la tabla AB, *c*) la reacción en B.

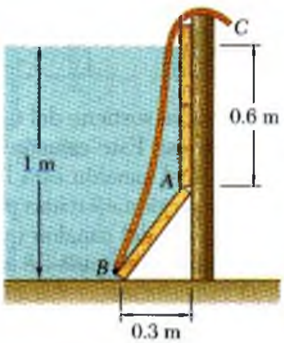


Figura P5.82 y P5.83

5.83 En un canal de agua dulce, de 1.5 m de ancho, se construye un dique temporal clavando dos tablas a los pilotes ubicados a los lados del canal y apuntalando una tercera tabla AB contra los pilotes y el piso del canal. Sin tomar en cuenta la fricción, determine la magnitud y la dirección de la tensión mínima requerida en la cuerda BC para mover la tabla AB.

5.84 La compuerta AB está situada al final del canal de agua de 6 ft de ancho y se mantiene en la posición mostrada en la figura mediante bisagras instaladas a lo largo de su extremo superior A. Si el piso del canal no tiene fricción, determine las reacciones en A y B.

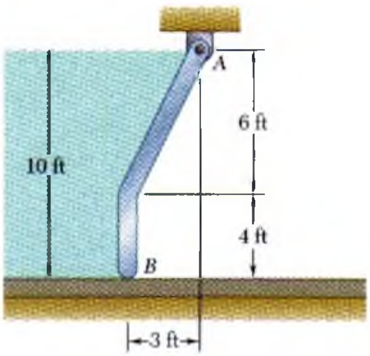


Figura P5.84

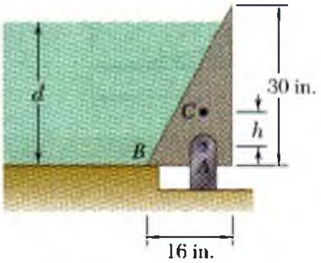


Figura P5.85 y *P5.86*

5.85 Al final de un canal de agua dulce se encuentra una compuerta en forma de prisma que está sostenida por medio de un pasador y una ménsula colocados en A y descansa sin fricción sobre un soporte ubicado en B. El pasador se localiza a una distancia de $h = 4$ in. por abajo del centro de gravedad C de la compuerta. Determine la profundidad del agua d para la cual se abrirá la compuerta.

5.86 Al final de un canal de agua dulce se encuentra una compuerta en forma de prisma que está sostenida por medio de un pasador y una ménsula colocados en A y descansa sin fricción sobre un soporte puesto en B. Determine la distancia h si la compuerta debe abrirse cuando $d = 30$ in.

5.87 Una compuerta colocada en el extremo de un canal de agua dulce de 1 m de ancho fue fabricada con tres placas de acero rectangulares de 125 kg cada una. La compuerta está articulada en A y descansa sin fricción sobre un apoyo puesto en D. Si $d = 0.75$ m, determine las reacciones en A y D.

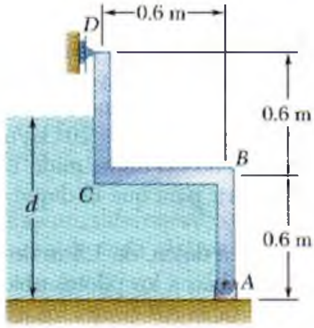


Figura P5.87 y P5.88

5.88 Una compuerta colocada en el extremo de un canal de agua dulce de 1 m de ancho fue fabricada con tres placas de acero rectangulares de 125 kg cada una. La compuerta está articulada en A y descansa sin fricción sobre un apoyo colocado en D. Determine la profundidad d del agua para la cual se abrirá la compuerta.

5.89 Un canalón para lluvia se sostiene del techo de una casa mediante ganchos espaciados 24 in. entre sí. Este canalón se obstruye y poco a poco se llena con agua de lluvia. Si el canalón está lleno de agua, determine *a*) la resultante de las fuerzas de presión ejercidas por el agua sobre una sección de 24 in. de la superficie curva del canalón que se muestra en la figura, *b*) el sistema fuerza-par ejercido sobre uno de los ganchos que sostienen al canalón.

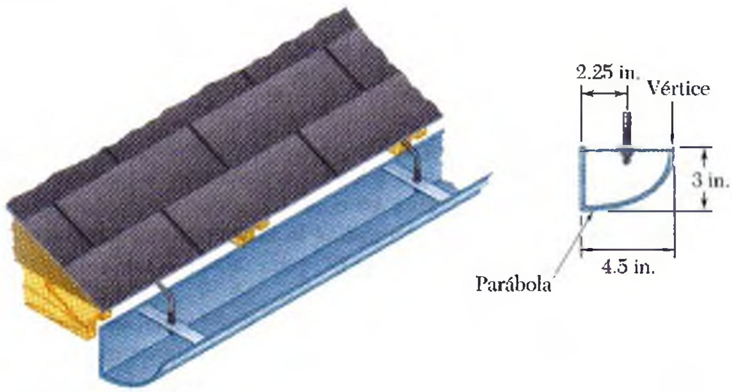


Figura *P5.89*

5.10. CENTRO DE GRAVEDAD DE UN CUERPO TRIDIMENSIONAL. CENTROIDE DE UN VOLUMEN



Fotografía 5.5 Cuando el Boeing 747 fue modificado para transportar un *transbordador espacial*, fue necesario determinar el centro de gravedad de cada nave para predecir las características del vuelo.

El *centro de gravedad* G de un cuerpo tridimensional se obtiene dividiendo el cuerpo en pequeños elementos y expresando que el peso $\mathbf{W}$ del cuerpo actuando en G es equivalente al sistema de fuerzas distribuidas $\Delta\mathbf{W}$ que representan a los pesos de los elementos pequeños. Al seleccionar al eje y vertical con un sentido positivo hacia arriba (figura 5.20) y representar con $\bar{\mathbf{r}}$ al vector de posición de G, se escribe

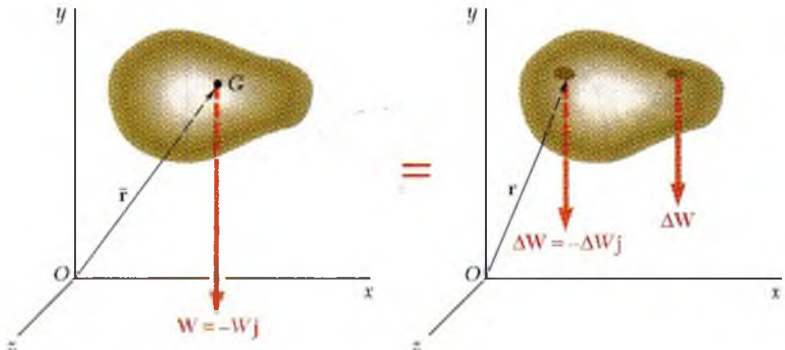


Figura 5.20

que $\mathbf{W}$ es igual a la suma de los pesos elementales $\Delta\mathbf{W}$ y que su momento con respecto a O es igual a la suma de los momentos con respecto a O de los pesos elementales.

$$\Sigma\mathbf{F}: \qquad -W\mathbf{j} = \Sigma(-\Delta W\mathbf{j})$$
$$\Sigma\mathbf{M}_O: \qquad \bar{\mathbf{r}} \times (-W\mathbf{j}) = \Sigma[\mathbf{r} \times (-\Delta W\mathbf{j})] \tag{5.13}$$

Se reescribe la última ecuación de la siguiente forma

$$\bar{\mathbf{r}}W \times (-\mathbf{j}) = (\Sigma\mathbf{r}\,\Delta W) \times (-\mathbf{j}) \tag{5.14}$$

se observa que el peso $\mathbf{W}$ del cuerpo es equivalente al sistema de pesos elementales $\Delta\mathbf{W}$ si se cumplen las siguientes condiciones:

$$W = \Sigma\,\Delta W \qquad \bar{\mathbf{r}}W = \Sigma\mathbf{r}\,\Delta W$$

Si se incrementa el número de elementos y al mismo tiempo se disminuye el tamaño de cada uno de ellos, se obtiene en el límite

$$W = \int dW \qquad \bar{\mathbf{r}}W = \int \mathbf{r}\,dW \tag{5.15}$$

Se observa que las relaciones obtenidas son independientes de la orientación del cuerpo. Por ejemplo, si el cuerpo y los ejes coordenados fueran rotados de manera que el eje z apuntara hacia arriba, el vector unitario $-\mathbf{j}$ sería reemplazado por $-\mathbf{k}$ en las ecuaciones (5.13) y (5.14), pero las relaciones (5.15) permanecerían intactas. Descomponiendo los vectores $\bar{\mathbf{r}}$ y $\mathbf{r}$ en sus componentes rectangulares, se observa que la segunda de las relaciones (5.15) es equivalente a las tres ecuaciones escalares que se presentan a continuación

$$\bar{x}W = \int x\,dW \qquad \bar{y}W = \int y\,dW \qquad \bar{z}W = \int z\,dW \tag{5.16}$$

Si el cuerpo está hecho de un material homogéneo de peso específico γ, la magnitud dW del peso de un elemento infinitesimal se puede expresar en términos del volumen dV de dicho elemento y la magnitud W del peso total puede expresarse en términos del volumen total V. Así, se escribe

$$dW = \gamma\, dV \qquad W = \gamma V$$

Sustituyendo a dW y a W en la segunda de las relaciones (5.15), se escribe

$$\bar{\mathbf{r}}V = \int \mathbf{r}\, dV \tag{5.17}$$

o, en forma escalar,

$$\bar{x}V = \int x\, dV \qquad \bar{y}V = \int y\, dV \qquad \bar{z}V = \int z\, dV \tag{5.18}$$

El punto cuyas coordenadas son $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$ también se conoce como el *centroide C del volumen V* del cuerpo. Si el cuerpo no es homogéneo, las ecuaciones (5.18) no pueden utilizarse para determinar el centro de gravedad del mismo; sin embargo, las ecuaciones (5.18) aún definen al centroide de su volumen.

La integral $\int x\, dV$ se conoce como el *primer momento del volumen con respecto al plano yz*. De manera análoga, las integrales $\int y\, dV$ y $\int z\, dV$ definen, respectivamente, los primeros momentos del volumen con respecto al plano zx y al plano xy. A partir de las ecuaciones (5.18) se observa que si el centroide de un volumen está localizado en un plano coordenado, el primer momento del volumen con respecto a dicho plano es igual a cero.

Se dice que un volumen es simétrico con respecto a un plano dado si para cada punto P del volumen existe un punto P' del mismo volumen tal que la línea PP' es perpendicular al plano dado y está dividida en dos partes por dicho plano. Bajo estas circunstancias, se dice que el plano en cuestión es un *plano de simetría* para el volumen dado. Cuando un volumen V posee un plano de simetría, el primer momento de V con respecto a ese plano es igual a cero y el centroide del volumen está localizado en el plano de simetría. Cuando un volumen posee dos planos de simetría, el centroide del volumen está localizado en la línea de intersección de los dos planos. Finalmente, cuando un volumen tiene tres ejes de simetría que se intersecan en un punto bien definido (esto es, que no se intersecan a lo largo de una línea común), el punto de intersección de los tres planos coincide con el centroide del volumen. Esta propiedad permite determinar la ubicación de los centroides de esferas, elipsoides, cubos y paralelepípedos rectangulares, entre otros.

Los centroides de volúmenes que no son simétricos o de volúmenes que tienen sólo uno o dos planos de simetría deben determinarse mediante integración (sección 5.12). Los centroides de varios volúmenes comunes se muestran en la figura 5.21. Se debe observar que, en general, el centroide de un volumen de revolución *no coincide* con el centroide de su sección transversal. Por tanto, el centroide de un hemisferio es diferente al de un área semicircular y el centroide de un cono es diferente al de un triángulo.

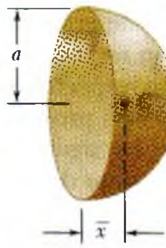
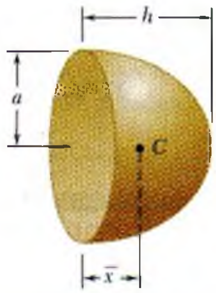
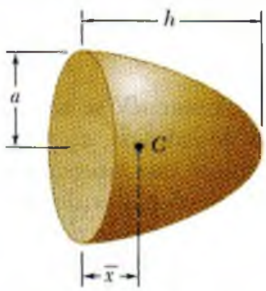
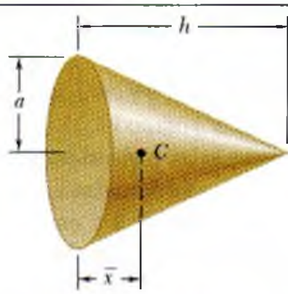
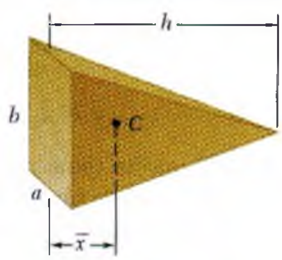
Forma		$\bar{x}$	Volumen
Semiesfera		$\frac{3a}{8}$	$\frac{2}{3}\pi a^3$
Semielipsoide de revolución		$\frac{3h}{8}$	$\frac{2}{3}\pi a^2 h$
Paraboloide de revolución		$\frac{h}{3}$	$\frac{1}{2}\pi a^2 h$
Cono		$\frac{h}{4}$	$\frac{1}{3}\pi a^2 h$
Pirámide		$\frac{h}{4}$	$\frac{1}{3}abh$

Figura 5.21 Centroides de formas y volúmenes comunes.

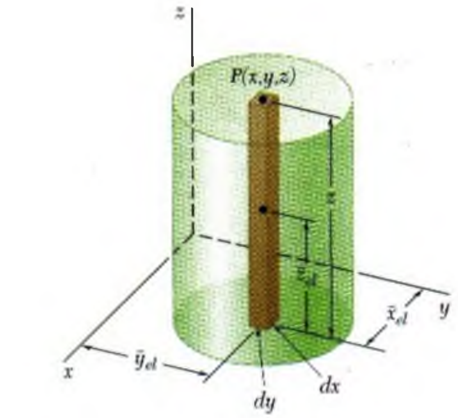
5.11. CUERPOS COMPUESTOS

Si un cuerpo puede dividirse en varias de las formas comunes mostradas en la figura 5.21, su centro de gravedad G puede determinarse al expresar que el momento con respecto a O de su peso total es igual a la suma de los momentos con respecto a O de los pesos de las diferentes partes que lo componen. Si se procede de la misma forma que en la sección 5.10, se obtienen las siguientes ecuaciones que definen las coordenadas $\bar{X}$, $\bar{Y}$ y $\bar{Z}$ del centro de gravedad G de un cuerpo.

$$\bar{X}\Sigma W = \Sigma\bar{x}W \qquad \bar{Y}\Sigma W = \Sigma\bar{y}W \qquad \bar{Z}\Sigma W = \Sigma\bar{z}W \tag{5.19}$$

Si el cuerpo está hecho de un material homogéneo, su centro de gravedad coincide con el centroide de su volumen y se obtiene:

$$\bar{X}\Sigma V = \Sigma\bar{x}V \qquad \bar{Y}\Sigma V = \Sigma\bar{y}V \qquad \bar{Z}\Sigma V = \Sigma\bar{z}V \tag{5.20}$$



$\bar{x}_{el} = x,\ \bar{y}_{el} = y,\ \bar{z}_{el} = \frac{z}{2}$
$dV = z\,dx\,dy$

Figura 5.22 Determinación del centroide de un volumen por integración doble.

5.12. DETERMINACIÓN DE CENTROIDES DE VOLÚMENES POR INTEGRACIÓN

El centroide de un volumen limitado por superficies analíticas se puede determinar al evaluar las integrales dadas en la sección 5.10:

$$\bar{x}V = \int x\,dV \qquad \bar{y}V = \int y\,dV \qquad \bar{z}V = \int z\,dV \tag{5.21}$$

Si el elemento de volumen dV se selecciona de manera que sea igual a un pequeño cubo de lados dx, dy y dz, la evaluación de cada una de estas integrales requiere una *integración triple*. Sin embargo, es posible determinar las coordenadas del centroide de la mayoría de los volúmenes utilizando *integración doble* si dV se selecciona de tal forma que sea igual al volumen de un filamento delgado (figura 5.22). Entonces, las coordenadas del centroide del volumen se obtienen reescribiendo las ecuaciones (5.21),

$$\bar{x}V = \int \bar{x}_{el}\,dV \qquad \bar{y}V = \int \bar{y}_{el}\,dV \qquad \bar{z}V = \int \bar{z}_{el}\,dV \tag{5.22}$$

y sustituyendo después las expresiones dadas en la figura 5.22 para el volumen dV y para las coordenadas $\bar{x}_{el}$, $\bar{y}_{el}$ y $\bar{z}_{el}$. Si se utiliza la ecuación de la superficie para expresar a z en términos de x y y, la integración se reduce a una integración doble en x y y.

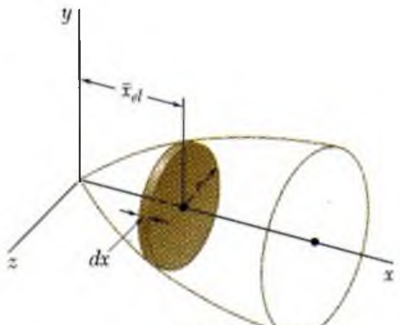
Si el volumen en consideración posee *dos planos de simetría*, su centroide debe estar localizado sobre la línea de intersección de los dos planos. Seleccionando al eje x de manera que coincida con esta línea se tiene

$$\bar{y} = \bar{z} = 0$$

y la única coordenada que se tiene que determinar es $\bar{x}$. Esto se puede realizar con una *sola integración* dividiendo el volumen dado en placas delgadas paralelas al plano yz y expresando a dV en términos de x y dx en la ecuación

$$\bar{x}V = \int \bar{x}_{el}\,dV \tag{5.23}$$

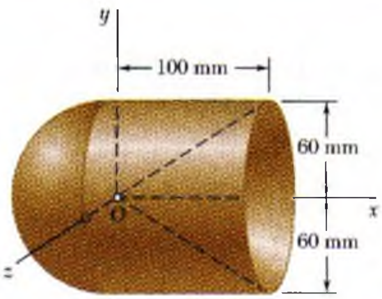
Para un cuerpo de revolución las placas son circulares y sus volúmenes se dan en la figura 5.23.



$\bar{x}_{el} = x$
$dV = \pi r^2\,dx$

Figura 5.23 Determinación del centroide de un cuerpo de revolución.

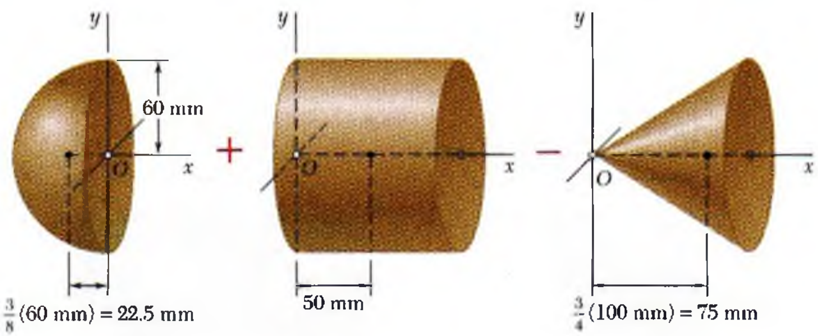
PROBLEMA RESUELTO 5.11



Determine la ubicación del centro de gravedad del cuerpo de revolución homogéneo que se muestra en la figura, el cual se obtuvo al unir una semiesfera y un cilindro y removiendo un cono.

SOLUCIÓN

Debido a la simetría, el centro de gravedad se encuentra sobre el eje x, como se muestra en la figura que se presenta a continuación. El cuerpo puede obtenerse sumándole una semiesfera a un cilindro y después restándole un cono. El volumen y la abscisa del centroide de cada una de estas componentes se obtiene a partir de la figura 5.21 y se introduce en la tabla que aparece a continuación. Entonces, se determinan el volumen total del cuerpo y el primer momento de dicho volumen con respecto al plano yz.

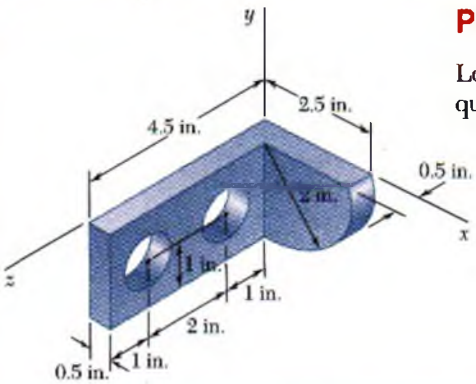


Componente	Volumen, mm^3	$\bar{x}$, mm	$\bar{x}V$, mm^4
Semiesfera	$\frac{1}{2}\frac{4\pi}{3}(60)^3 = 0.4524 \times 10^6$	-22.5	-10.18×10^6
Cilindro	$\pi(60)^2(100) = 1.1310 \times 10^6$	$+50$	$+56.55 \times 10^6$
Cono	$-\frac{\pi}{3}(60)^2(100) = -0.3770 \times 10^6$	$+75$	-28.28×10^6
	$\Sigma V = 1.206 \times 10^6$		$\Sigma\bar{x}V = +18.09 \times 10^6$

Por tanto,

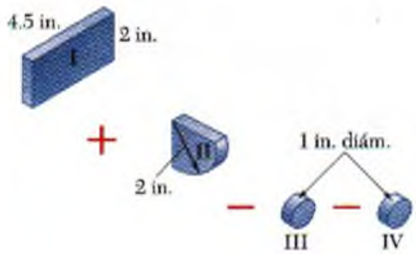
$\bar{X}\Sigma V = \Sigma\bar{x}V$: $\quad \bar{X}(1.206 \times 10^6\ mm^3) = 18.09 \times 10^6\ mm^4$

$$\bar{X} = 15\ mm$$



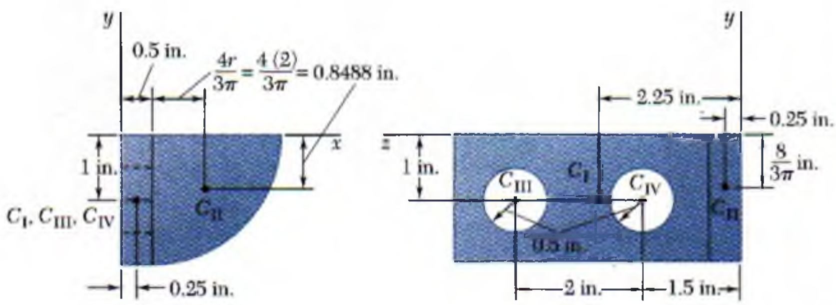
PROBLEMA RESUELTO 5.12

Localice el centro de gravedad del elemento de una máquina hecho de acero que se muestra en la figura. El diámetro de cada agujero es 1 in.



SOLUCIÓN

El elemento de máquina se puede obtener sumándole a un paralelepípedo rectangular (I) un cuarto de cilindro (II) y, entonces, restando dos cilindros de 1 in. de diámetro (III y IV). Se determinan el volumen y las coordenadas del centroide de cada componente y se introducen en la tabla que se presenta a continuación. Entonces, al utilizar los datos que están en la tabla se determina el volumen total y los momentos de dicho volumen con respecto a cada uno de los planos coordenados.



	V, in.^{3}	$\bar{x}$, in.	$\bar{y}$, in.	$\bar{z}$, in.	$\bar{x}V$, in.^{4}	$\bar{y}V$, in.^{4}	$\bar{z}V$, in.^{4}
I	$(4.5)(2)(0.5) = 4.5$	0.25	-1	2.25	1.125	-4.5	10.125
II	$\frac{1}{4}\pi(2)^2(0.5) = 1.571$	1.3488	-0.8488	0.25	2.119	-1.333	0.393
III	$-\pi(0.5)^2(0.5) = -0.3927$	0.25	-1	3.5	-0.098	0.393	-1.374
IV	$-\pi(0.5)^2(0.5) = -0.3927$	0.25	-1	1.5	-0.098	0.393	-0.589
	$\Sigma V = 5.286$				$\Sigma\bar{x}V = 3.048$	$\Sigma\bar{y}V = -5.047$	$\Sigma\bar{z}V = 8.555$

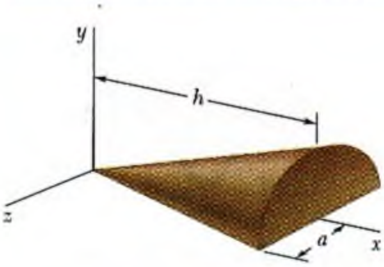
Por tanto,

$\bar{X}\Sigma V = \Sigma\bar{x}V$: $\quad \bar{X}(5.286 \text{ in.}^3) = 3.048 \text{ in.}^4 \qquad \bar{X} = 0.577 \text{ in.}$ ◀

$\bar{Y}\Sigma V = \Sigma\bar{y}V$: $\quad \bar{Y}(5.286 \text{ in.}^3) = -5.047 \text{ in.}^4 \qquad \bar{Y} = -0.955 \text{ in.}$ ◀

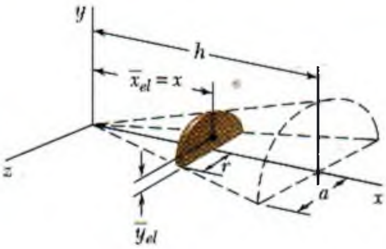
$\bar{Z}\Sigma V = \Sigma\bar{z}V$: $\quad \bar{Z}(5.286 \text{ in.}^3) = 8.555 \text{ in.}^4 \qquad \bar{Z} = 1.618 \text{ in.}$ ◀

PROBLEMA RESUELTO 5.13



Determine la ubicación del centroide del medio cono circular recto mostrado en la figura.

SOLUCIÓN



Como el plano xy es un plano de simetría, el centroide se encuentra en dicho plano y $\bar{z} = 0$. Se selecciona una placa de espesor dx como el elemento diferencial. El volumen de dicho elemento es

$$dV = \tfrac{1}{2}\pi r^2\, dx$$

Las coordenadas $\bar{x}_{el}$ y $\bar{y}_{el}$ del centroide del elemento son

$$\bar{x}_{el} = x \qquad \bar{y}_{el} = \frac{4r}{3\pi}$$

donde $\bar{y}_{el}$ se obtiene a partir de la figura 5.8 (área semicircular).

Se observa que r es proporcional a x y se escribe

$$\frac{r}{x} = \frac{a}{h} \qquad r = \frac{a}{h}x$$

Así, el volumen del cuerpo está dado por

$$V = \int dV = \int_0^h \tfrac{1}{2}\pi r^2\, dx = \int_0^h \tfrac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{h}x\right)^2 dx = \frac{\pi a^2 h}{6}$$

El primer momento del elemento diferencial con respecto al plano yz es $\bar{x}_{el}\, dV$; en consecuencia, el momento total del cuerpo con respecto a ese mismo plano es

$$\int \bar{x}_{el}\, dV = \int_0^h x(\tfrac{1}{2}\pi r^2)\, dx = \int_0^h x(\tfrac{1}{2}\pi)\left(\frac{a}{h}x\right)^2 dx = \frac{\pi a^2 h^2}{8}$$

Por tanto,

$$\bar{x}V = \int \bar{x}_{el}\, dV \qquad \bar{x}\frac{\pi a^2 h}{6} = \frac{\pi a^2 h^2}{8} \qquad \bar{x} = \tfrac{3}{4}h \quad ◀$$

En forma similar, el momento del elemento diferencial con respecto al plano zx es $\bar{y}_{el}\, dV$; en consecuencia, el momento total es

$$\int \bar{y}_{el}\, dV = \int_0^h \frac{4r}{3\pi}(\tfrac{1}{2}\pi r^2)\, dx = \frac{2}{3}\int_0^h \left(\frac{a}{h}x\right)^3 dx = \frac{a^3 h}{6}$$

Por tanto,

$$\bar{y}V = \int \bar{y}_{el}\, dV \qquad \bar{y}\frac{\pi a^2 h}{6} = \frac{a^3 h}{6} \qquad \bar{y} = \frac{a}{\pi} \quad ◀$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los problemas correspondientes a esta lección se pedirá localizar los centros de gravedad de cuerpos tridimensionales o los centroides de sus volúmenes. Todas las técnicas que se presentaron anteriormente para cuerpos bidimensionales, como usar simetría, dividir al cuerpo en formas comunes, seleccionar el elemento diferencial más eficiente, entre otros, también pueden aplicarse para el caso tridimensional general.

1. *Localización de los centros de gravedad de cuerpos compuestos.* En general, se deben utilizar las ecuaciones (5.19):

$$\bar{X}\Sigma W = \Sigma \bar{x} W \qquad \bar{Y}\Sigma W = \Sigma \bar{y} W \qquad \bar{Z}\Sigma W = \Sigma \bar{z} W \tag{5.19}$$

Sin embargo, para el caso de un *cuerpo homogéneo*, el centro de gravedad del mismo coincide con el *centroide de su volumen*. Por tanto, para este caso específico, el centro de gravedad del cuerpo también puede localizarse con las ecuaciones (5.20):

$$\bar{X}\Sigma V = \Sigma \bar{x} V \qquad \bar{Y}\Sigma V = \Sigma \bar{y} V \qquad \bar{Z}\Sigma V = \Sigma \bar{z} V \tag{5.20}$$

Debe observarse que estas ecuaciones son sólo una extensión de las ecuaciones utilizadas para los problemas bidimensionales considerados en secciones anteriores de este mismo capítulo. Como lo ilustran las soluciones de los problemas resueltos 5.11 y 5.12, los métodos de solución para problemas bidimensionales y tridimensionales son idénticos. Por tanto, de nuevo se recomienda construir diagramas y tablas apropiadas cuando se analicen cuerpos compuestos. Además, cuando se estudie el problema resuelto 5.12, se debe observar cómo las coordenadas x y y del centroide del cuarto de cilindro se obtuvieron mediante las ecuaciones para el centroide de un cuarto de círculo.

Se debe señalar que se presentan dos *casos especiales* de interés cuando el cuerpo dado consiste de alambres uniformes o de placas uniformes hechos del mismo material.

a) Para un cuerpo hecho de *varios elementos de alambre* que tienen la *misma sección transversal uniforme*, el área A de la sección transversal de los elementos de alambre se podrá eliminar de las ecuaciones (5.20) cuando V se reemplaza por el producto AL, donde L es la longitud de un elemento dado. Entonces, para este caso, las ecuaciones (5.20) se reducen a

$$\bar{X}\Sigma L = \Sigma \bar{x} L \qquad \bar{Y}\Sigma L = \Sigma \bar{y} L \qquad \bar{Z}\Sigma L = \Sigma \bar{z} L$$

b) Para un cuerpo hecho de *varias placas* que tienen el *mismo espesor uniforme*, el espesor t de las placas puede factorizarse y eliminarse de las ecuaciones (5.20) cuando V se reemplaza por el producto tA, donde A es el área de una placa dada. Por tanto, en este caso, las ecuaciones (5.20) se reducen a

$$\bar{X}\Sigma A = \Sigma \bar{x} A \qquad \bar{Y}\Sigma A = \Sigma \bar{y} A \qquad \bar{Z}\Sigma A = \Sigma \bar{z} A$$

2. *Localización de los centroides de volúmenes por integración directa.* Como se explicó en la sección 5.11, la evaluación de las integrales de las ecuaciones (5.21) se puede simplificar seleccionando para el elemento de volumen dV un filamento delgado (figura 5.22) o una placa delgada (figura 5.23). Por tanto, la solución se debe iniciar con la identificación, de ser posible, del dV que produce integrales sencillas o dobles que son fáciles de calcular. Para cuerpos de revolución, este elemento de volumen puede ser una placa delgada (como en el problema resuelto 5.13) o un cascarón cilíndrico delgado. Sin embargo, es importante recordar que las relaciones que se establezcan entre las variables (como las relaciones entre r y x en el problema resuelto 5.13) afectarán directamente la complejidad de las integrales que se tendrán que calcular. Finalmente, conviene recordar que $\bar{x}_{el}$, $\bar{y}_{el}$ y $\bar{z}_{el}$ en las ecuaciones (5.22) son las coordenadas del centroide de dV.

Problemas

5.90 El cuerpo compuesto que se presenta en la figura se obtiene al remover un hemisferio de radio r de un cilindro de radio R y altura $2R$. Determine *a*) la coordenada y del centroide cuando $r = 3R/4$, *b*) la relación r/R para la cual $\bar{y} = -1.2R$.

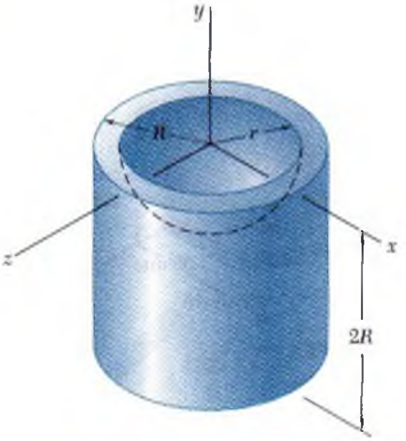


Figura P5.90

5.91 Determine la coordenada y del centroide del cuerpo mostrado en la figura.

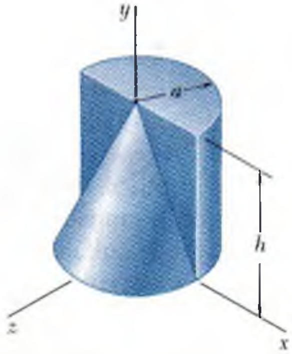


Figura P5.91 y P5.92

5.92 Determine la coordenada z del centroide del cuerpo mostrado en la figura. (*Sugerencia*: Use el resultado del problema resuelto 5.13.)

5.93 Para el cuerpo mostrado en la figura, determine *a*) el valor de $\bar{x}$ donde $h = L/2$, *b*) la relación h/L para la cual $\bar{x} = L$.

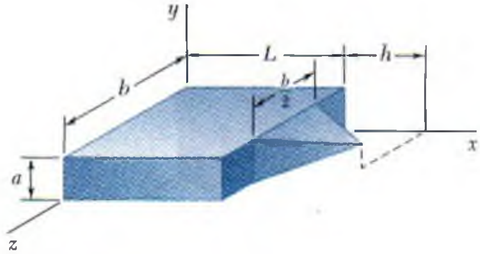


Figura P5.93

5.94 Para el elemento de máquina que se muestra en la figura, localice la coordenada y del centro de gravedad.

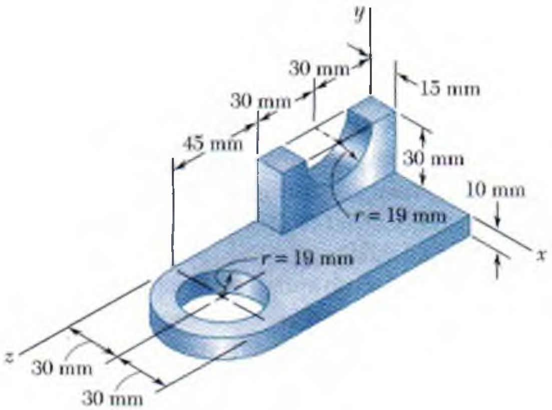


Figura P5.94 y P5.95

5.95 Para el elemento de máquina que se muestra en la figura, localice la coordenada z del centro de gravedad.

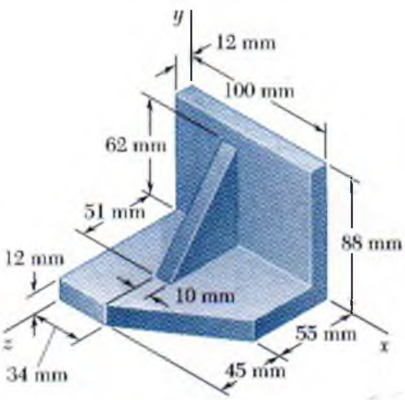


Figura *P5.96* y *P5.97*

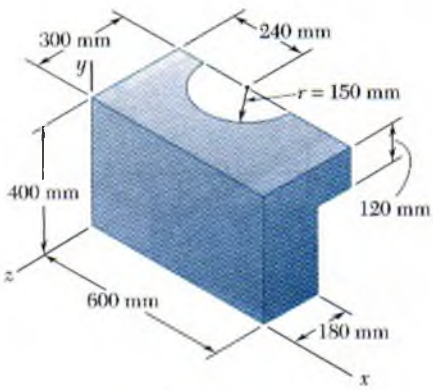


Figura P5.100

5.96 Para la ménsula de tope que se muestra en la figura, localice la coordenada x del centro de gravedad.

5.97 Para la ménsula de tope que se muestra en la figura, localice la coordenada z del centro de gravedad.

5.98 Para el elemento de máquina que se muestra en la figura, localice la coordenada x del centro de gravedad.

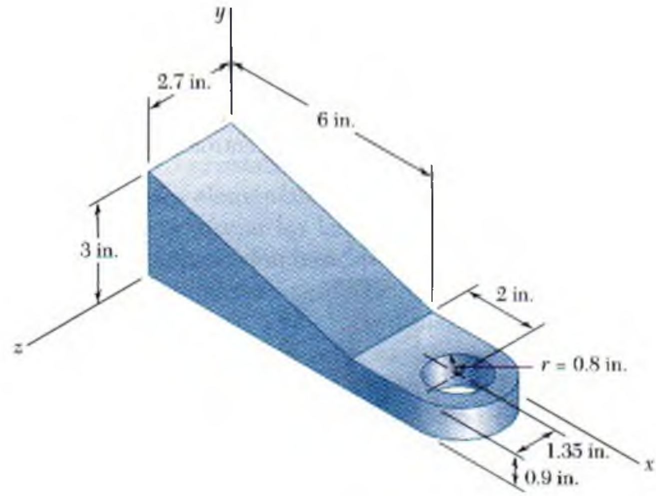


Figura P5.98 y P5.99

5.99 Para el elemento de máquina que se muestra en la figura, localice la coordenada y del centro de gravedad.

5.100 Una hoja de metal con espesor uniforme se utiliza para fabricar una porción de la teja de un techo. Localice el centro de gravedad de la teja si está compuesta de los tres elementos que se muestran en la figura.

5.101 Localice el centro de gravedad de la hoja de metal que se muestra en la figura.

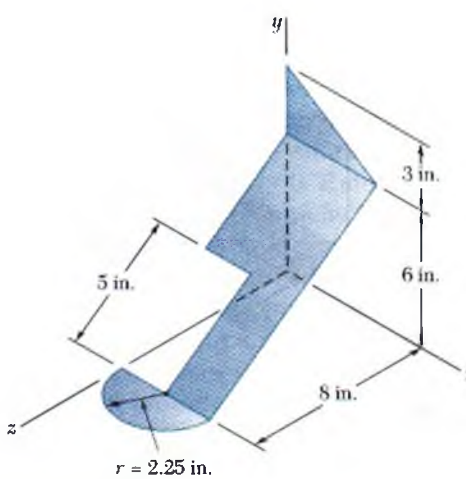


Figura P5.101

5.102 Localice el centro de gravedad de la hoja de metal que tiene la forma indicada por la figura.

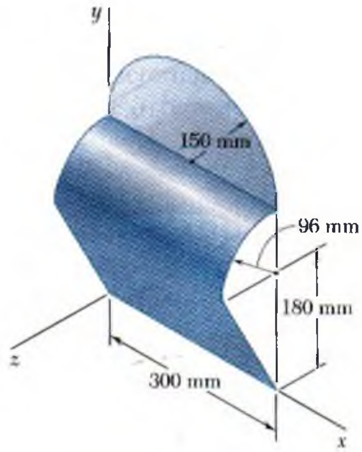


Figura P5.102

***5.103** La cubierta de un dispositivo electrónico se forma a partir de una hoja de metal de espesor uniforme. Localice el centro de gravedad de la cubierta.

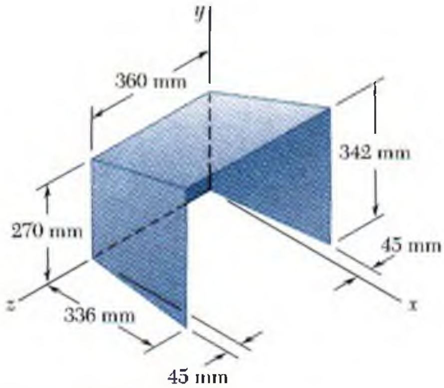


Figura P5.103

5.104 Localice el centro de gravedad de una canaleta hecha a partir de una hoja metálica de espesor uniforme.

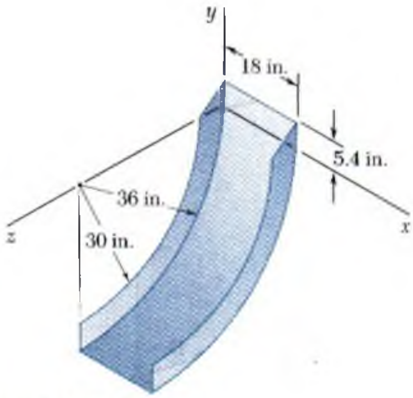


Figura P5.104

5.105 Un ducto cilíndrico de 8 in. de diámetro y un ducto rectangular de 4 × 8 in. se unen en la forma indicada en la figura. Localice el centro de gravedad del ensamble si se sabe que los ductos fueron fabricados con la misma hoja de metal de espesor uniforme.

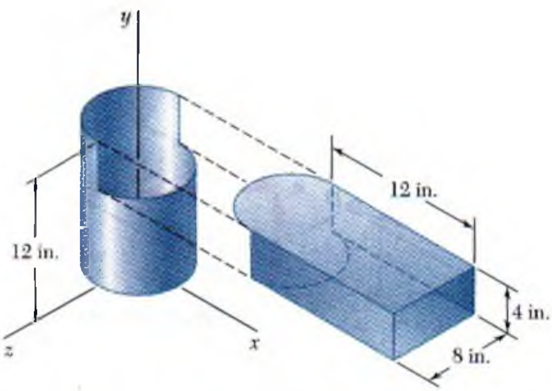


Figura *P5.105*

5.106 El toldo para ventana que se muestra en la figura está fabricado a partir de una hoja de metal de espesor uniforme. Localice el centro de gravedad del toldo.

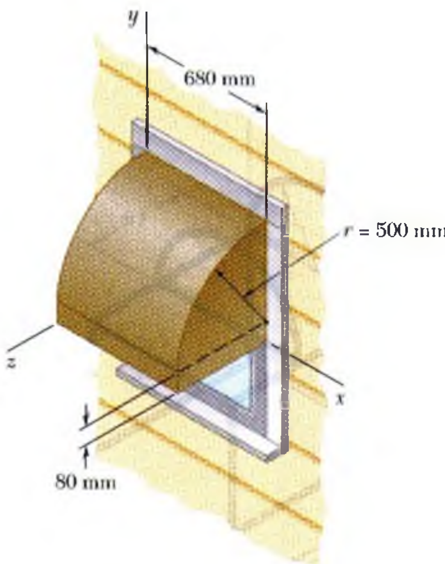


Figura P5.106

5.107 La cubierta frontal de un reloj de pared está hecha de material plástico delgado y tiene espesor uniforme. Localice el centro de gravedad de la cubierta.

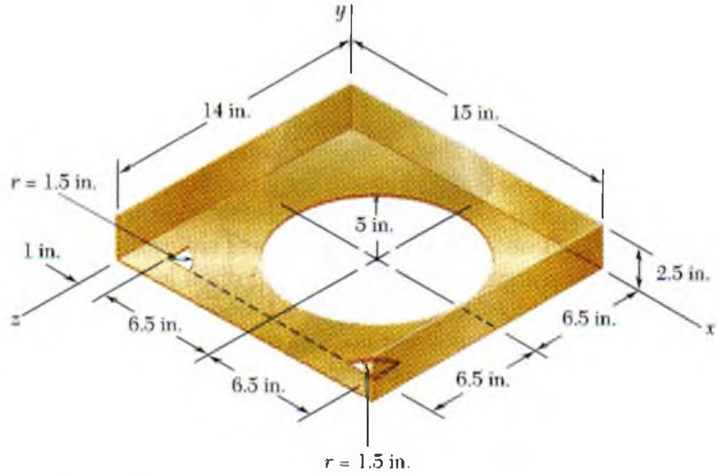


Figura *P5.107*

5.108 Una varilla delgada de latón que tiene sección transversal uniforme se dobla en la forma indicada por la figura. Localice su centro de gravedad.

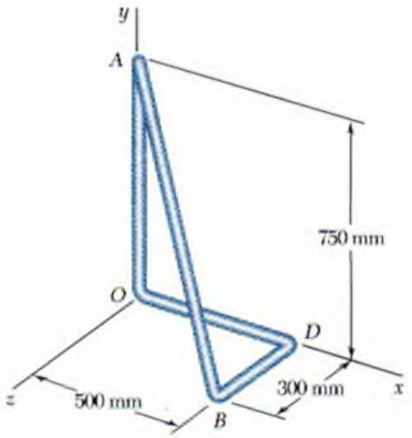


Figura P5.108

5.109 Un alambre delgado de acero con sección transversal uniforme se dobla como indica la figura, donde el arco BC es un cuarto del círculo del radio R. Localice su centro de gravedad.

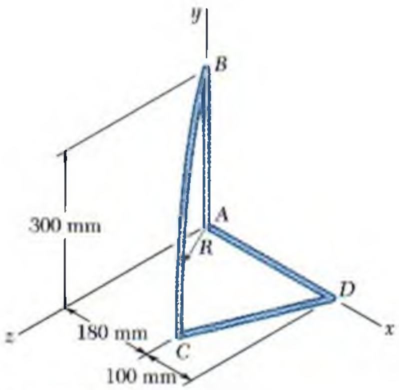


Figura P5.109

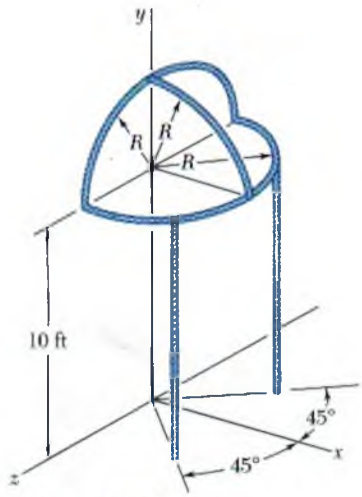


Figura *P5.110*

5.110 La metalistería decorativa que está a la entrada de un comercio se fabrica a partir de tubería estructural de acero. Si $R = 4$ ft, localice el centro de gravedad de la metalistería.

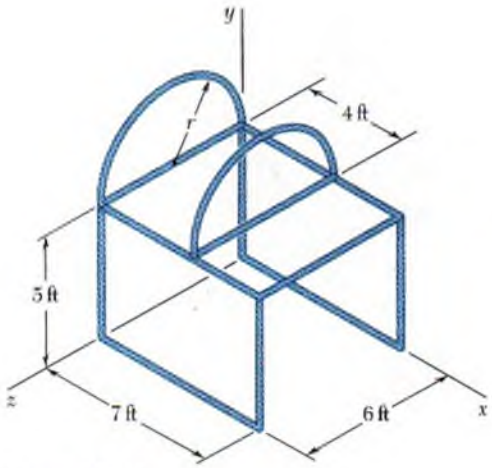


Figura P5.111

5.111 El marco de una cubierta para equipo portátil está construido con tubería de acero de diámetro uniforme. Localice el centro de gravedad del marco.

5.112 Una lesna marcadora tiene mango de plástico y vástago y punta de acero. Si los pesos específicos del plástico y del acero son, respectivamente, de 0.0374 lb/in.^{3} y 0.284 lb/in.^{3}, localice el centro de gravedad de la lesna.

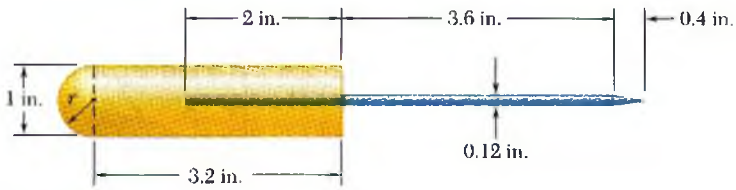


Figura *P5.112*

5.113 Una polea tensora de banda plana está moldeada con policarbonato y tiene en el interior un mango de bronce. Si las densidades del policarbonato y del bronce son, respectivamente, de 1 250 kg/m^3 y 8 800 kg/m^3, determine la coordenada x del centro de gravedad de la polea.

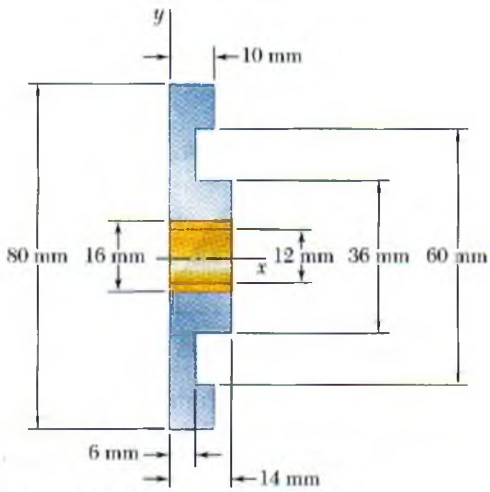


Figura P5.113

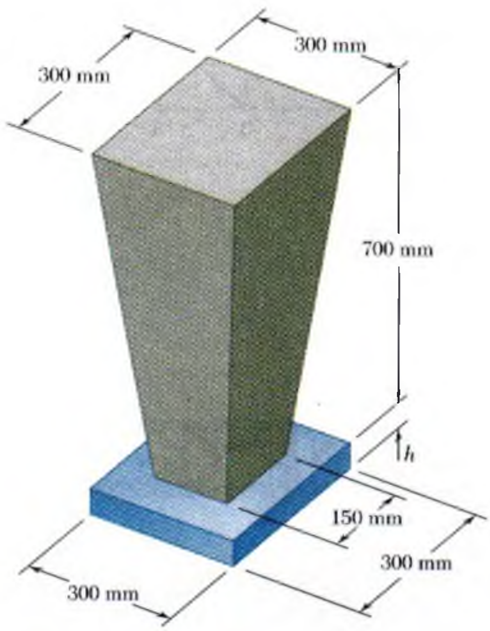


Figura P5.114

5.114 Un poste para demarcar el camino en un jardín consiste en una pirámide regular truncada esculpida a partir de una roca con densidad de 2 570 kg/m^3. La pirámide está montada sobre una base de acero de espesor h. Si la densidad del acero es de 7 860 kg/m^3 y la placa de acero está disponible en incrementos de 5 mm, especifique el espesor mínimo h para el cual el centro de gravedad del poste está aproximadamente 300 mm por encima de la arista superior de la base.

5.115 Tres placas de latón están soldadas a un tubo de acero para formar la base de asta bandera que se muestra en la figura. Si la pared del tubo y cada placa tienen un espesor de 0.25 y 0.2 in., respectivamente, determine la localización del centro de gravedad de la base. (Pesos específicos: latón = 0.306 lb/in.^{3}, acero = 0.284 lb/in.^{3})

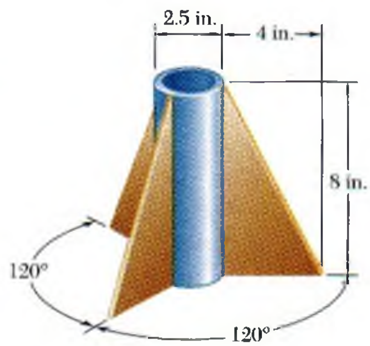


Figura P5.115

5.116 a 5.118 Determine por integración directa los valores de $\bar{x}$ para los dos volúmenes obtenidos al hacer pasar un plano de corte vertical a través de las formas mostradas en la figura 5.21. El plano de corte es paralelo a la base de la forma dada y la divide en dos volúmenes de la misma altura.

5.116 Una semiesfera.

5.117 Un semielipsoide de revolución.

5.118 Un paraboloide de revolución.

5.119 y *5.120* Localice el centroide del volumen que se obtiene al rotar el área sombreada alrededor del eje x.

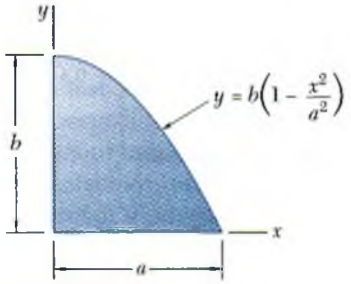


Figura P5.119

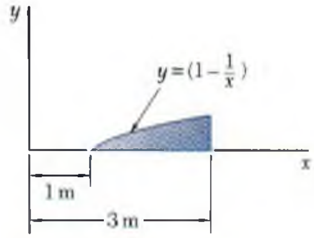


Figura *P5.120*

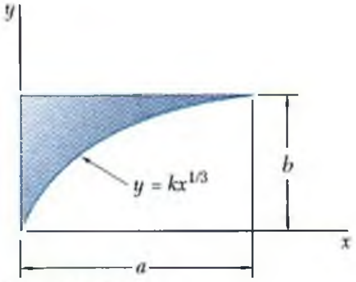


Figura P5.121

5.121 Localice el centroide del volumen que se obtiene al girar el área sombreada alrededor de la línea $x = a$.

***5.122** Localice el centroide del volumen generado al girar la porción de la curva cosenoidal mostrada alrededor del eje x.

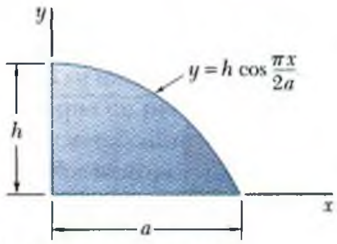


Figura P5.122 y P5.123

***5.123** Localice el centroide del volumen generado al girar la porción de la curva cosenoidal mostrada alrededor del eje y. (*Sugerencia*: Use como elemento de volumen un cascarón cilíndrico delgado de radio r y espesor dr.)

***5.124** Muestre que para una pirámide regular de altura h y n lados ($n = 3, 4, \ldots$) el centroide del volumen se localiza a una distancia $h/4$ por encima de la base.

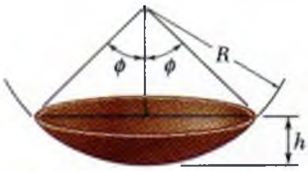


Figura P5.125

***5.125** Una taza esférica delgada tiene radio R y espesor uniforme t. Demuestre por integración directa que el centro de gravedad de la taza se localiza a una distancia de $h/2$ por encima de la base.

5.126 Los lados y la base de la ponchera que se muestra en la figura tienen un espesor uniforme t. Si $t << R$ y $R = 350$ mm, determine la localización del centro de gravedad de *a*) la ponchera, *b*) el ponche.

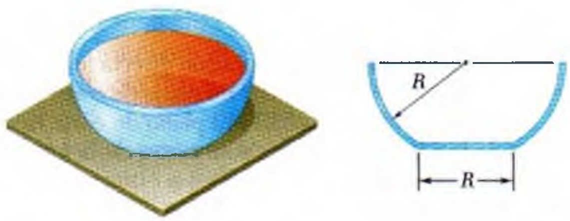


Figura *P5.126*

5.127 Después de medir y marcar un terreno, un constructor coloca cuatro estacas para identificar las esquinas de la losa donde levantará una casa. Para suministrar el firme, el constructor vierte un mínimo de 3 in. de grava por debajo de la losa. Determine el volumen de grava requerido y la coordenada x del centroide de este volumen. (*Sugerencia*: La superficie del fondo de la grava es un plano oblicuo que puede representarse mediante la ecuación $y = a + bx + cz$.)

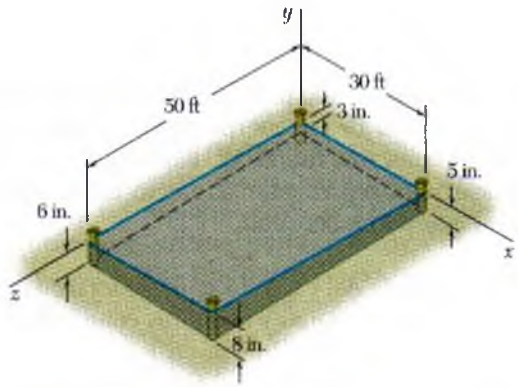


Figura ***P5.127***

5.128 Mediante integración directa, determine la coordenada z del centroide del volumen que se muestra en la figura, el cual fue cortado de un prisma rectangular mediante un plano oblicuo dado por la ecuación $y = y_0 - y_1(x/a) - y_2(z/b)$.

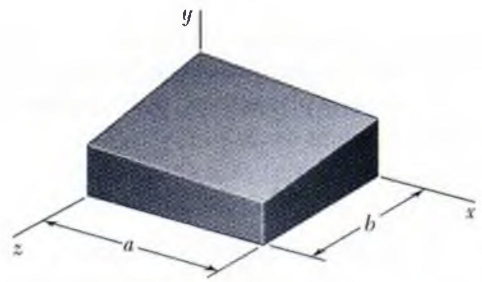


Figura P5.128

5.129 Localice el centroide de la sección que se muestra en la figura, la cual fue cortada a partir de un cilindro circular mediante un plano inclinado.

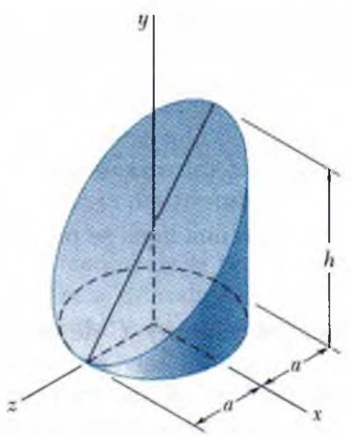


Figura P5.129

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 5

Este capítulo estuvo dedicado primordialmente a la determinación del *centro de gravedad* de un cuerpo rígido, es decir, determinar el punto G donde una sola fuerza $\mathbf{W}$, llamada el peso del cuerpo, se puede aplicar para representar el efecto de la atracción de la Tierra sobre el cuerpo en cuestión.

Centro de gravedad de un cuerpo bidimensional

En la primera parte del capítulo se consideraron *cuerpos bidimensionales* como placas planas y alambres contenidos en el plano xy. Al sumar componentes de fuerza en la dirección vertical z y sumar momentos con respecto a los ejes horizontales x y y [sección 5.2], se derivaron las relaciones

$$W = \int dW \qquad \bar{x}W = \int x\,dW \qquad \bar{y}W = \int y\,dW \tag{5.2}$$

las cuales definen el peso del cuerpo y las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ de su centro de gravedad.

Centroide de un área o línea

En el caso de una *placa plana homogénea de espesor uniforme* [sección 5.3], el centro de gravedad G de la placa coincide con el *centroide C del área A* de la placa cuyas coordenadas están definidas por las relaciones

$$\bar{x}A = \int x\,dA \qquad \bar{y}A = \int y\,dA \tag{5.3}$$

De manera similar, la determinación del centro de gravedad de un *alambre homogéneo de sección transversal uniforme* que está contenido en un plano, se reduce a la determinación del *centroide C de la línea L* que representa al alambre; así, se tiene

$$\bar{x}L = \int x\,dL \qquad \bar{y}L = \int y\,dL \tag{5.4}$$

Primeros momentos

Se hace referencia a las integrales en las ecuaciones (5.3) como los *primeros momentos* del área A con respecto a los ejes x y y, los cuales se representan, respectivamente, con Q_y y Q_x [sección 5.4]. Así, se tiene

$$Q_y = \bar{x}A \qquad Q_x = \bar{y}A \tag{5.6}$$

Los primeros momentos de una línea se pueden definir en forma similar.

Propiedades de simetría

La determinación del centroide C de un área o de una línea se simplifica cuando el área o la línea poseen ciertas *propiedades de simetría*. Si el área o la línea es simétrica con respecto a un eje, su centroide C se encuentra sobre dicho eje; si el área o la línea

es simétrica con respecto a dos ejes, C está localizado en la intersección de los dos ejes; si el área o la línea es simétrica con respecto a un centro O, C coincide con O.

Centro de gravedad de un cuerpo compuesto

Las *áreas* y los *centroides de varias formas comunes* están tabulados en la figura 5.8. Cuando una placa puede dividirse en varias de estas formas, las coordenadas $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ de su centro de gravedad G se pueden determinar a partir de las coordenadas $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots$ y $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots$ de los centros de gravedad $G_1, G_2, \ldots$ de las diferentes partes [sección 5.5]. Al igualar, respectivamente, los momentos en relación a los ejes y y x (figura 5.24), se tiene que

$$\bar{X}\Sigma W = \Sigma\bar{x}W \qquad \bar{Y}\Sigma W = \Sigma\bar{y}W \tag{5.7}$$

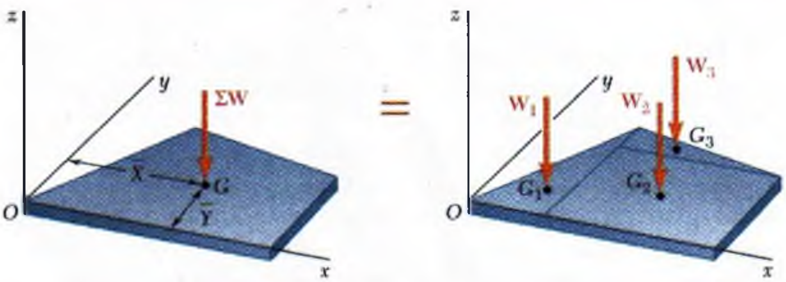


Figura 5.24

Si la placa es homogénea y de espesor uniforme, su centro de gravedad coincide con el centroide C del área de la placa y las ecuaciones (5.7) se reducen a

$$Q_y = \bar{X}\Sigma A = \Sigma\bar{x}A \qquad Q_x = \bar{Y}\Sigma A = \Sigma\bar{y}A \tag{5.8}$$

De estas ecuaciones se obtienen los primeros momentos del área compuesta o pueden resolverse para las coordenadas $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ de su centroide [problema resuelto 5.1]. La determinación del centro de gravedad de un alambre compuesto se lleva a cabo de forma similar [problema resuelto 5.2].

Determinación del centroide por integración

Cuando un área está limitada por curvas analíticas, las coordenadas de su centroide pueden determinarse por *integración* [sección 5.6]. Esto se puede realizar evaluando las integrales dobles en las ecuaciones (5.3) o evaluando una *sola integral* que emplea uno de los elementos de área mostrados en la figura 4.12 que tienen la forma de un rectángulo delgado o de un fragmento de círculo delgado. Al representar con $\bar{x}_{el}$ y $\bar{y}_{el}$ las coordenadas del centroide del elemento dA, se tiene que

$$Q_y = \bar{x}A = \int \bar{x}_{el}\, dA \qquad Q_x = \bar{y}A = \int \bar{y}_{el}\, dA \tag{5.9}$$

Es ventajoso emplear el mismo elemento del área para el cálculo de los dos primeros momentos Q_y y Q_x; además, el mismo elemento también se puede utilizar para determinar el área A [problema resuelto 5.4].

Teoremas de Pappus-Guldinus

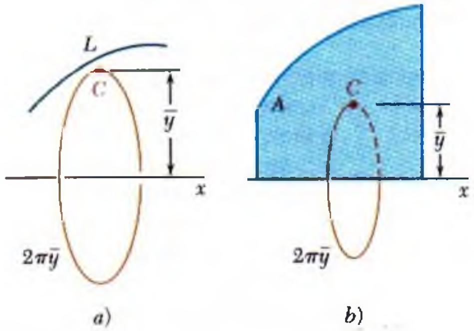


Figura 5.25

Los *teoremas de Pappus-Guldinus* relacionan la determinación del área de una superficie de revolución o el volumen de un cuerpo de revolución con la determinación del centroide de la curva generatriz o del área generatriz [sección 5.7]. El área A de la superficie generada al rotar una curva de longitud L con respecto a un eje fijo (figura 5.25*a*) es igual a

$$A = 2\pi\bar{y}L \tag{5.10}$$

donde $\bar{y}$ representa la distancia desde el centroide C de la curva hasta el eje fijo. En forma similar, el volumen V del cuerpo generado al rotar un área A alrededor de un eje fijo (figura 5.25*b*) es igual a

$$V = 2\pi\bar{y}A \tag{5.11}$$

donde $\bar{y}$ representa la distancia desde el centroide C del área hasta el eje fijo.

Cargas distribuidas

El concepto de centroide de un área también se puede utilizar para resolver otros problemas distintos de aquellos relacionados con el peso de placas planas. Por ejemplo, para determinar las reacciones en los apoyos de una viga [sección 5.8], se puede reemplazar una *carga distribuida* w por una carga concentrada $\mathbf{W}$ igual en magnitud al área A bajo la curva de carga y que pasa a través del centroide C de dicha área (figura 5.26). Se puede utilizar el mismo procedimiento para determinar la resultante de las fuerzas hidrostáticas ejercidas sobre una *placa rectangular que está sumergida en un líquido* [sección 5.9].

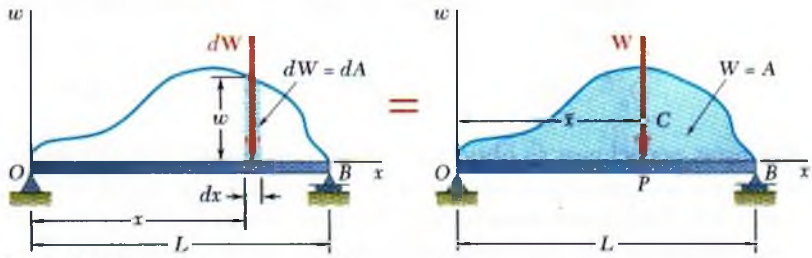


Figura 5.26

Centro de gravedad de un cuerpo tridimensional

La última parte del capítulo estuvo dedicada a la determinación del *centro de gravedad G de un cuerpo tridimensional*. Las coordenadas $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$ de G se definieron por las relaciones

$$\bar{x}W = \int x\,dW \qquad \bar{y}W = \int y\,dW \qquad \bar{z}W = \int z\,dW \tag{5.16}$$

Centroide de un volumen

En el caso de un *cuerpo homogéneo*, el centro de gravedad G coincide con el *centroide C del volumen V* del cuerpo; las coordenadas de C están definidas por las relaciones

$$\bar{x}V = \int x\,dV \qquad \bar{y}V = \int y\,dV \qquad \bar{z}V = \int z\,dV \tag{5.18}$$

Si el volumen tiene un *plano de simetría*, su centroide C estará en dicho plano; si el volumen posee dos planos de simetría, C estará localizado sobre la línea de intersección de los dos planos; si el volumen tiene tres ejes de simetría que se intersecan en un solo punto, C coincidirá con dicho punto [sección 5.10].

Centro de gravedad de un cuerpo compuesto

Los *volúmenes y los centroides de varias formas tridimensionales comunes* están tabulados en la figura 5.21. Cuando un cuerpo se puede dividir en varias de estas formas, las coordenadas $\bar{X}$, $\bar{Y}$ y $\bar{Z}$ de su centro de gravedad G se pueden determinar a partir de las coordenadas correspondientes de los centros de gravedad de sus diferentes partes [sección 5.11]. Así se tiene que

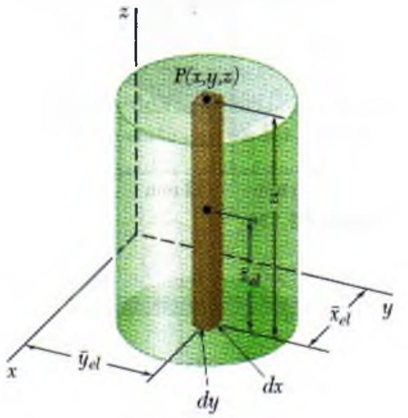
$$\bar{X}\Sigma W = \Sigma \bar{x} W \qquad \bar{Y}\Sigma W = \Sigma \bar{y} W \qquad \bar{Z}\Sigma W = \Sigma \bar{z} W \quad (5.19)$$

Si el cuerpo está hecho de un material homogéneo, su centro de gravedad coincide con el centroide C de su volumen y se escribe [problemas resueltos 5.11 y 5.12]

$$\bar{X}\Sigma V = \Sigma \bar{x} V \qquad \bar{Y}\Sigma V = \Sigma \bar{y} V \qquad \bar{Z}\Sigma V = \Sigma \bar{z} V \quad (5.20)$$

Determinación del centroide por integración

Cuando el volumen está limitado por superficies analíticas, las coordenadas de su centroide se pueden determinar por *integración* [sección 5.12]. Para evitar el cálculo de las integrales triples



$\bar{x}_{el} = x, \; \bar{y}_{el} = y, \; \bar{z}_{el} = \frac{z}{2}$
$dV = z\,dx\,dy$

Figura 5.27

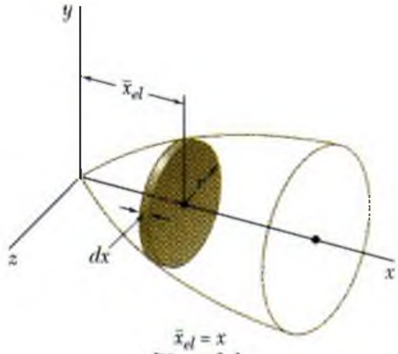
en la ecuación (5.18), se pueden usar elementos de volumen que tienen la forma de filamentos delgados, como se muestra en la figura 5.27. Al representar con $\bar{x}_{el}$, $\bar{y}_{el}$ y $\bar{z}_{el}$ las coordenadas del centroide del elemento dV, se reescriben las ecuaciones (5.18) como

$$\bar{x}V = \int \bar{x}_{el}\, dV \qquad \bar{y}V = \int \bar{y}_{el}\, dV \qquad \bar{z}V = \int \bar{z}_{el}\, dV \quad (5.22)$$

las cuales involucran sólo integrales dobles. Si el volumen tiene *dos planos de simetría*, su centroide C está localizado sobre la línea de intersección de dichos planos. Si se selecciona al eje x de manera que quede a lo largo de esa línea y se divide el volumen en placas delgadas paralelas al plano yz, se puede determinar C a partir de la relación

$$\bar{x}V = \int \bar{x}_{el}\, dV \quad (5.23)$$

realizando una *sola integración* [problema resuelto 5.13]. Para un cuerpo de revolución, dichas placas son circulares y su volumen está dado en la figura 5.28.



$\bar{x}_{el} = x$
$dV = \pi r^2\,dx$

Figura 5.28

Problemas de repaso

5.130 y 5.131 Localice el centroide del área plana mostrada en la figura.

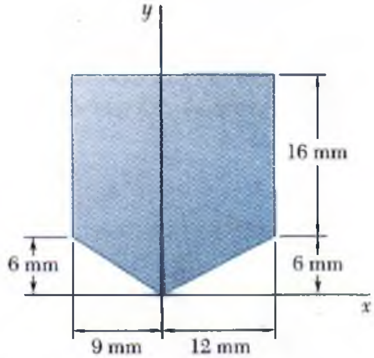


Figura P5.130

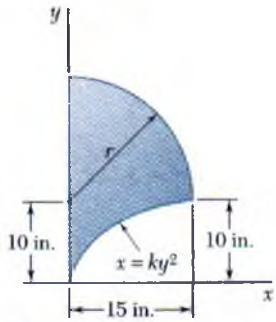


Figura P5.131

5.132 Un alambre delgado y homogéneo se dobla para formar el perímetro de la figura P5.130. Localice el centro de gravedad de la figura de alambre formada de esta manera.

5.133 El alambre homogéneo *ABCD* está doblado como se muestra en la figura y se conecta a una articulación colocada en *C*. Determine la longitud *L* para la cual el tramo *BCD* del alambre se mantiene horizontal.

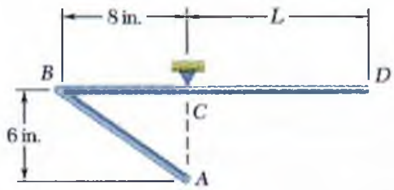


Figura P5.133

5.134 Determine por integración directa el centroide del área mostrada en la figura. Exprese la respuesta en términos de a y h.

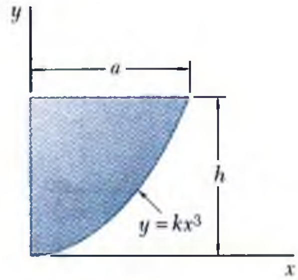


Figura P5.134

5.135 Determine por integración directa el centroide del área mostrada en la figura. Exprese la respuesta en términos de a y b.

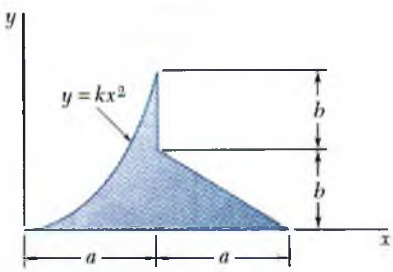


Figura *P5.135*

5.136 Si $R = 12$ in., determine la capacidad, en galones, de la ponchera mostrada en la figura.

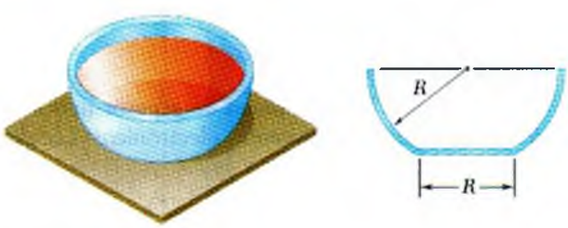


Figura P5.136

***5.137* y 5.138** Para las cargas dadas, determine las reacciones en los apoyos de la viga.

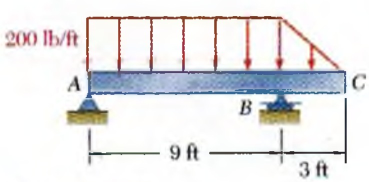


Figura *P5.137*

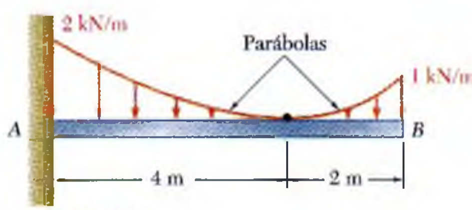


Figura P5.138

5.139 El lado AB del tanque de 9×12 ft se sostiene mediante bisagras instaladas en el fondo A y se mantiene en su lugar por medio de una barra delgada BC. La fuerza máxima de tensión que la barra puede soportar sin fracturarse es de 40 kips, y las especificaciones de diseño requieren que la fuerza en la barra no exceda el 20 por ciento de dicho valor. Si el tanque se llena de agua lentamente, determine la profundidad máxima permisible d que puede tener el agua en el tanque.

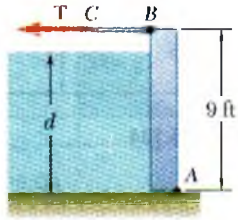


Figura P5.139

5.140 Para el elemento de máquina que se muestra en la figura, determine la coordenada x del centro de gravedad.

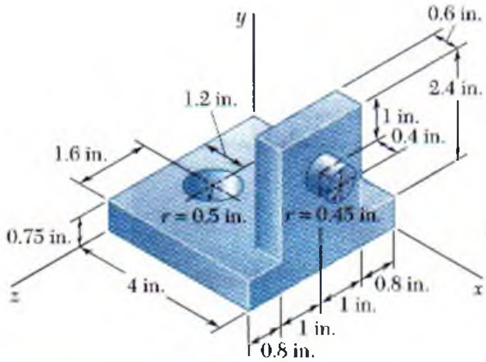


Figura *P5.140*

5.141 A partir de una hoja de metal de espesor uniforme, se forma una ménsula de montaje para componentes electrónicos. Localice el centro de gravedad de la ménsula.

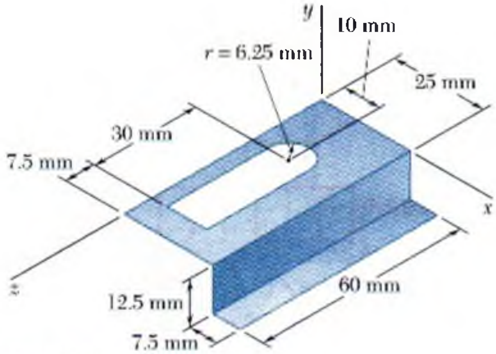


Figura P5.141

Problemas de computadora

5.C1 Determine las coordenadas x y y del centroide del trapezoide mostrado en la figura, si se sabe que $h_1 = a/n^2$ y $h_2 = a/n$. Grafique los valores de $\bar{x}$ y $\bar{y}$ para $1 \leq n \leq 4$ y $a = 6$ in.

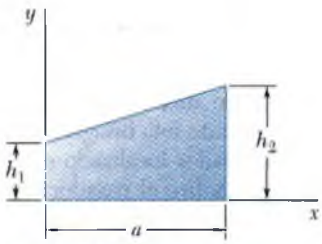


Figura P5.C1

5.C2 Determine la distancia h para la cual el centroide del área sombreada esté tan alto como sea posible por encima de BB'. Grafique la relación h/b como una función de k para $0.125 \leq k \leq 0.875$.

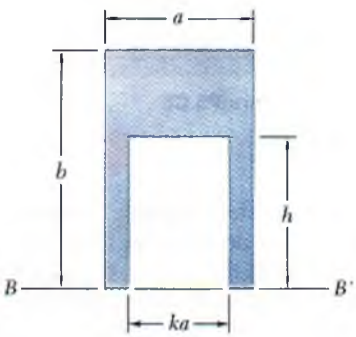


Figura P5.C2

5.C3 Aproxime la enjuta general mostrada en la figura usando una serie de n rectángulos, cada uno con un ancho Δa y de la forma $bcc'b'$, y después use software para calcular las coordenadas del centroide del área. Localice el centroide cuando: *a*) $m = 2$, $a = 4$ in., $h = 4$ in.; *b*) $m = 2$, $a = 4$ in., $h = 25$ in.; *c*) $m = 5$, $a = 4$ in., $h = 4$ in., y *d*) $m = 5$, $a = 4$ in., $h = 25$ in. En cada caso compare las respuestas obtenidas con los valores exactos de $\bar{x}$ y $\bar{y}$ calculados a partir de las fórmulas dadas en la figura 5.8A y determine el porcentaje de error.

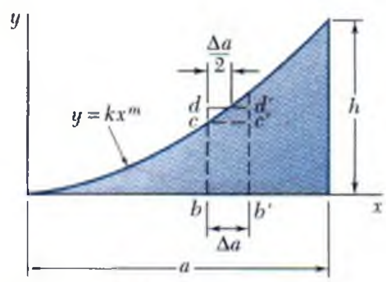


Figura P5.C3

5.C4 Determine el volumen y el área de la superficie del sólido que se obtiene al rotar el área mostrada alrededor del eje y, cuando $a = 80$ mm y a) $n = 1$, b) $n = 2$, c) $n = 3$.

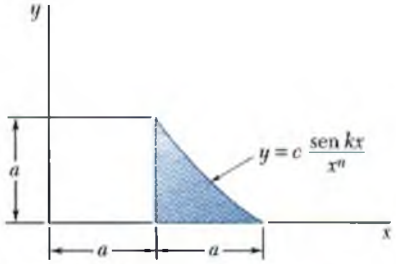


Figura P5.C4

5.C5 La compuerta AB de ancho uniforme w se sostiene en la posición mostrada en la figura mediante una bisagra a lo largo de su extremo superior A y por medio de un pasador localizado en el centro de su extremo inferior B. Determine la fuerza sobre el pasador B como una función de la profundidad del agua d. Grafique la fuerza sobre el pasador B como una función de la profundidad del agua para 0.54 m $\leq d \leq 1.5$ m cuando: a) $w = 0.25$ m, b) $w = 0.50$ m, c) $w = 0.75$ m, d) $w = 1$ m. La densidad del agua es $\rho = 10^3$ kg/m^3.

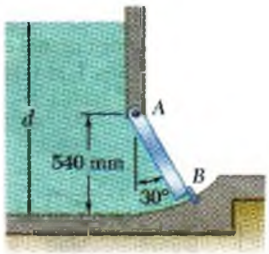


Figura P5.C5

5.C6 Un tanque abierto debe llenarse lentamente con agua. Determine la resultante y la dirección de la fuerza de presión ejercida por el agua sobre una sección del lado ABC del tanque, de 4 ft de ancho, como una función de la profundidad d. Con el software, grafique la fuerza de presión como una función de d para $0 \leq d \leq 10$ ft. El peso específico del agua es 62.4 lb/ft^3.

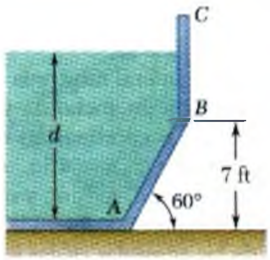


Figura P5.C6

5.C7 En la figura se muestra la sección transversal de un dique de concreto. Para un dique con una sección de 1 m de ancho, grafique la magnitud de la resultante de las fuerzas de reacción ejercidas por el suelo sobre la base AB del dique y de la resultante de las fuerzas de presión ejercidas por el agua sobre la cara BC del dique, como funciones de la profundidad d del agua para $0 \leq d \leq 16$ m. Las densidades del concreto y el agua son, respectivamente, 2.40×10^3 kg/m^3 y 10^3 kg/m^3.

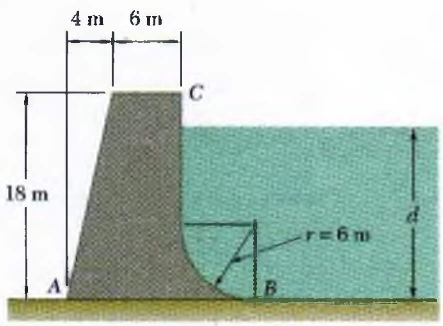


Figura P5.C7

5.C8 Una viga está sometida a la carga mostrada en la figura. Grafique la magnitud de las reacciones verticales en los apoyos A y B como funciones de la distancia a para $0 \leq a \leq 3$ m.

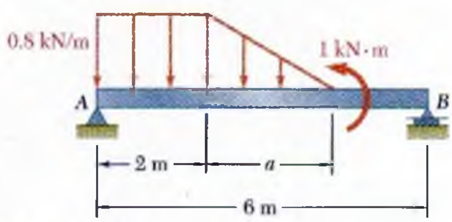


Figura P5.C8

5.C9 La estructura tridimensional mostrada en la figura está fabricada a partir de cinco barras delgadas de acero del mismo diámetro. Con el software determine las coordenadas del centro de gravedad de la estructura. Localice las coordenadas del centro de gravedad cuando: *a*) $h = 40$ ft, $R = 15$ ft, $\alpha = 90°$; *b*) $h = 22$ in., $R = 30$ in., $\alpha = 30°$, y *c*) $h = 70$ ft, $R = 65$ ft, $\alpha = 135°$.

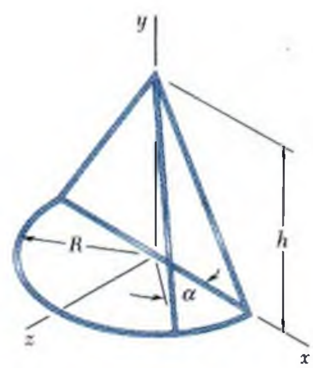


Figura P5.C9

5.C10 Determine la coordenada y del centroide del cuerpo que se muestra en la figura cuando $h = nb$ y $h = n^2b$. Grafique $\overline{y}$ como una función de n para ambos casos usando $1 \leq n \leq 10$ y *a*) $b = 4$ in., *b*) $b = 6$ in., *c*) $b = 8$ in.

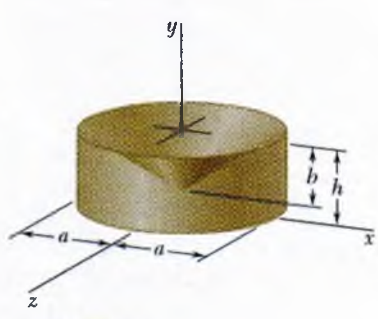


Figura P5.C10

CAPÍTULO 6

Análisis de estructuras



En la fotografía se muestra una armadura de acero de calibre ligero usada para sostener el techo de un edificio. Las armaduras proporcionan una solución práctica y económica a muchos problemas de ingeniería.

ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS

6.1. INTRODUCCIÓN

Los problemas considerados en los capítulos anteriores estuvieron relacionados con el equilibrio de un solo cuerpo rígido y todas las fuerzas involucradas eran externas a este último. A continuación se estudian problemas que tratan sobre el equilibrio de estructuras formadas por varias partes que están conectadas entre sí. Estos problemas, además de determinar las fuerzas externas que actúan sobre la estructura, implican calcular las fuerzas que mantienen unidas a las diversas partes que la constituyen. Desde el punto de vista de la estructura como un todo, estas fuerzas son *fuerzas internas*.

Por ejemplo, considérese la grúa mostrada en la figura 6.1*a*, la cual soporta una carga *W*. La grúa consta de tres vigas *AD*, *CF* y *BE* que están conectadas por medio de pernos sin fricción; la grúa está apoyada por un perno en *A* y un cable *DG*. La figura 6.1*b* representa el diagrama de cuerpo libre de la grúa. Las fuerzas externas que se muestran en el diagrama incluyen al peso **W**, a las dos componentes $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$ de la reacción en *A* y a la fuerza **T** ejercida por el cable en *D*. Las fuerzas internas que mantienen unidas las diversas partes de la grúa no aparecen en el diagrama. Sin embargo, si se desarma la grúa y se dibuja un diagrama de cuerpo libre para cada una de las partes que la constituyen, las fuerzas que mantienen unidas a las tres vigas también estarán representadas puesto que dichas fuerzas son externas desde el punto de vista de cada una de las partes que forman la grúa (figura 6.1*c*).

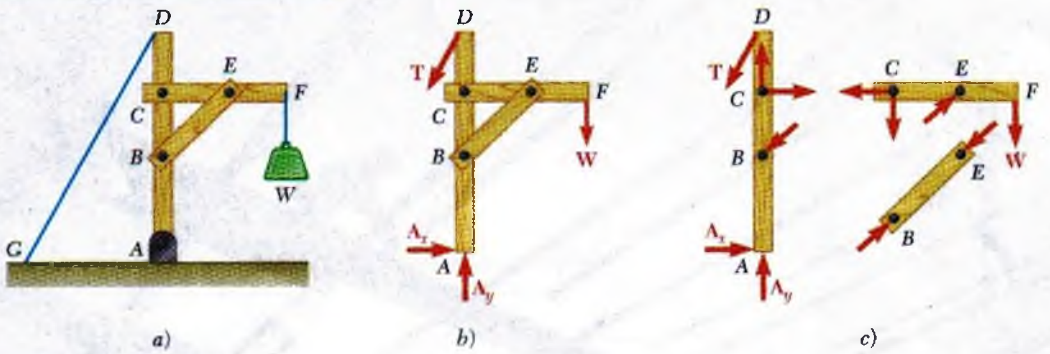


Figura 6.1

Se debe señalar que la fuerza ejercida en *B* por el elemento *BE* sobre el elemento *AD* se ha representado como igual y opuesta a la fuerza ejercida en ese mismo punto por el elemento *AD* sobre el elemento *BE*; la fuerza ejercida en *E* por el elemento *BE* sobre el elemento *CF* se muestra igual y opuesta a la fuerza ejercida por el elemento *CF* sobre el elemento *BE* y las componentes de la fuerza ejercida en *C* por el elemento *CF* sobre el elemento *AD* se presentan iguales y opuestas a las componentes de la fuerza ejercida por el elemento *AD* sobre el elemento *CF*. Lo anterior está sujeto a la tercera ley de Newton, la cual establece que *las fuerzas de acción y reacción entre cuerpos en contacto tienen la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos*. Como se señaló en el capítulo 1, esta ley, que está basada en la evidencia experimental, es uno de los seis principios fundamentales de la mecánica elemental y su aplicación es esencial para la solución de problemas que involucran a cuerpos que están conectados entre sí.

En este capítulo se considerarán tres categorías amplias de estructuras de ingeniería.

1. *Armaduras*, las cuales están diseñadas para soportar cargas y por lo general son estructuras estacionarias que están totalmente restringidas. Las armaduras consisten exclusivamente de elementos rectos que están conectados en nodos localizados en los extremos de cada elemento. Por tanto, los elementos de una armadura son *elementos sujetos a dos fuerzas*, esto es, elementos sobre los cuales actúan dos fuerzas iguales y opuestas que están dirigidas a lo largo del elemento.
2. *Armazones*, los cuales están diseñados para soportar cargas, se usan también como estructuras estacionarias que están totalmente restringidas. Sin embargo, como en el caso de la grúa de la figura 6.1, los armazones siempre contienen por lo menos un *elemento sujeto a varias fuerzas*, esto es, un elemento sobre el cual actúan tres o más fuerzas que, en general, no están dirigidas a lo largo del elemento.
3. *Máquinas*, las cuales están diseñadas para transmitir y modificar fuerzas, son estructuras que contienen partes en movimiento. Las máquinas, al igual que los armazones, siempre contienen por lo menos un elemento sujeto a varias fuerzas.



Fotografía 6.1 En la foto se muestra una conexión con juntas de pasador sobre el acceso al puente de la Bahía de San Francisco y Oakland.

ARMADURAS

6.2. DEFINICIÓN DE UNA ARMADURA

La armadura es uno de los principales tipos de estructuras que se usan en la ingeniería. Ésta proporciona una solución práctica y económica para muchas situaciones de ingeniería, en especial para el diseño de puentes y edificios. En la figura 6.2*a* se muestra una armadura típica. Una armadura consta de elementos rectos que se conectan en nodos. Los elementos de la armadura sólo están conectados en sus extremos; por tanto, ningún elemento continúa más allá de un nodo. Por ejemplo, en la figura 6.2*a* no existe un elemento *AB*, en su lugar existen dos elementos distintos *AD* y *DB*. La mayoría de las estructuras reales están hechas a partir de varias armaduras unidas entre sí para formar una armadura espacial. Cada armadura está diseñada para soportar aquellas cargas que actúan en su plano y, por tanto, pueden ser tratadas como estructuras bidimensionales.

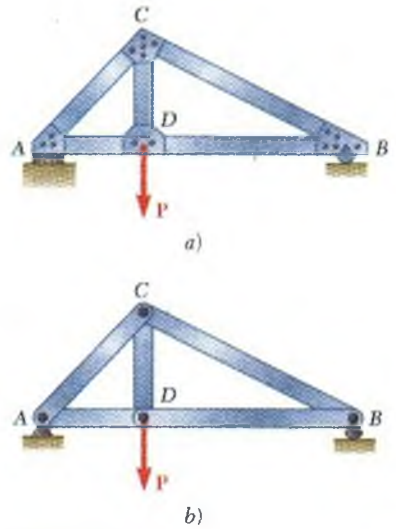


Figura 6.2

Los elementos de una armadura, por lo general, son delgados y sólo pueden soportar cargas laterales pequeñas; por eso todas las cargas deben estar aplicadas en los nodos y no sobre los elementos. Cuando se va a aplicar una carga concentrada entre dos nodos o cuando la armadura debe soportar una carga distribuida, como en el caso de la armadura de un puente, debe proporcionarse un sistema de piso, el cual, mediante el uso de travesaños y largueros, transmite la carga a los nodos (figura 6.3).

Los pesos de los elementos de la armadura los cargan los nodos, aplicándose la mitad del peso de cada elemento a cada uno de los nodos a los que éste se conecta. A pesar de que en realidad los elementos están unidos entre sí por medio de conexiones romachadas o soldadas, es común suponer que los elementos están conectados por medio de pernos; por tanto, las fuerzas que actúan en cada uno de los extremos del elemento se reducen a una sola fuerza y no existe un par. De

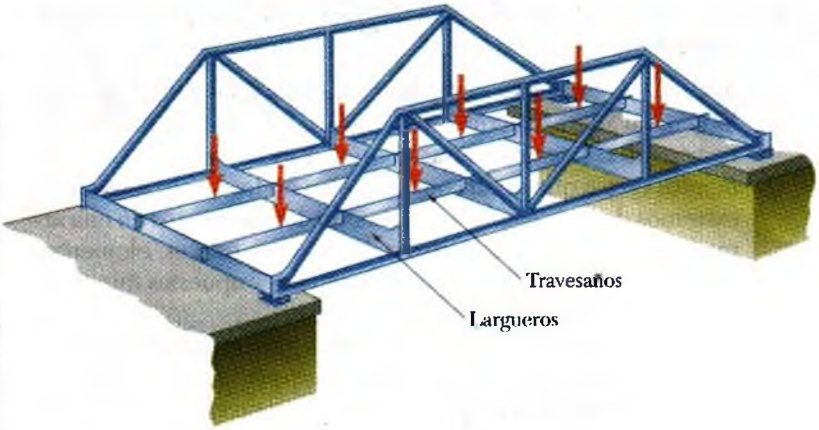


Figura 6.3

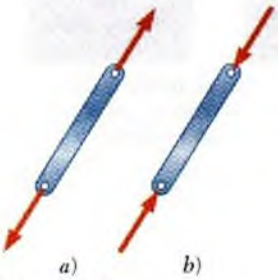


Figura 6.4

esta forma se supone que las únicas fuerzas que actúan sobre un elemento de la armadura son una sola fuerza en cada uno de los extremos del elemento. Entonces, cada elemento puede tratarse como sometido a la acción de dos fuerzas, mientras que la armadura, como un todo, puede considerarse como un grupo de pernos y elementos sujetos a dos fuerzas (figura 6.2*b*). Sobre un elemento individual pueden actuar fuerzas, como las que se muestran en cualquiera de los croquis de la figura 6.4. En la figura 6.4*a* las fuerzas tienden a estirar al elemento y éste está en tensión; en la figura 6.4*b* las fuerzas tienden a comprimir al elemento y el mismo está en compresión. En la figura 6.5 se muestran algunas armaduras típicas.

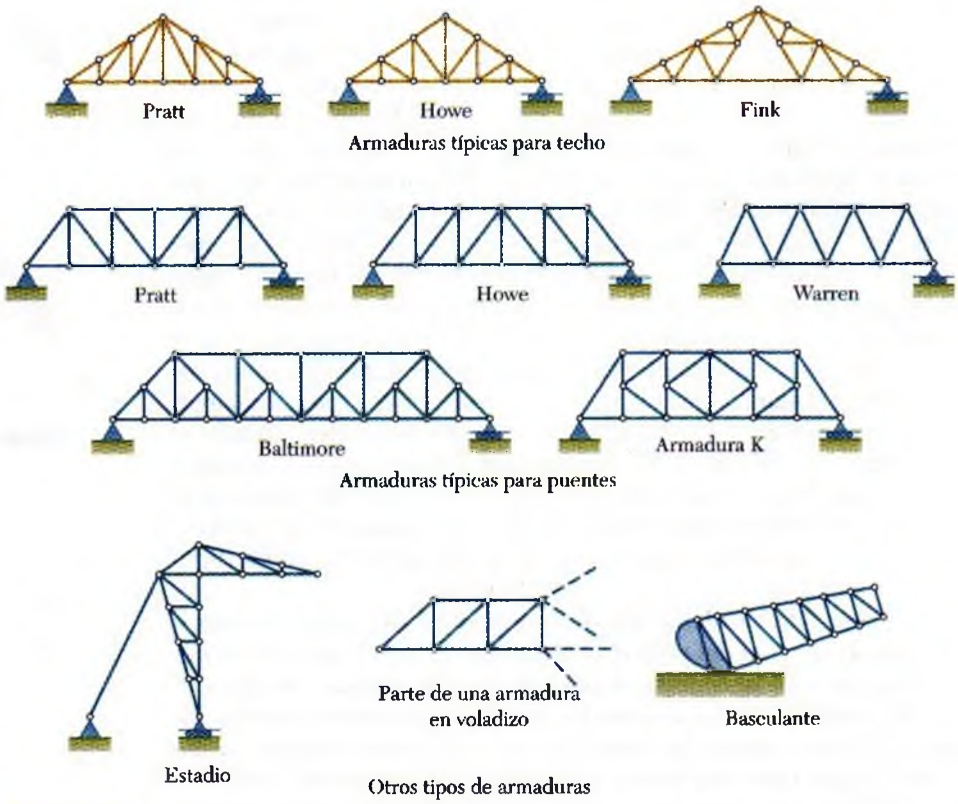


Figura 6.5

6.3. ARMADURAS SIMPLES

Considere la armadura mostrada en la figura 6.6*a*, la cual está constituida por cuatro elementos conectados por medio de pernos en *A*, *B*, *C* y *D*. Si se aplica una carga en *B*, la armadura se deformará hasta perder por completo su forma original. Por el contrario, la armadura de la figura 6.6*b*, la cual está constituida por tres elementos conectados por medio de pernos en *A*, *B* y *C*, sólo se deformará ligeramente bajo la acción de una carga aplicada en *B*. La única deformación posible para esta armadura es la que involucra pequeños cambios en la longitud de sus elementos. Por tanto, se dice que la armadura de la figura 6.6*b* es una *armadura rígida*, aquí el término rígida se ha empleado para indicar que la armadura *no se colapsará*.

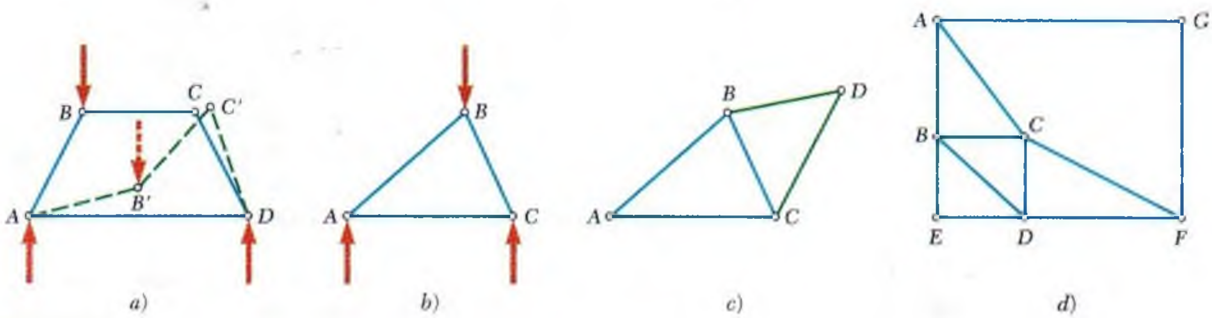


Figura 6.6

Como se muestra en la figura 6.6*c*, se puede obtener una armadura rígida más grande agregando dos elementos *BD* y *CD* a la armadura triangular básica de la figura 6.6*b*. Este procedimiento se puede repetir tantas veces como se desee y la armadura resultante será rígida si cada vez que se agregan dos nuevos elementos, éstos se unen a dos nodos ya existentes y además se conectan entre sí en un nuevo nodo.[1] Una armadura que se puede construir de esta forma recibe el nombre de *armadura simple*.

Se debe señalar que una armadura simple no está hecha necesariamente a partir de triángulos. Por ejemplo, la armadura de la figura 6.6*d* es una armadura simple que fue construida a partir del triángulo *ABC* y se agregaron sucesivamente los nodos *D*, *E*, *F* y *G*. Por otra parte, las armaduras rígidas no siempre son armaduras simples, incluso cuando parecen estar hechas de triángulos. Por ejemplo, las armaduras de Fink y Baltimore mostradas en la figura 6.5, no son armaduras simples, puesto que no pueden construirse a partir de un solo triángulo en la forma descrita en el párrafo anterior. Todas las demás armaduras que se muestran en la figura 6.5 son armaduras simples, lo cual se puede verificar fácilmente. (Para la armadura K se debe comenzar con uno de los triángulos centrales.)

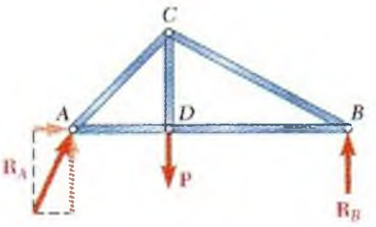
En la figura 6.6 se observa que la armadura triangular básica de la figura 6.6*b* tiene tres elementos y tres nodos. La armadura de la figura 6.6*c* tiene dos elementos y un nodo adicionales, esto es, cinco elementos y cuatro nodos en total. Si se tiene presente que cada vez que se agregan dos nuevos elementos el número de nodos se incrementa en uno, se encuentra que en una armadura simple el número total de elementos es $m = 2n - 3$, donde n es el número total de nodos.



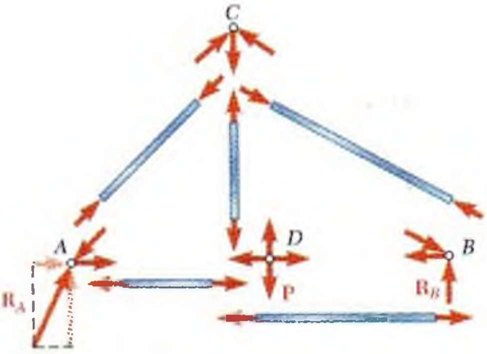
Fotografía 6.2 Dos armaduras K se usaron como los principales componentes del puente móvil que se muestra en la foto, el cual se movía por encima de un gran montón de mineral de reserva. El cubo que se encuentra debajo de las armaduras levantaba mineral y lo redepositaba hasta que el mineral estuvo completamente mezclado. Después, el mineral se envió el molino para incorporarlo a un proceso de producción de acero.

[1]Los tres nodos no deben ser colineales.

6.4. ANÁLISIS DE ARMADURAS MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS NODOS



a)



b)

Figura 6.7



Fotografía 6.3 Las armaduras para techo, como las que se muestran en la foto, requieren apoyo sólo en los extremos. Gracias a esto es posible realizar construcciones con grandes áreas libres de obstáculos en el piso.

En la sección 6.2 se vio que una armadura puede ser considerada como un grupo de pernos y elementos sometidos a la acción de dos fuerzas. Por tanto, la armadura de la figura 6.2, cuyo diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 6.7*a*, se puede desarmar y dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada perno y para cada elemento (figura 6.7*b*). Cada elemento está sometido a la acción de dos fuerzas, una en cada uno de sus extremos; estas fuerzas tienen la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos (sección 4.6). Además, la tercera ley de Newton indica que las fuerzas de acción y reacción entre un elemento y un perno son iguales y opuestas. Por tanto, las fuerzas ejercidas por un elemento sobre los dos pernos a los cuales se conecta deben estar dirigidos a lo largo de ese elemento y deben ser iguales y opuestas. Con frecuencia se hace referencia a la magnitud común de las fuerzas ejercidas por un elemento sobre los dos pernos a los que se conecta como la *fuerza en el elemento* bajo consideración, a pesar de que esta cantidad en realidad es un escalar. Como las líneas de acción de todas las fuerzas internas en una armadura son conocidas, el análisis de una armadura se reduce a calcular las fuerzas en los elementos que la constituyen y a determinar si cada uno de dichos elementos está en tensión o en compresión.

Como la armadura en su totalidad está en equilibrio, cada perno debe estar en equilibrio. El que un perno esté en equilibrio se expresa dibujando su diagrama de cuerpo libre y escribiendo dos ecuaciones de equilibrio (sección 2.9). Por tanto, si una armadura tiene n pernos, habrá $2n$ ecuaciones disponibles, las cuales podrán resolverse para $2n$ incógnitas. En el caso de una armadura simple, se tiene que $m = 2n - 3$, esto es, $2n = m + 3$, y el número de incógnitas que se pueden determinar a partir de los diagramas de cuerpo libre de los pernos es $m + 3$. Esto significa que las fuerzas en todos los elementos, las dos componentes de la reacción $\mathbf{R}_A$ y la reacción $\mathbf{R}_B$ se determinan considerando los diagramas de cuerpo libre de los pernos.

El hecho de que la armadura como un todo sea un cuerpo rígido que está en equilibrio, se puede utilizar para escribir tres ecuaciones adicionales que involucran a las fuerzas mostradas en el diagrama de cuerpo libre de la figura 6.7*a*. Puesto que estas ecuaciones no contienen ninguna información nueva, son independientes de las ecuaciones asociadas con los diagramas de cuerpo libre de los pernos. Sin embargo, las tres ecuaciones en cuestión se pueden emplear para determinar las componentes de las reacciones en los apoyos. El arreglo de pernos y elementos en una armadura simple es tal que siempre será posible encontrar un nodo que involucre únicamente a dos fuerzas desconocidas. Estas fuerzas se determinan por medio de los métodos de la sección 2.11 y sus valores se transfieren a los nodos adyacentes tratándolos como cantidades conocidas en dichos nodos, este procedimiento se repite hasta determinar todas las fuerzas desconocidas.

Como ejemplo se analiza la armadura de la figura 6.7, en la que se considera sucesivamente el equilibrio de cada perno; se inicia con el nodo en el cual sólo dos fuerzas son desconocidas. En dicha armadura todos los pernos están sujetos a cuando menos tres fuerzas desconocidas. Por tanto, primero se deben determinar las reacciones en los apoyos considerando a toda la armadura como cuerpo libre y utilizando las ecuaciones de equilibrio para un cuerpo rígido. De esta forma, $\mathbf{R}_A$ es vertical y se determinan las magnitudes de $\mathbf{R}_A$ y $\mathbf{R}_B$.

Entonces el número de fuerzas desconocidas en el nodo A se reduce a dos y estas fuerzas se pueden determinar considerando el equilibrio del perno A. La reacción $\mathbf{R}_A$ y las fuerzas $\mathbf{F}_{AC}$ y $\mathbf{F}_{AD}$ ejercidas sobre el perno A por los elementos AC y AD, respectivamente, deben formar un triángulo de fuerzas. Primero se dibuja $\mathbf{R}_A$ (figura 6.8); luego si $\mathbf{F}_{AC}$ y $\mathbf{F}_{AD}$ están dirigidas a lo largo de AC y AD, respectivamente, se completa el triángulo de fuerzas y se determina la magnitud y el sentido de $\mathbf{F}_{AC}$ y $\mathbf{F}_{AD}$. Las magnitudes F_{AC} y F_{AD} representan las fuerzas en los elementos AC y AD. Como $\mathbf{F}_{AC}$ está dirigida hacia abajo y hacia la izquierda, esto es, *hacia* el nodo A, el elemento AC empuja el perno A y, por consiguiente, dicho elemento está en compresión. Como $\mathbf{F}_{AD}$ está dirigida *alejándose* del nodo A, el elemento AD jala al perno A y, por consiguiente, dicho elemento está en tensión.

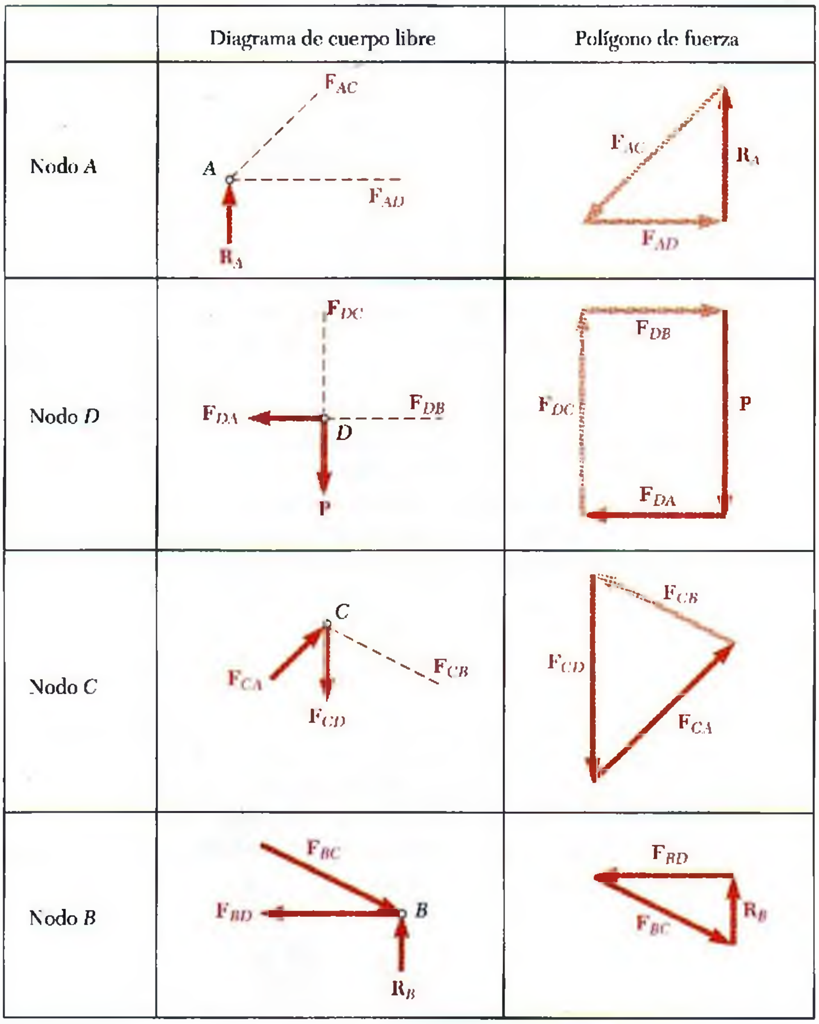


Figura 6.8

Ahora se procede a considerar el nodo D en el cual sólo dos fuerzas, $\mathbf{F}_{DC}$ y $\mathbf{F}_{DB}$, aún son desconocidas. Las otras fuerzas que actúan sobre dicho nodo son la carga $\mathbf{P}$, la cual es un dato y la fuerza $\mathbf{F}_{DA}$ ejercida sobre el perno por el elemento AD. Como se señaló antes, esta última fuerza es igual y opuesta a la fuerza $\mathbf{F}_{AD}$ ejercida por el mismo elemento sobre el perno A. Como se muestra en la figura 6.8, se puede dibujar el polígono de fuerzas correspondiente al nodo D y deter-

minar las fuerzas $\mathbf{F}_{DC}$ y $\mathbf{F}_{DB}$ a partir de dicho polígono. Sin embargo, cuando están involucradas más de tres fuerzas, es más conveniente resolver las ecuaciones de equilibrio $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ para las dos fuerzas desconocidas. Como se encuentra que ambas fuerzas se alejan del nodo D, los elementos DC y DB jalan al perno y se concluye que ambos están en tensión.

Después se considera el nodo C, cuyo diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 6.8. Se observa que tanto $\mathbf{F}_{CD}$ como $\mathbf{F}_{CA}$ son conocidas a partir del análisis de los nodos anteriores y que sólo $\mathbf{F}_{CB}$ es desconocida. Como el equilibrio de cada perno proporciona suficiente información para determinar dos incógnitas, se obtiene una comprobación del análisis realizado en este nodo. Se dibuja el triángulo de fuerzas y se determina la magnitud y el sentido de $\mathbf{F}_{CB}$. Como $\mathbf{F}_{CB}$ está dirigida hacia el nodo C, el elemento CB empuja al perno C y, por tanto, está en compresión. La comprobación se obtiene al verificar que la fuerza $\mathbf{F}_{CB}$ y el elemento CB son paralelos.

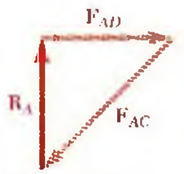


Figura 6.9

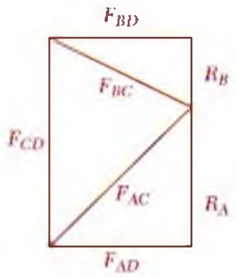


Figura 6.10

En el nodo B todas las fuerzas son conocidas. Puesto que el perno correspondiente está en equilibrio, el triángulo de fuerzas debe cerrar, obteniéndose de esta forma una comprobación adicional del análisis realizado.

Es importante señalar que los polígonos de fuerza mostrados en la figura 6.8 no son únicos. Cada uno de ellos podría reemplazarse por una configuración alterna. Por ejemplo, el triángulo de fuerzas correspondiente al nodo A podría dibujarse como el de la figura 6.9. El triángulo mostrado en la figura 6.8 se obtuvo dibujando las tres fuerzas $\mathbf{R}_A$, $\mathbf{F}_{AC}$ y $\mathbf{F}_{AD}$ uniendo la parte terminal de una con la parte inicial de otra, en el orden en el que se encuentran sus líneas de acción, al realizar un desplazamiento en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj, alrededor del nodo A. Los otros polígonos de fuerzas en la figura 6.8 se dibujaron de la misma forma, por ello se pueden reunir en un solo diagrama, como se ilustra en la figura 6.10. Un diagrama de este tipo, conocido como *diagrama de Maxwell*, facilita en gran medida el *análisis gráfico* de problemas que involucran armaduras.

*6.5. NODOS BAJO CONDICIONES ESPECIALES DE CARGA

Observe la figura 6.11*a*, en la cual el nodo conecta a cuatro elementos que están ubicados sobre dos líneas rectas que se intersecan. El diagrama de cuerpo libre de la figura 6.11*b* muestra que el perno A está sujeto a dos pares de fuerzas directamente opuestas. Por tanto, el polígono de fuerzas debe ser un paralelogramo (figura 6.11*c*) y *las fuerzas en elementos opuestos deben ser iguales*.

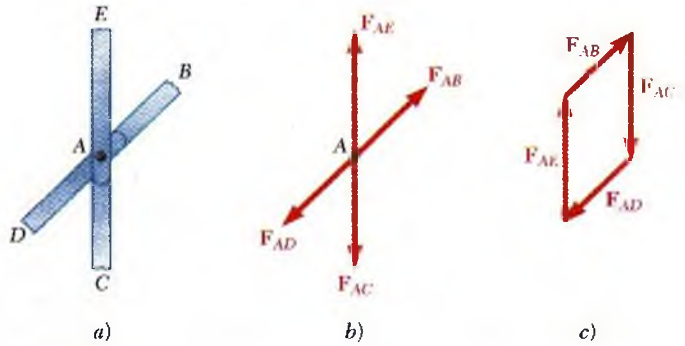


Figura 6.11

A continuación considere la figura 6.12*a*, en la cual el nodo mostrado conecta tres elementos y soporta una carga **P**. Dos de los elementos se encuentran ubicados sobre la misma línea y la carga **P** actúa a lo largo del tercer elemento. El diagrama de cuerpo libre del perno *A* y el polígono de fuerzas correspondiente serán como se muestran en la figura 6.11*b* y *c*, reemplazando a $\mathbf{F}_{AE}$ por la carga **P**. Por tanto, *las fuerzas en los dos elementos opuestos deben ser iguales y la fuerza en el otro elemento debe ser igual a P*. En la figura 6.12*b* se muestra un caso de especial interés, en el que no hay una fuerza externa aplicada en el nodo, se tiene que $P = 0$, y la fuerza en el elemento *AC* es igual a cero. Por tanto, se dice que el elemento *AC* es un *elemento de fuerza cero*.

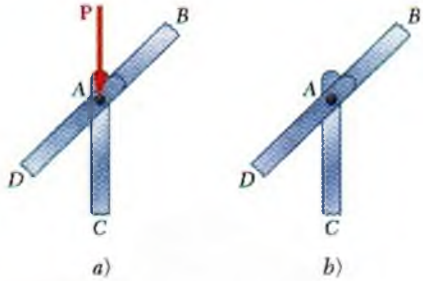


Figura 6.12

Considere ahora un nodo que conecta sólo dos elementos. A partir de la sección 2.9 se sabe que una partícula sobre la que actúan dos fuerzas estará en equilibrio si las dos fuerzas tienen la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos. En el caso del nodo de la figura 6.13*a*, el cual conecta a dos elementos *AB* y *AD* que se encuentran sobre la misma línea, *las fuerzas en los dos elementos deben ser iguales* para que el perno *A* esté en equilibrio. En el caso del nodo de la figura 6.13*b*, el perno *A* no puede estar en equilibrio a menos que las fuerzas en ambos elementos sean iguales a cero. Por tanto, los elementos conectados como se muestra en la figura 6.13*b* deben ser *elementos de fuerza cero*.

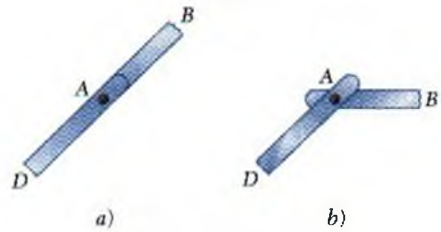


Figura 6.13

La identificación de los nodos que se encuentran bajo las condiciones especiales de carga mencionadas en los párrafos anteriores, permitirá que el análisis de una armadura se lleve a cabo más rápido. Por ejemplo, considere una armadura tipo Howe cargada, como se muestra en la figura 6.14; todos los elementos representados por líneas en color serán reconocidos como elementos de fuerza cero. El nodo *C* conecta a tres elementos, dos de los cuales se encuentran sobre la misma línea y no está sujeto a cargas externas; por tanto, el elemento *BC* es un elemento de fuerza cero. Si se aplica el mismo razonamiento al nodo *K*, se encuentra que el elemento *JK* también es un elemento de fuerza cero. Ahora, el nodo *J* está en la misma situación que los nodos *C* y *K*, entonces el elemento *IJ* debe ser un elemento de fuerza cero. La observación de los nodos *C*, *J* y *K* revela que las fuerzas en los elementos *AC* y *CE* son iguales, las fuerzas en los elementos *HJ* y *JL* son también iguales, así como las fuerzas en los elementos *IK* y *KL*. Regresando la atención al nodo *I*, donde la carga de 20 kN y el elemento *HI* son colineales, se observa que la fuerza en el elemento *HI* es de 20 kN (tensión) y que las fuerzas en los elementos *GI* e *IK* son iguales. De esta manera, se concluye que las fuerzas en los elementos *GI*, *IK* y *KL* son iguales.

Se debe observar que las condiciones descritas en el párrafo anterior no pueden aplicarse a los nodos *B* y *D* de la figura 6.14 y sería erróneo suponer que la fuerza en el elemento *DE* es de 25 kN o que las fuerzas en los elementos *AB* y *BD* son iguales. Las fuerzas en estos elementos y en los restantes se encuentran con el análisis de los nodos *A*, *B*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* y *L* en la forma habitual. Por tanto, hasta que se esté familiarizado con las condiciones que permiten aplicar las reglas establecidas en esta sección, se debe dibujar el diagrama de cuerpo libre de todos los pernos y escribir las ecuaciones de equilibrio correspondientes (o dibujar los polígonos de fuerzas correspondientes) sin importar si los medios considerados se encuentran bajo una de las condiciones especiales de carga que se describieron anteriormente.

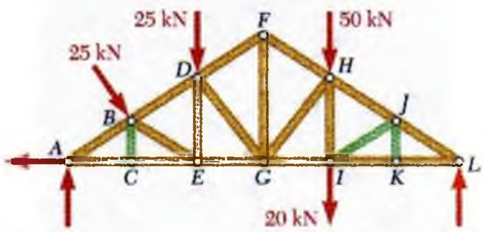


Figura 6.14

Un comentario final en relación con los elementos de fuerza cero: estos elementos no son inútiles. Por ejemplo, a pesar de que los elementos de fuerza cero de la figura 6.14 no soportan ninguna carga bajo las condiciones mostradas, es probable que los mismos elementos podrían soportar alguna si se cambiaran las condiciones de carga. Además, incluso en el caso considerado, estos elementos son necesarios para soportar el peso de la armadura y para mantener a esta última con la forma deseada.

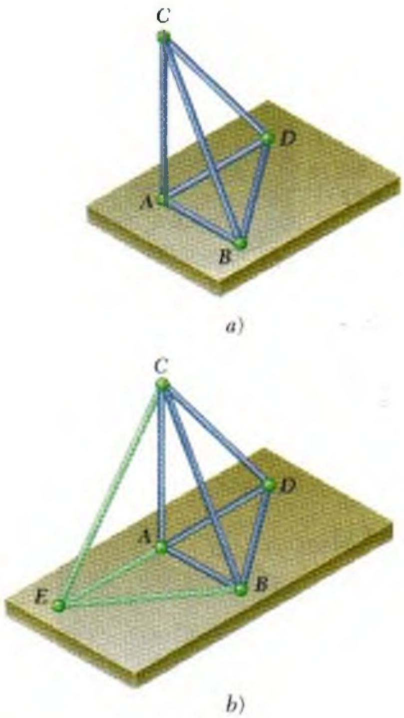


Figura 6.15

*6.6. ARMADURAS EN EL ESPACIO O ESPACIALES

Cuando varios elementos rectos se unen en sus extremos para formar una configuración tridimensional, la estructura obtenida recibe el nombre de *armadura en el espacio o espacial.*

En la sección 6.3 se estableció que la mayoría de las armaduras rígidas bidimensionales elementales consistían de tres elementos unidos en sus extremos para formar los lados de un triángulo; al agregar dos elementos a esta configuración básica y conectándolos en un nuevo nodo, se obtiene una estructura rígida más grande, la cual fue definida como una armadura simple. En forma similar, la armadura rígida básica en el espacio está constituida por seis elementos unidos en sus extremos para formar los lados de un tetraedro *ABCD* (figura 6.15*a*). Si se agregan tres elementos a esta configuración básica, como los elementos *AE*, *BE* y *CE*, uniéndolos a los tres nodos existentes y conectándolos en un nuevo nodo,[†] se puede obtener una estructura rígida más grande, la cual se define como una *armadura simple en el espacio* (figura 6.15*b*). Observe que el tetraedro básico tiene seis elementos y cuatro nodos y que cada vez que se agregan tres elementos el número de nodos se incrementa en uno, se concluye que en una armadura espacial simple el número total de elementos es $m = 3n - 6$, donde n es el número total de nodos.

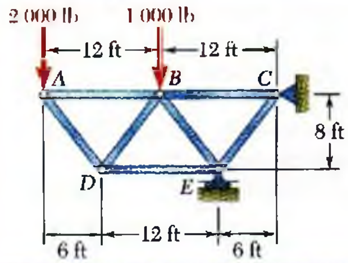
Si una armadura espacial debe tener restricción completa y si las reacciones en sus apoyos deben ser estáticamente determinadas, los apoyos deben consistir en una combinación de bolas, rodillos y rótulas que proporcionen un total de seis reacciones desconocidas (véase sección 4.9). Estas reacciones desconocidas se determinan al resolver las seis ecuaciones que expresan que la armadura tridimensional está en equilibrio.

A pesar de que los elementos de una armadura en el espacio están unidos por conexiones soldadas o remachadas, se supone que cada nodo consiste en una conexión tipo rótula. Por tanto, no se aplicará ningún par a los elementos de la armadura y cada elemento puede tratarse como un elemento sometido a la acción de dos fuerzas. Las condiciones de equilibrio para cada nodo estarán expresadas por las tres ecuaciones $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma F_z = 0$. Entonces, en el caso de una armadura simple en el espacio que contiene n nodos, escribir las condiciones de equilibrio para cada nodo proporcionará un total de $3n$ ecuaciones. Como $m = 3n - 6$, estas ecuaciones serán suficientes para determinar todas las fuerzas desconocidas (las fuerzas en los m elementos y las seis reacciones en los apoyos). Sin embargo, para evitar la necesidad de resolver ecuaciones simultáneas, se debe tener cuidado en seleccionar nodos en un orden tal que ninguno involucre más de tres fuerzas desconocidas.



Fotografía 6.4 Las armaduras tridimensionales o espaciales se usan para las torres de transmisión de energía eléctrica y señales en estructuras de techo y para aplicaciones a naves espaciales, como en los componentes de la *Estación Espacial Internacional.*

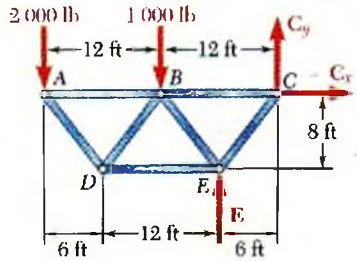
[†]Los cuatro nodos no deben estar localizados en un plano.



PROBLEMA RESUELTO 6.1

Con el uso del método de los nodos, determine la fuerza en cada uno de los elementos de la armadura mostrada.

SOLUCIÓN



Cuerpo libre: armadura completa. Se dibuja un diagrama de cuerpo libre de toda la armadura. Las fuerzas que actúan en este cuerpo libre consisten en las cargas aplicadas y en las reacciones en C y en E. Se escriben las ecuaciones de equilibrio siguientes.

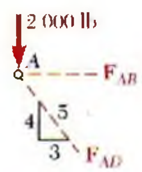
$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0$: $\quad (2\,000 \text{ lb})(24 \text{ ft}) + (1\,000 \text{ lb})(12 \text{ ft}) - E(6 \text{ ft}) = 0$

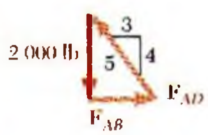
$E = +10\,000 \text{ lb} \qquad \mathbf{E} = 10\,000 \text{ lb}\uparrow$

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0$: $\qquad \mathbf{C}_x = 0$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$: $\quad -2\,000 \text{ lb} - 1\,000 \text{ lb} + 10\,000 \text{ lb} + C_y = 0$

$C_y = -7\,000 \text{ lb} \qquad \mathbf{C}_y = 7\,000 \text{ lb}\downarrow$



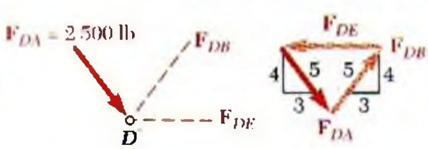


Cuerpo libre: nodo A. El nodo sujeto a dos fuerzas desconocidas, esto es, a las fuerzas ejercidas por los elementos AB y AD. Se usa un triángulo de fuerzas para determinar $\mathbf{F}_{AB}$ y $\mathbf{F}_{AD}$. Se observa que el elemento AB jala al nodo y, por tanto, dicho elemento está en tensión. Además, el elemento AD empuja al nodo y, por tanto, dicho elemento está en compresión. Las magnitudes de las dos fuerzas se obtienen a partir de la proporción

$$\frac{2\,000 \text{ lb}}{4} = \frac{F_{AB}}{3} = \frac{F_{AD}}{5}$$

$F_{AB} = 1\,500 \text{ lb } T$ ◀

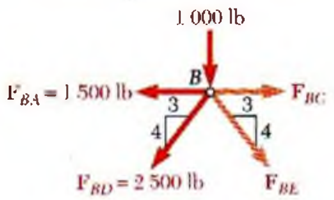
$F_{AD} = 2\,500 \text{ lb } C$ ◀



Cuerpo libre: nodo D. Como la fuerza ejercida por el elemento AD ya se determinó, ahora sólo se tienen dos incógnitas involucradas con este nodo. De nuevo se usa un triángulo de fuerzas para determinar las fuerzas desconocidas en los elementos DB y DE.

$F_{DB} = F_{DA} \qquad F_{DB} = 2\,500 \text{ lb } T$ ◀

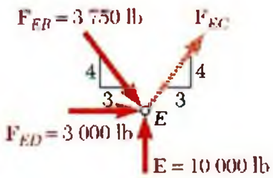
$F_{DE} = 2(\frac{3}{5})F_{DA} \qquad F_{DE} = 3\,000 \text{ lb } C$ ◀



Cuerpo libre: nodo *B*. Como en este nodo actúan más de tres fuerzas, se determinan las dos fuerzas desconocidas $\mathbf{F}_{BC}$ y $\mathbf{F}_{BE}$ resolviendo las ecuaciones de equilibrio $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$. De manera arbitraria se supone que ambas fuerzas desconocidas actúan hacia fuera del nodo, esto es, que los elementos están en tensión. El valor positivo obtenido para F_{BC} indica que la suposición hecha fue correcta, por tanto, el elemento *BC* está en tensión. El valor negativo de F_{BE} indica que la suposición hecha fue incorrecta, por tanto, el elemento *BE* está en compresión.

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \qquad -1\,000 - \tfrac{4}{5}(2\,500) - \tfrac{4}{5}F_{BE} = 0$$
$$F_{BE} = -3\,750 \text{ lb} \qquad F_{BE} = 3\,750 \text{ lb } C \quad ◀$$

$$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0: \qquad F_{BC} - 1\,500 - \tfrac{3}{5}(2\,500) - \tfrac{3}{5}(3\,750) = 0$$
$$F_{BC} = +5\,250 \text{ lb} \qquad F_{BC} = 5\,250 \text{ lb } T \quad ◀$$

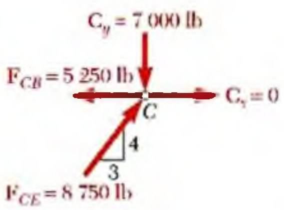


Cuerpo libre: nodo *E*. Se supone que la fuerza desconocida $\mathbf{F}_{EC}$ actúa hacia fuera del nodo. Si se suman las componentes *x*, se escribe

$$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0: \qquad \tfrac{3}{5}F_{EC} + 3\,000 + \tfrac{3}{5}(3\,750) = 0$$
$$F_{EC} = -8\,750 \text{ lb} \qquad F_{EC} = 8\,750 \text{ lb } C \quad ◀$$

Al sumar las componentes *y*, se obtiene una comprobación de los cálculos realizados

$$+\uparrow\Sigma F_y = 10\,000 - \tfrac{4}{5}(3\,750) - \tfrac{4}{5}(8\,750)$$
$$= 10\,000 - 3\,000 - 7\,000 = 0 \quad \text{(queda comprobado)}$$



Cuerpo libre: nodo *C*. Con los valores de $\mathbf{F}_{CB}$ y $\mathbf{F}_{CE}$, calculados previamente, se pueden determinar las reacciones $\mathbf{C}_x$ y $\mathbf{C}_y$ considerando el equilibrio de este nodo. Como dichas reacciones ya se determinaron a partir del equilibrio de toda la armadura, se obtendrán dos verificaciones de los cálculos realizados. También se pueden usar los valores calculados de todas las fuerzas que actúan sobre el nodo (fuerzas en los elementos y reacciones) y comprobar que éste se encuentra en equilibrio:

$$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = -5\,250 + \tfrac{3}{5}(8\,750) = -5\,250 + 5\,250 = 0 \quad \text{(queda comprobado)}$$
$$+\uparrow\Sigma F_y = -7\,000 + \tfrac{4}{5}(8\,750) = -7\,000 + 7\,000 = 0 \quad \text{(queda comprobado)}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se aprendió a utilizar el *método de los nodos* para determinar las fuerzas en los elementos de una *armadura simple*, esto es, en una armadura que se puede construir a partir de una armadura triangular básica a la que se agregan dos nuevos elementos a la vez conectados a un nuevo nodo. Se debe observar que el análisis de una *armadura simple* siempre puede llevarse a cabo por el método de los nodos.

La solución constará de los siguientes pasos:

1. ***Dibujar un diagrama de cuerpo libre de toda la armadura*** y utilizarlo para determinar las reacciones en los apoyos.

2. ***Es importante señalar que la selección del primer nodo no es única.*** Una vez que se han determinado las reacciones en los apoyos de la armadura, se selecciona cualquiera de dos nodos como punto de partida para el análisis. En el problema resuelto 6.1 se comenzó en el nodo A y se procedió, consecutivamente, con los nodos D, B, E y C; sin embargo, también se pudo haber comenzado en el nodo C, procediendo después, consecutivamente, con los nodos E, B, D y A. Por otra parte, una vez que se ha seleccionado el primer nodo, en algunos casos se puede llegar a un punto en el análisis a partir del cual ya no se puede continuar. Entonces se debe comenzar de nuevo a partir de otro nodo para terminar la solución del problema. Como hay más de una forma de resolver un problema, se recomienda bosquejar la solución *antes* de comenzar a llevar a cabo cualquier cálculo.

3. ***Localizar un nodo que conecte sólo dos elementos y dibujar un diagrama de cuerpo libre de su perno.*** Este diagrama de cuerpo libre sirve para determinar la fuerza desconocida en cada uno de los elementos. Si sólo están involucradas tres fuerzas (las dos fuerzas desconocidas y una fuerza conocida), probablemente se encontrará que es más conveniente dibujar y resolver el triángulo de fuerzas correspondiente. Si están involucradas más de tres fuerzas, se deben escribir y resolver las ecuaciones de equilibrio para el perno, $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$, suponiendo que los elementos están en tensión. Una respuesta positiva significa que el elemento está en tensión y una respuesta negativa se refiere a que el elemento está en compresión. Una vez que se han encontrado las fuerzas, se deben introducir sus valores en un croquis de la armadura, con una T para indicar tensión y una C para indicar compresión.

   En la sección 6.4 se expuso cómo usar un triángulo de fuerzas para determinar las fuerzas desconocidas en un nodo, y en el problema resuelto 6.1 se aplicó esta técnica a los nodos A y D. En cada uno de estos casos no se especificaron, en el diagrama de cuerpo libre correspondiente, las direcciones de las fuerzas desconocidas de un nodo, sólo se mostraron sus líneas de acción. Por tanto, cuando se construye un triángulo de fuerzas, se debe dibujar primero la fuerza conocida y después agregar las líneas de acción de las fuerzas desconocidas, recordando que las fuerzas se deben arreglar de punta a cola para formar un triángulo. Las direcciones de las fuerzas desconocidas se establecen hasta el último paso.

4. ***Después, se debe localizar un nodo en el cual sólo las fuerzas en dos de los elementos que se conectan a éste aún son desconocidas.*** Se debe dibujar el diagrama de cuerpo libre del perno y utilizarlo como se indicó en el punto anterior para determinar las dos fuerzas desconocidas.

5. ***Se debe repetir este procedimiento hasta que las fuerzas en todos los elementos de la armadura hayan sido determinadas.*** Como previamente se usaron las tres ecuaciones de equilibrio asociadas con el diagrama de cuerpo libre de toda la armadura para determinar las reacciones en los apoyos, se tendrán tres ecuaciones adicionales. Estas ecuaciones sirven para comprobar que los cálculos se realizaron en forma correcta.

Problemas

6.1 a 6.8 Utilice el método de los nodos para determinar la fuerza presente en cada elemento de las armaduras que muestran las siguientes figuras. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

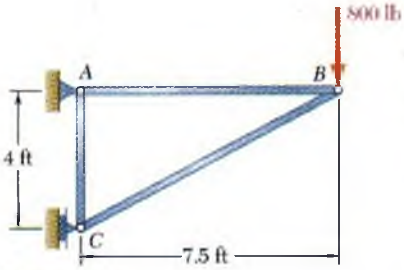


Figura P6.1

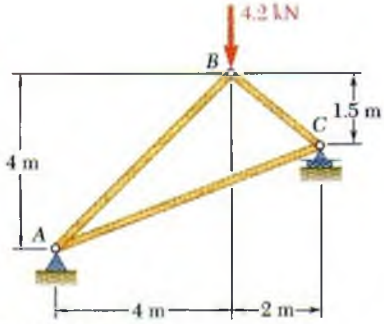


Figura P6.2

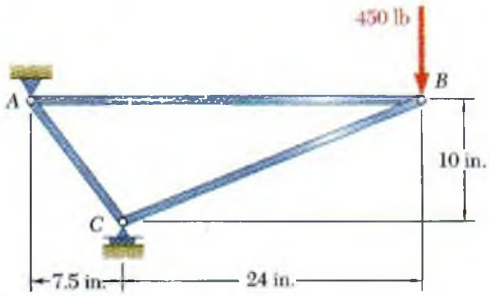


Figura P6.3

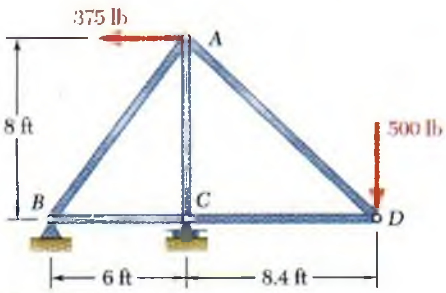


Figura *P6.4*

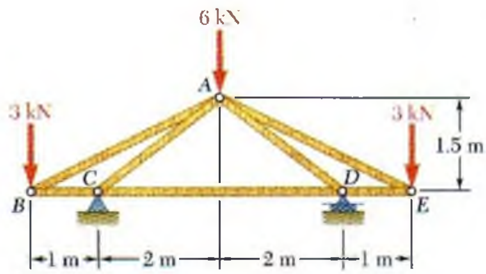


Figura P6.5

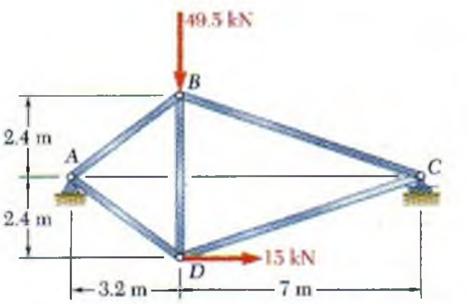


Figura P6.6

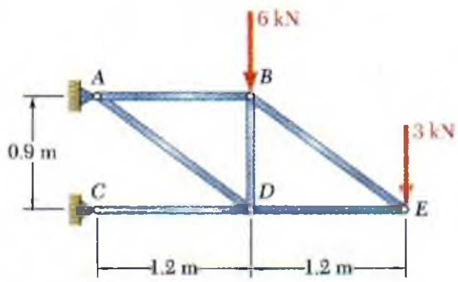


Figura P6.7

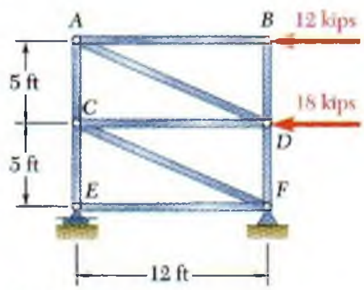


Figura *P6.8*

6.9 Determine la fuerza presente en cada elemento de la armadura que muestra la figura. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

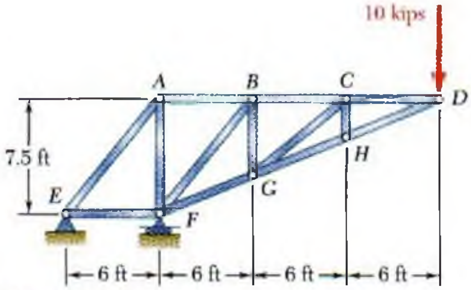


Figura P6.9

6.10 Determine la fuerza presente en cada elemento de la armadura Gambrel para techo mostrada en la figura. Establezca si los elementos se encuentran en tensión o en compresión.

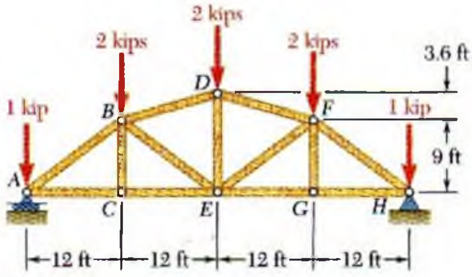


Figura P6.10

6.11 Determine la fuerza presente en cada elemento de la armadura para techo de medio copete que muestra la figura. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

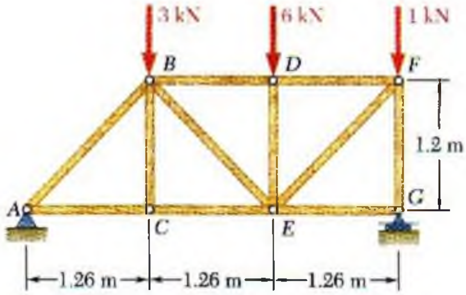


Figura *P6.11*

6.12 Determine la fuerza presente en cada elemento de la armadura Fink para techo que muestra la figura. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

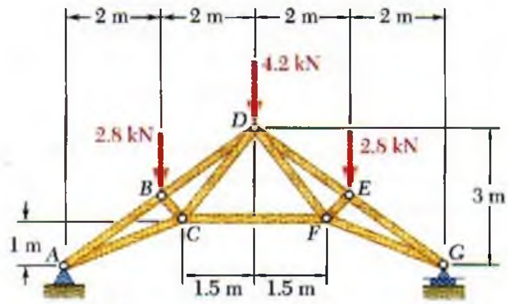


Figura P6.12

6.13 Resuelva el problema 6.12 suponiendo que se elimina la carga de 2.8 kN aplicada en *E*.

6.14 Determine la fuerza presente en cada elemento de la armadura para techo mostrada en la figura. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

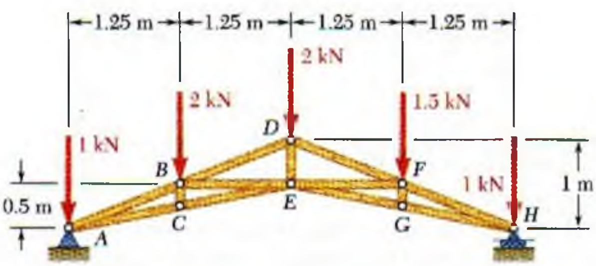


Figura *P6.14*

6.15 Para la armadura Gambrel de techo que muestra la figura, determine la fuerza presente en los elementos *CG* y *CI* y en cada elemento localizado a la derecha de la línea central de la armadura. Además, establezca si los elementos se encuentran en tensión o en compresión.

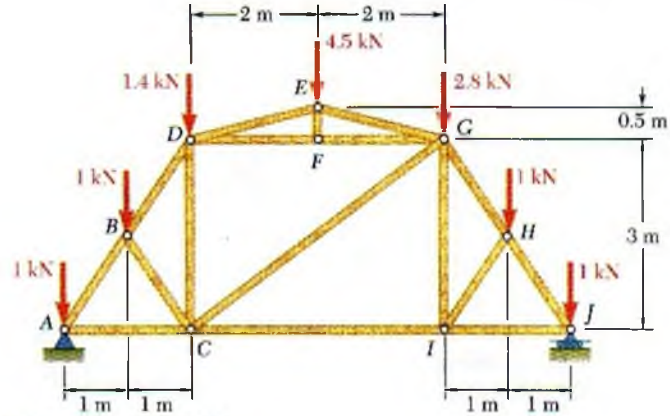


Figura P6.15 y P6.16

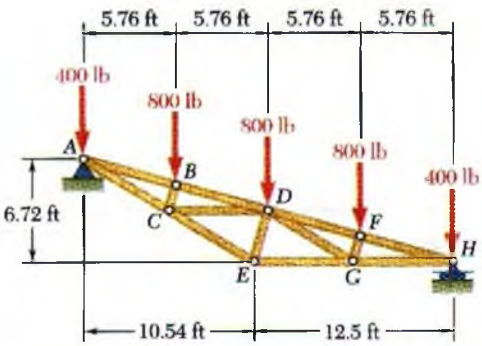


Figura P6.17 y P6.18

6.16 Para la armadura Gambrel de techo que muestra la figura, determine la fuerza presente en los elementos *CG* y *CI* y en cada elemento localizado a la derecha de la línea central de la armadura. Además, establezca si los elementos se encuentran en tensión o en compresión.

6.17 Para la armadura de techo invertida tipo Howe que muestra la figura, determine la fuerza presente en el elemento *DE* y en cada uno de los elementos localizados a la izquierda de *DE*. Además, establezca si los elementos se encuentran en tensión o en compresión.

6.18 Para la armadura de techo invertida tipo Howe que muestra la figura, determine la fuerza presente en cada elemento localizado a la derecha de *DE*. Además, establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

6.19 Para la armadura de techo que muestra la figura, determine la fuerza presente en cada elemento localizado a la izquierda del elemento *FG*. Además, establezca si los elementos se encuentran en tensión o en compresión.

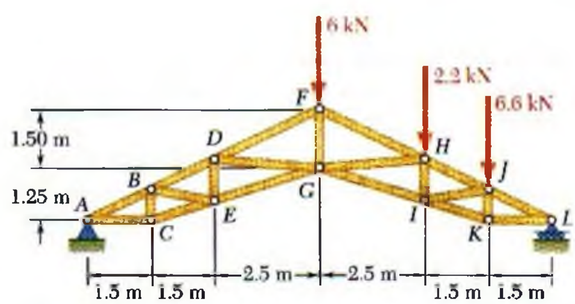


Figura P6.19 y *P6.20*

6.20 Para la armadura de techo que muestra la figura, determine la fuerza presente en el elemento *FG* y en cada elemento localizado a la derecha de *FG*. Además, establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

6.21 La porción de armadura mostrada representa la parte superior de una torre para líneas de transmisión de energía eléctrica. Para las cargas mostradas, determine la fuerza presente en cada elemento localizado por encima de *HJ*. Además, establezca si los elementos se encuentran en tensión o en compresión.

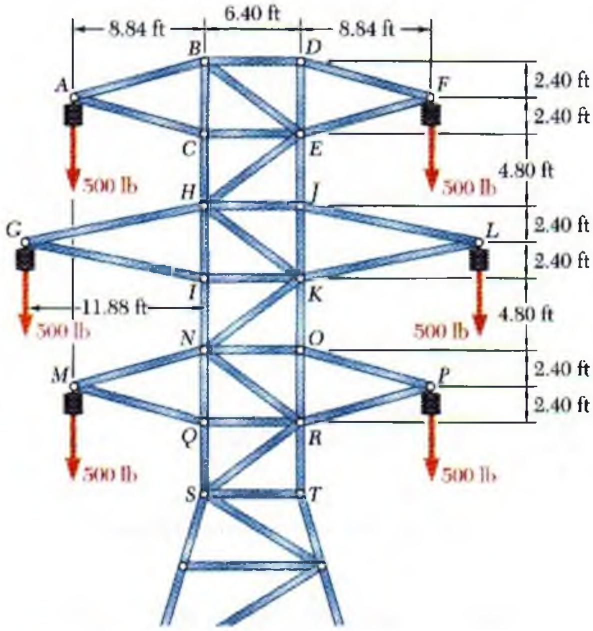


Figura ***P6.21***

6.22 Para la torre y las cargas del problema 6.21, y si $F_{CH} = F_{EJ} = 500$ lb *C* y $F_{EH} = 0$, determine la fuerza presente en el elemento *HJ* y en cada elemento localizado entre *HJ* y *NO*. Además, establezca si los elementos se encuentran en tensión o en compresión.

6.23 Para la armadura de techo que muestra la figura, determine la fuerza presente en cada elemento localizado a la izquierda del elemento *GH*. Además, establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

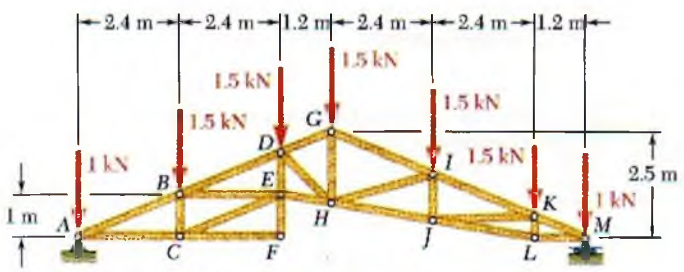


Figura P6.23 y ***P6.24***

6.24 Para la armadura de techo que muestra la figura, determine la fuerza presente en el elemento *GH* y en cada elemento localizado a la derecha de *GH*. Además, establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

6.25 Determine la fuerza presente en cada elemento de la armadura que muestra la figura. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

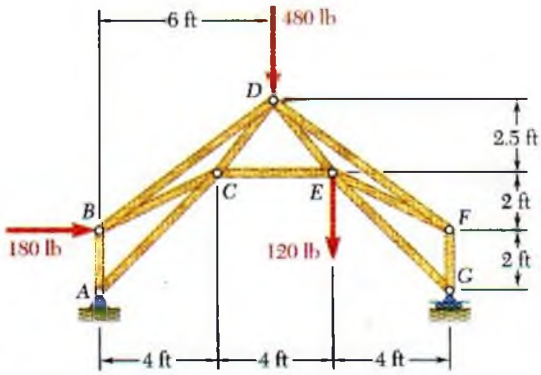


Figura P6.25

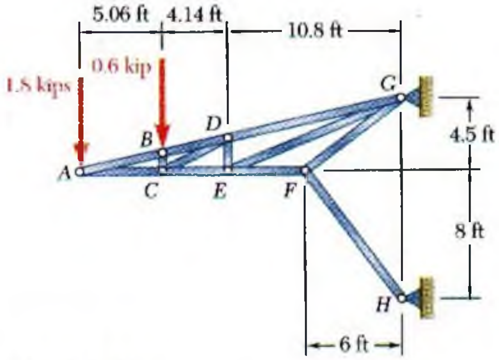


Figura P6.26

6.26 Determine la fuerza presente en cada elemento de la armadura que muestra la figura. Establezca si los elementos se encuentran en tensión o en compresión.

6.27 Determine si las armaduras de los problemas 6.14, 6.15 y 6.23 son armaduras simples.

6.28 Determine si las armaduras de los problemas 6.21, 6.25 y 6.29 son armaduras simples.

6.29 y 6.30 Para la armadura y las cargas que se muestran en la figura, determine los elementos de fuerza cero.

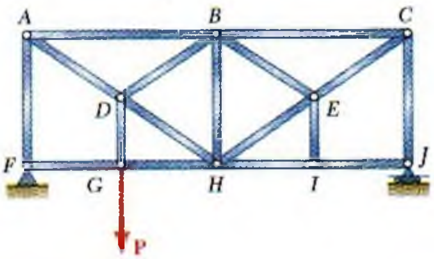


Figura P6.29

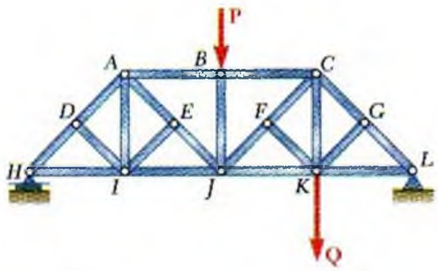


Figura P6.30

6.31 y *6.32* Para la armadura y las cargas que se muestran en cada figura, determine los elementos de fuerza cero.

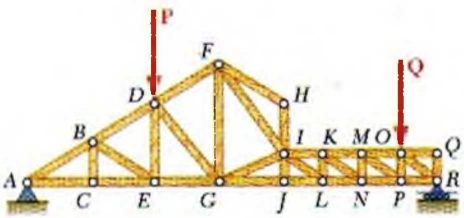


Figura P6.31

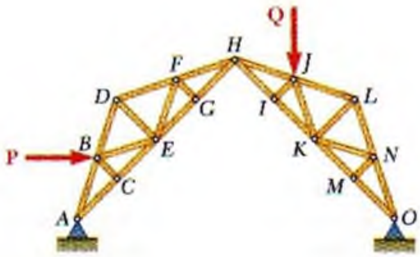


Figura *P6.32*

6.33 y *6.34* Para la carga dada, determine los elementos de fuerza cero presentes en cada armadura que muestran las figuras.

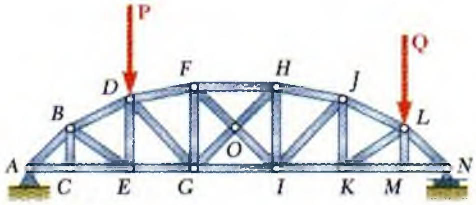


Figura P6.33

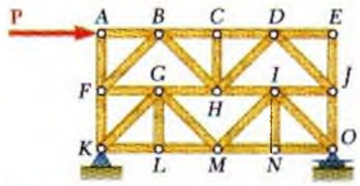


Figura *P6.34*

6.35 Determine los elementos de fuerza cero presentes en la armadura del *a)* problema 6.9, *b)* del problema 6.29.

***6.36** La armadura mostrada en la figura consta de seis elementos y se sostiene mediante dos eslabones cortos instalados en los nudos *A*, *B* y *C*. Determine la fuerza presente en cada elemento para **P** = −(940 N)**j** y **Q** = 0.

***6.37** La armadura que muestra la figura consta de seis elementos y está sostenida mediante dos eslabones cortos situados en los nudos *A*, *B* y *C*. Determine la fuerza presente en cada elemento para **P** = −(940 N)**j** y **Q** = (987 N)**k**.

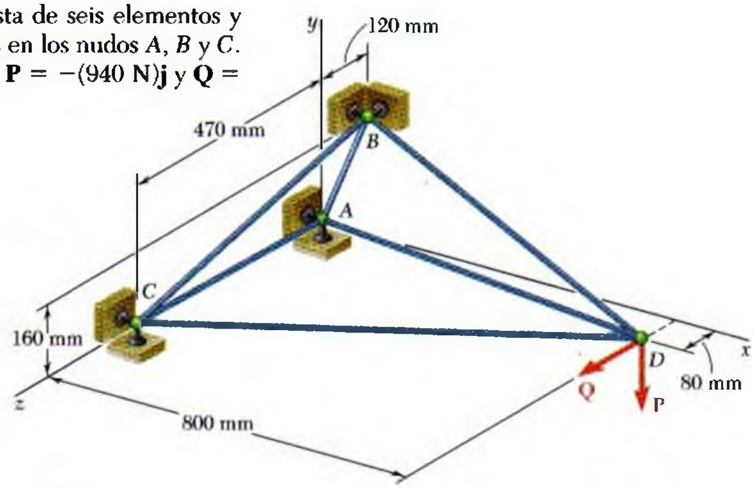


Figura P6.36 y P6.37

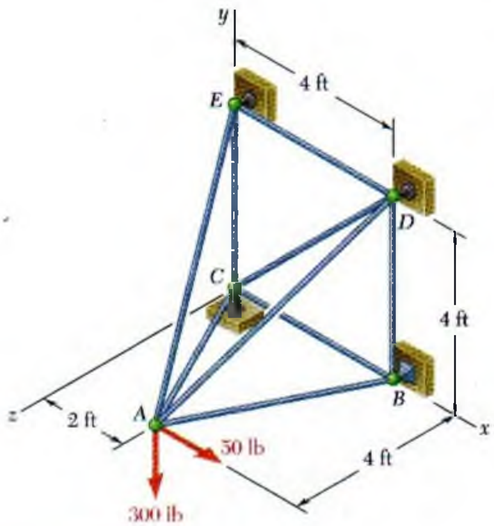


Figura P6.38

***6.38** La porción de torre para líneas de transmisión de energía eléctrica que muestra la figura consta de nueve elementos, y está sostenida mediante una rótula colocada en *B* y eslabones cortos en *C*, *D* y *E*. Para las cargas dadas, determine la fuerza presente en cada elemento.

***6.39** La armadura que muestra la figura consta de nueve elementos y se sostiene mediante dos eslabones cortos instalados en los nudos *A*, *B* y *C*. Para la carga dada, determine la fuerza presente en cada elemento.

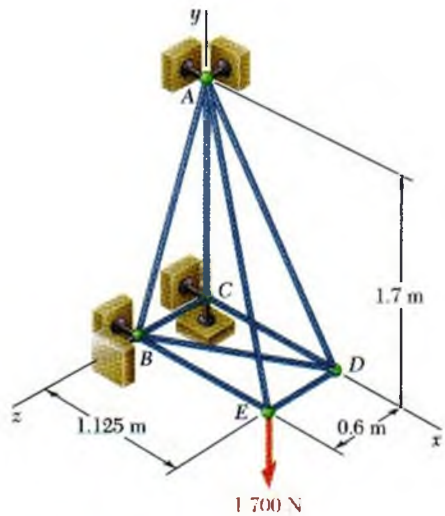


Figura P6.39

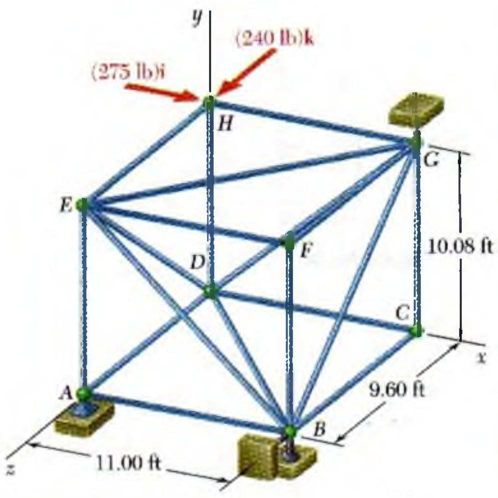


Figura P6.40 y P6.41

***6.40** La armadura mostrada en la figura consta de 18 elementos y se sostiene mediante una rótula en A, dos eslabones cortos en B y un eslabón corto en G; *a*) verifique que la armadura es simple, que está completamente restringida y que las reacciones en sus apoyos son estáticamente determinadas, y *b*) para las cargas aplicadas, determine la fuerza en cada uno de los seis elementos que se unen en el nodo E.

***6.41** La armadura mostrada en la figura consta de 18 elementos y se sostiene mediante una rótula en A, dos eslabones cortos en B y un eslabón corto en G; *a*) verifique que la armadura es simple, que está completamente restringida y que las reacciones en sus apoyos son estáticamente determinadas, y *b*) para las cargas aplicadas, determine la fuerza en cada uno de los seis elementos que se unen en el nodo G.

6.7. ANÁLISIS DE ARMADURAS POR EL MÉTODO DE SECCIONES

El método de los nodos es el más eficiente cuando se deben determinar las fuerzas en todos los elementos de una armadura. Sin embargo, si sólo se desea encontrar la fuerza en un elemento o en un número muy reducido de elementos, el método de secciones es el más eficiente.

Suponga que se desea determinar la fuerza en el elemento BD de la armadura que se muestra en la figura 6.16*a*. Para llevar a cabo esta tarea, se debe determinar la fuerza con la cual el elemento BD actúa sobre el nodo B o sobre el nodo D. Si se utilizara el método de los nodos, se seleccionaría al nodo B o al nodo D como el cuerpo libre. Sin embargo, también se selecciona como cuerpo libre a una porción más grande de la armadura, compuesta por varios nodos y elementos, siempre y cuando la fuerza deseada sea una de las fuerzas externas que actúan sobre dicha porción. Además, si se selecciona la porción de la armadura de manera que solamente se tenga un total de tres fuerzas desconocidas actuando sobre la misma, la fuerza deseada se puede obtener al resolver las ecuaciones de equilibrio para la porción de la armadura en cuestión. En la práctica, la porción de la armadura que debe utilizarse se obtiene *pasando una sección* a través de tres elementos de la armadura, de los cuales uno debe ser el elemento deseado, esto es, dicha porción se obtiene dibujando una línea que divida a la armadura en dos partes completamente separadas pero que no interseque a más de tres elementos. Cualquiera de las dos porciones de la armadura que se obtenga después de que los elementos intersecados han sido removidos puede utilizarse como el cuerpo libre.[1]

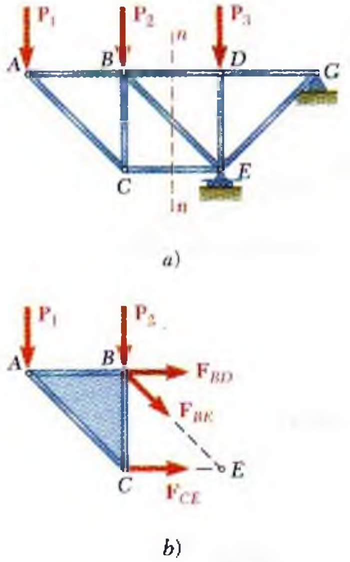


Figura 6.16

En la figura 6.16*a* se ha pasado la sección *nn* a través de los elementos BD, BE y CE y se ha seleccionado la porción ABC de la armadura como el cuerpo libre (figura 6.16*b*). Las fuerzas que actúan sobre el diagrama de cuerpo libre son las cargas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ que están aplicadas en los puntos A y B y las tres fuerzas desconocidas $\mathbf{F}_{BD}$, $\mathbf{F}_{BE}$ y $\mathbf{F}_{CE}$. Como no se sabe si los elementos removidos estaban en tensión o compresión, de manera arbitraria se dibujaron las tres fuerzas alejándose del cuerpo libre como si los elementos estuvieran en tensión.

[1]En el análisis de ciertas armaduras, se pasan secciones que intersectan a más de tres elementos; entonces se pueden determinar las fuerzas en uno, o posiblemente en dos, de los elementos intersectados si se pueden encontrar ecuaciones de equilibrio que involucren únicamente a una incógnita (véanse los problemas 6.60 a 6.63).

El hecho de que el cuerpo rígido ABC está en equilibrio se puede expresar con tres ecuaciones, las cuales pueden resolverse para encontrar tres fuerzas desconocidas. Si sólo se desea determinar la fuerza $\mathbf{F}_{BD}$, sólo se necesita escribir una ecuación, siempre y cuando dicha ecuación no contenga a las otras incógnitas. Por tanto, la ecuación $\Sigma M_E = 0$ proporciona el valor de la magnitud F_{BD} de la fuerza $\mathbf{F}_{BD}$ (figura 6.16*b*). Un signo positivo en el resultado indicará que la suposición original en relación con el sentido de $\mathbf{F}_{BD}$ fue correcta y que el elemento BD está en tensión; un signo negativo indicará que la suposición original fue incorrecta y que BD está en compresión.

Por otra parte, si sólo se desea encontrar la fuerza $\mathbf{F}_{CE}$, se debe escribir una ecuación que no involucre a $\mathbf{F}_{BD}$ o a $\mathbf{F}_{BE}$; en este caso, la ecuación apropiada es $\Sigma M_B = 0$. Un signo positivo para la magnitud F_{CE} de la fuerza deseada muestra que la suposición hecha fue correcta, esto es, que el elemento está en tensión y un signo negativo indica que la suposición fue incorrecta, esto es, que el elemento está en compresión.

Si sólo se desea encontrar la fuerza $\mathbf{F}_{BE}$, la ecuación apropiada es $\Sigma F_y = 0$. De nuevo, a partir del signo del resultado se determina si el elemento está en tensión o en compresión.

Cuando se determina únicamente la fuerza de un solo elemento, no se tiene disponible una forma independiente de comprobar los cálculos realizados. Sin embargo, cuando se han determinado todas las fuerzas desconocidas que actúan sobre el cuerpo libre, se pueden verificar los cálculos escribiendo una ecuación adicional. Por ejemplo, si $\mathbf{F}_{BD}$, $\mathbf{F}_{BE}$ y $\mathbf{F}_{CE}$ se determinan de la manera señalada en los párrafos anteriores, los cálculos pueden comprobarse verificando que $\Sigma F_x = 0$.

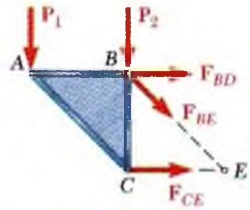


Figura 6.16*b* (*repetida*)

*6.8. ARMADURAS FORMADAS POR VARIAS ARMADURAS SIMPLES

Considere dos armaduras simples ABC y DEF. Si estas armaduras están conectadas por tres barras BD, BE y CE, como se muestra en la figura 6.17*a*, entonces formarán en conjunto una armadura rígida $ABDF$. Las armaduras ABC y DEF también se pueden combinar en una sola armadura rígida uniendo los nodos B y D en un solo nodo B y conectando los nodos C y E por medio de una barra CE (figura 6.17*b*). La armadura que se obtiene de esta forma se conoce como una *armadura Fink*. Se debe señalar que las armaduras de la figura 6.17*a* y *b* *no* son armaduras simples; éstas no se pueden construir a partir de una armadura triangular a la que se agregan sucesivamente pares de elementos en la forma descrita en la sección 6.3. Sin embargo, estas armaduras son rígidas, como se verifica al comparar los sistemas de conexiones empleados para mantener juntas las armaduras simples ABC y DEF (tres barras en la figura 6.17*a* y un perno y una barra en la figura 6.17*b*) con los sistemas de apoyos presentados en las secciones 4.4 y 4.5. Las armaduras que están he-



Figura 6.17

chas a partir de varias armaduras simples conectadas rígidamente se conocen como *armaduras compuestas*.

En una armadura compuesta, el número de elementos m y el número de nodos n aún están relacionados por la fórmula $m = 2n - 3$. Esto puede corroborarse observando que, si una armadura compuesta está apoyada por un perno sin fricción y un rodillo (involucrando así tres reacciones desconocidas), el número total de incógnitas es $m + 3$ y dicho número debe ser igual al número $2n$ de ecuaciones que se obtienen al expresar que los n pernos están en equilibrio; por tanto se concluye que $m = 2n - 3$. Las armaduras compuestas que están apoyadas por un perno y un rodillo, o por un sistema equivalente de apoyos, son *estáticamente determinadas*, *rígidas* y *completamente restringidas*. Esto se refiere a que todas las reacciones desconocidas y las fuerzas en todos los elementos pueden determinarse mediante los métodos de la estática y que la armadura no se colapsará ni se moverá. Sin embargo, no todas las fuerzas en los elementos se pueden determinar por el método de los nodos, a menos que se resuelva un gran número de ecuaciones simultáneas. Por ejemplo, en el caso de la armadura compuesta de la figura 6.17*a*, es más eficiente pasar una sección a través de los elementos BD, BE y CE para determinar las fuerzas en los mismos.

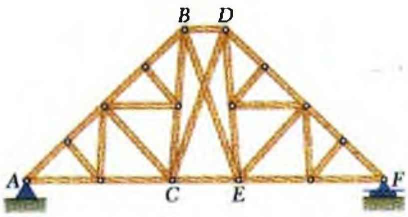


Figura 6.18

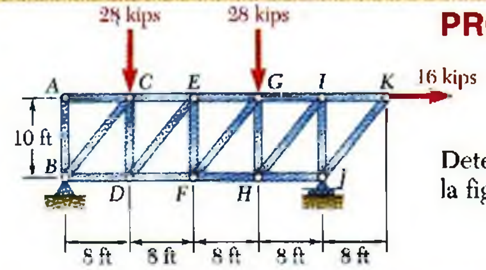
Ahora suponga que las armaduras simples ABC y DEF están conectadas por *cuatro* barras BD, BE, CD y CE (figura 6.18). Ahora, el número de elementos m es mayor que $2n - 3$; por tanto, resulta una *armadura hiperestática* y se dice que uno de los cuatro elementos BD, BE, CD, o CE es *redundante*. Si la armadura está apoyada por un perno en A y por un rodillo en F, el número total de incógnitas es $m + 3$. Como $m > 2n - 3$, ahora el número $m + 3$ de incógnitas es mayor que el número $2n$ de ecuaciones independientes que se tienen disponibles; en consecuencia, la armadura es *estáticamente indeterminada*.

Por último, supóngase que las dos armaduras simples ABC y DEF están unidas por un perno, como se muestra en la figura 6.19*a*. El número de elementos m es menor que $2n - 3$. Si la armadura está apoyada por un perno en A y un rodillo en F, el número total de incógnitas es $m + 3$. Como $m < 2n - 3$, ahora el número $m + 3$ de incógnitas es menor que el número $2n$ de ecuaciones de equilibrio que se deben cumplir; por tanto, la armadura *no es rígida* y se colapsará bajo su propio peso. Sin embargo, si se usan dos pernos para apoyarla, la armadura se vuelve *rígida* y no se colapsará (figura 6.19*b*). Ahora se observa que el número total de incógnitas es $m + 4$ y es igual al número $2n$ de ecuaciones. En términos más generales, si las reacciones en los apoyos involucran r incógnitas, la condición para que una armadura compuesta sea estáticamente determinada, rígida y por completo restringida es $m + r = 2n$. Sin embargo, aunque esta condición es necesaria, no es suficiente para el equilibrio de una estructura que deja de ser rígida cuando se separa de sus apoyos (véase sección 6.11).



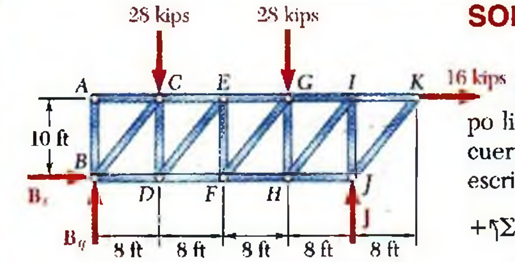
Figura 6.19

PROBLEMA RESUELTO 6.2



Determine la fuerza en los elementos *EF* y *GI* de la armadura mostrada en la figura.

SOLUCIÓN

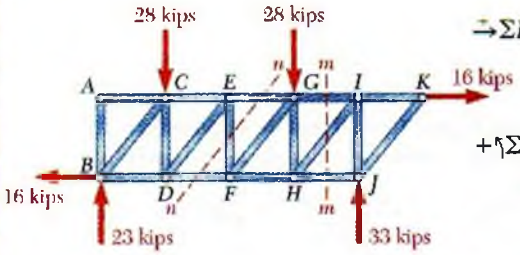


Cuerpo libre: armadura completa. Se dibuja un diagrama de cuerpo libre de toda la armadura; las armaduras externas que actúan sobre este cuerpo libre consisten en las cargas aplicadas y las reacciones en *B* y *J*. Se escriben las siguientes ecuaciones de equilibrio.

$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0$:

$$-(28 \text{ kips})(8 \text{ ft}) - (28 \text{ kips})(24 \text{ ft}) - (16 \text{ kips})(10 \text{ ft}) + J(32 \text{ ft}) = 0$$

$$J = +33 \text{ kips} \qquad \mathbf{J} = 33 \text{ kips}\uparrow$$



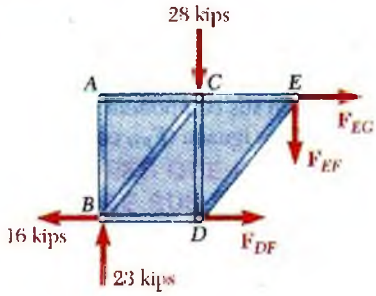
$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0$: $\qquad B_x + 16 \text{ kips} = 0$

$$B_x = -16 \text{ kips} \qquad \mathbf{B}_x = 16 \text{ kips}\leftarrow$$

$+\circlearrowleft \Sigma M_J = 0$:

$$(28 \text{ kips})(24 \text{ ft}) + (28 \text{ kips})(8 \text{ ft}) - (16 \text{ kips})(10 \text{ ft}) - B_y(32 \text{ ft}) = 0$$

$$B_y = +23 \text{ kips} \qquad \mathbf{B}_y = 23 \text{ kips}\uparrow$$



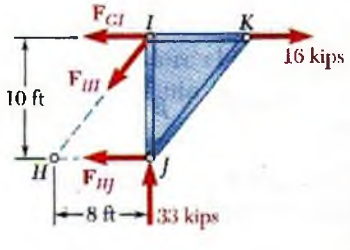
Fuerza en el elemento *EF*. Se pasa la sección *nn* a través de la armadura de manera que sólo interseque al elemento *EF* y a otros dos elementos adicionales. Después de que se han removido los elementos intersecados, la porción del lado izquierdo de la armadura se selecciona como el cuerpo libre. Se observa que están involucradas tres incógnitas; para eliminar las dos fuerzas horizontales, se escribe

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$: $\qquad +23 \text{ kips} - 28 \text{ kips} - F_{EF} = 0$

$$F_{EF} = -5 \text{ kips}$$

El sentido de $\mathbf{F}_{EF}$ se seleccionó suponiendo que el elemento *EF* está en tensión; el signo negativo obtenido indica que en realidad el elemento está en compresión.

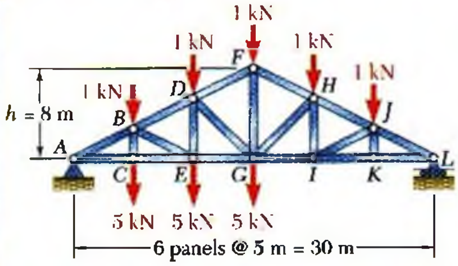
$$F_{EF} = 5 \text{ kips } C \quad ◀$$



Fuerza en el elemento *GI*. Se pasa la sección *mm* a través de la armadura de manera que sólo interseque al elemento *GI* y a otros dos elementos adicionales. Después de que se han removido los elementos intersecados, se selecciona la porción del lado derecho de la armadura como el cuerpo libre. Otra vez están involucradas tres fuerzas desconocidas; para eliminar las dos fuerzas que pasan a través del punto *H* se escribe

$+\circlearrowleft \Sigma M_H = 0$: $\qquad (33 \text{ kips})(8 \text{ ft}) - (16 \text{ kips})(10 \text{ ft}) + F_{GI}(10 \text{ ft}) = 0$

$$F_{GI} = -10.4 \text{ kips} \qquad F_{GI} = 10.4 \text{ kips } C \quad ◀$$



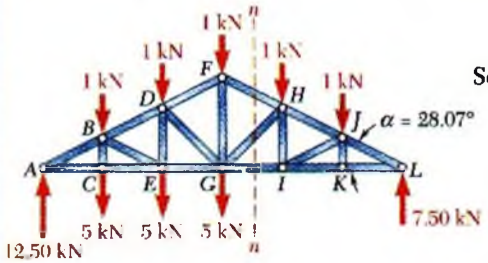
PROBLEMA RESUELTO 6.3

Determine la fuerza en los elementos FH, GH y GI de la armadura para techo mostrada en la figura.

SOLUCIÓN

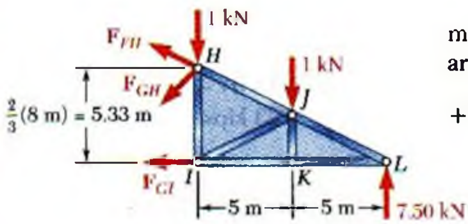
Cuerpo libre: armadura completa. A partir del diagrama de cuerpo libre para toda la armadura se encuentran las reacciones en A y L:

$$\mathbf{A} = 12.50 \text{ kN}\uparrow \qquad \mathbf{L} = 7.50 \text{ kN}\uparrow$$



Se observa que

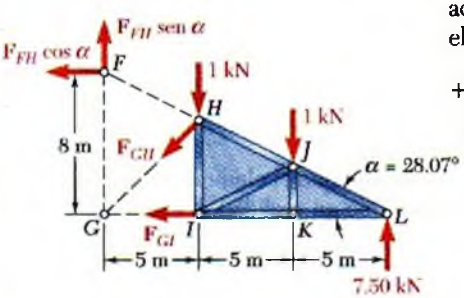
$$\tan\alpha = \frac{FG}{GL} = \frac{8 \text{ m}}{15 \text{ m}} = 0.5333 \qquad \alpha = 28.07°$$



Fuerza en el elemento GI. Se pasa la sección nn a través de la armadura, como se muestra en la figura. Con el uso de la porción HLI de la armadura como el cuerpo libre, se obtiene el valor de F_{GI} al escribir

$$+\circlearrowleft\Sigma M_H = 0: \qquad (7.50 \text{ kN})(10 \text{ m}) - (1 \text{ kN})(5 \text{ m}) - F_{GI}(5.33 \text{ m}) = 0$$

$$F_{GI} = +13.13 \text{ kN} \qquad F_{GI} = 13.13 \text{ kN } T \blacktriangleleft$$



Fuerza en el elemento FH. El valor de F_{FH} se obtiene a partir de la ecuación $\Sigma M_G = 0$. Se mueve $\mathbf{F}_{FH}$ a lo largo de su línea de acción hasta que actúe en el punto F, donde se descompone en sus componentes x y y. Ahora, el momento de $\mathbf{F}_{FH}$ con respecto al punto G es igual a $(F_{FH}\cos\alpha)(8 \text{ m})$.

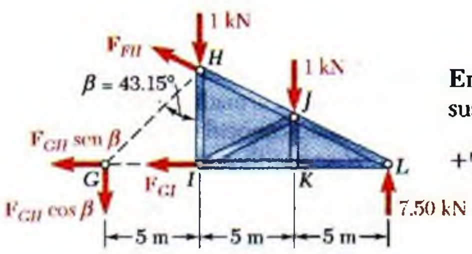
$$+\circlearrowleft\Sigma M_G = 0:$$

$$(7.50 \text{ kN})(15 \text{ m}) - (1 \text{ kN})(10 \text{ m}) - (1 \text{ kN})(5 \text{ m}) + (F_{FH}\cos\alpha)(8 \text{ m}) = 0$$

$$F_{FH} = -13.81 \text{ kN} \qquad F_{FH} = 13.81 \text{ kN } C \blacktriangleleft$$

Fuerza en el elemento GH. Primero se observa que

$$\tan\beta = \frac{GI}{HI} = \frac{5 \text{ m}}{\frac{2}{3}(8 \text{ m})} = 0.9375 \qquad \beta = 43.15°$$



Entonces, el valor de F_{GH} se determina descomponiendo la fuerza $\mathbf{F}_{GH}$ en sus componentes x y y en el punto G y al resolver la ecuación $\Sigma M_L = 0$.

$$+\circlearrowleft\Sigma M_L = 0: \qquad (1 \text{ kN})(10 \text{ m}) + (1 \text{ kN})(5 \text{ m}) + (F_{GH}\cos\beta)(15 \text{ m}) = 0$$

$$F_{GH} = -1.371 \text{ kN} \qquad F_{GH} = 1.371 \text{ kN } C \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

El *método de los nodos* es el mejor método cuando se desean determinar las fuerzas *en todos los elementos* de una armadura simple. Sin embargo, el método de secciones descrito en esta sección es más eficiente cuando se desea encontrar la fuerza *en un solo elemento* o las fuerzas *en pocos elementos* de una armadura simple. El método de secciones también debe emplearse cuando la armadura *no es una armadura simple.*

A. ***Para determinar la fuerza en un elemento dado de una armadura*** por el método de secciones, se deben seguir los siguientes pasos:

1. ***Dibujar un diagrama de cuerpo libre de toda la armadura*** y utilizar dicho diagrama para determinar las reacciones en los apoyos.

2. ***Pasar una sección a través de tres elementos de la armadura,*** de los cuales debe ser el elemento de interés. Después de que se han removido estos elementos, se obtendrán dos porciones separadas de la armadura.

3. ***Seleccionar una de las dos porciones de la armadura que se han obtenido y dibujar su diagrama de cuerpo libre.*** Dicho diagrama debe incluir tanto a las fuerzas externas aplicadas sobre la porción seleccionada, como a las fuerzas ejercidas sobre esta última por los elementos intersecados antes de que dichos elementos fueran removidos.

4. ***Ahora se pueden escribir tres ecuaciones de equilibrio,*** las cuales se pueden resolver para encontrar las fuerzas en los tres elementos intersecados.

5. ***Una alternativa consiste en escribir una sola ecuación,*** la cual pueda resolverse para la fuerza en el elemento de interés. Para esto, primero se debe observar si las fuerzas ejercidas sobre el cuerpo libre por los otros dos elementos son paralelas o si sus líneas de acción se intersecan.

a) Si las fuerzas son paralelas, éstas se pueden eliminar escribiendo una ecuación de equilibrio que involucre *componentes en una dirección perpendicular* a la de estas dos fuerzas.

b) Si sus líneas de acción se intersecan en un punto H, estas fuerzas pueden eliminarse escribiendo una ecuación de equilibrio que involucre *momentos con respecto a H.*

6. ***Se debe recordar que la sección que se utilice debe intersecar sólo a tres elementos.*** Esto se debe a que las ecuaciones de equilibrio en el paso 4 sólo se resuelven para tres incógnitas. Sin embargo, se puede pasar una sección a través de más de tres elementos con el fin de encontrar la fuerza en uno de los mismos, siempre y cuando se pueda escribir una ecuación de equilibrio que contenga sólo a dicha fuerza como incógnita. Este tipo de situación especial se encontrará en los problemas del 6.60 al 6.63. Por otro lado, a pesar de que el método de los nodos ha sido considerado en forma separada del método de secciones, se debe tener en cuenta que estas dos técnicas se pueden usar en forma secuencial para determinar

la fuerza en el elemento dado de una armadura, cuando la fuerza no puede ser determinada usando una sola sección.

B. En los problemas 6.64 al 6.67 se pedirá calcular las fuerzas de tensión en los contravientos activos de las armaduras (las fuerzas en los otros contravientos son iguales a cero). Para determinar las fuerzas en cada par de contravientos, se comienza por determinar las reacciones en los soportes para después pasar una sección a través de la armadura, la cual pasa por el par de contravientos. Después de seleccionar la porción de armadura que será analizada y de dibujar su diagrama de cuerpo libre, se debe *suponer* cuál contraviento está actuando y se debe usar una ecuación de equilibrio para determinar la fuerza en ese contraviento. Si la fuerza es de tensión, la suposición fue correcta; si no, el análisis debe repetirse suponiendo que el otro contraviento integrante del par es el que está activo. Sin embargo, a menudo se puede deducir cuál es el contraviento activo al examinar el diagrama de cuerpo libre, puesto que una sumatoria mental de las fuerzas externas (cargas y reacciones en los soportes) indicará cuál contraviento debe actuar para que exista el equilibrio (recordando que la fuerza en un contraviento sólo puede ser de tensión).

C. En relación con las armaduras que están completamente restringidas y determinadas:

1. Se debe señalar que cualquier armadura simple que está simplemente apoyada es una armadura completamente restringida y determinada.

2. Para determinar si cualquier otra armadura es completamente restringida y determinada o no, primero se debe contar el número m de sus elementos, el número n de sus nodos y el número r de las componentes de reacción en sus apoyos. Entonces, se debe comparar la suma $m + r$, que representa el número de incógnitas, con el producto $2n$, que representa el número de ecuaciones de equilibrio independientes que se tienen disponibles.

a) Si $m + r < 2n$**,** hay menos incógnitas que ecuaciones. Por tanto, algunas de las ecuaciones no se cumplen; la armadura sólo está *parcialmente restringida*.

b) Si $m + r > 2n$**,** hay más incógnitas que ecuaciones. Por tanto, no se pueden determinar algunas de las incógnitas; la armadura es *indeterminada*.

c) Si $m + r = 2n$**,** hay tantas incógnitas como ecuaciones. Sin embargo, esto no significa que pueden determinarse todas las incógnitas y cumplirse todas las ecuaciones. Para establecer si la armadura es *completa* o *impropiamente restringida* se debe tratar de determinar las reacciones en sus apoyos y las fuerzas en sus elementos. Si todas se encuentran, la armadura es *completamente restringida y determinada*.

Problemas

6.42 Una armadura para piso se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza presente en los elementos *CF*, *EF* y *EG*.

6.43 Una armadura para piso se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza presente en los elementos *FI*, *HI* y *HJ*.

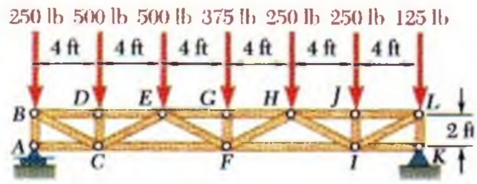


Figura P6.42 y P6.43

6.44 Una armadura abovedada para techo se carga como indica la figura. Determine la fuerza presente en los elementos *BD*, *BE* y *CE*.

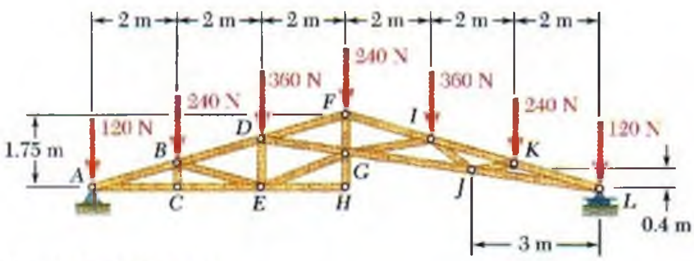


Figura P6.44 y *P6.45*

6.45 Una armadura abovedada para techo se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza presente en los elementos *GJ*, *IJ* e *IK*.

6.46 Una armadura Pratt de cuerdas paralelas se carga como indica la figura. Determine la fuerza presente en los elementos *CE*, *DE* y *DF*.

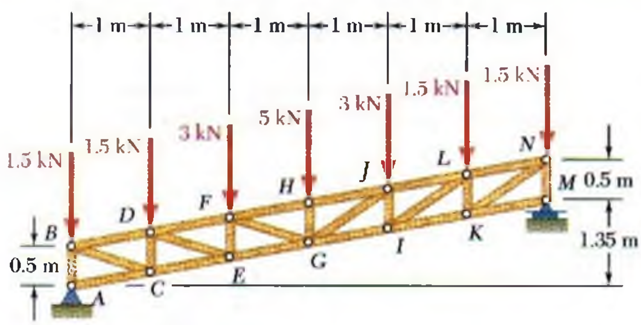


Figura P6.46 y *P6.47*

6.47 Una armadura Pratt de cuerdas paralelas se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza presente en los elementos *GI*, *GJ* y *HJ*.

6.48 Una armadura Howe tipo tijera para techo se carga como indica la figura. Determine la fuerza presente en los elementos *DF*, *DG* y *EG*.

6.49 Una armadura Howe tipo tijera para techo se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza presente en los elementos *GI*, *HI* y *HJ*.

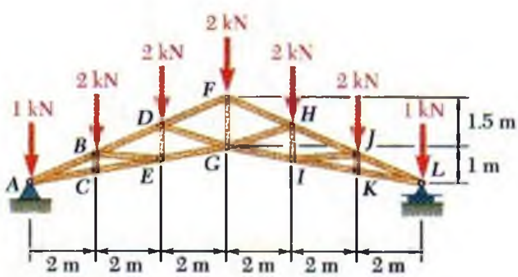


Figura P6.48 y P6.49

6.50 Una armadura Fink para techo se carga como indica la figura. Determine la fuerza presente en los elementos *BD*, *CD* y *CE*.

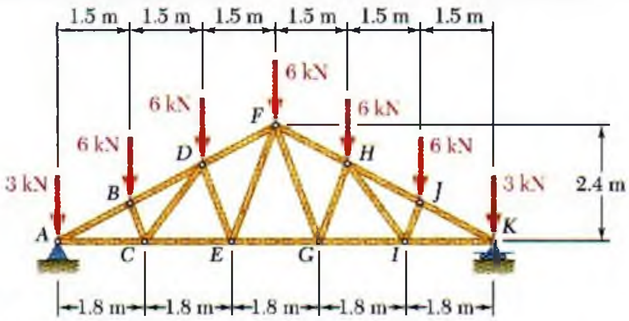


Figura P6.50 y P6.51

6.51 Una armadura Fink para techo se carga como indica la figura. Determine la fuerza presente en los elementos *FH*, *FG* y *EG*.

6.52 Una armadura para techo se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza presente en los elementos *CE*, *DE* y *EF*.

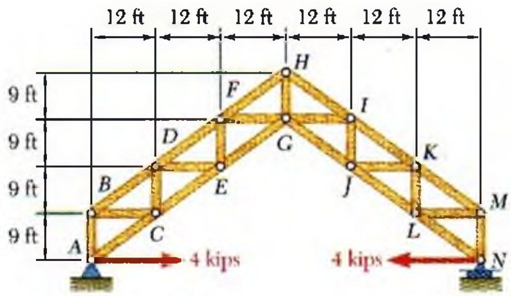


Figura P6.52 y P6.53

6.53 Una armadura para techo se carga como indica la figura. Determine la fuerza presente en los elementos *GI*, *HI* e *IJ*.

6.54 Una armadura para techo se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza presente en los elementos *FH*, *GJ* y *GI*.

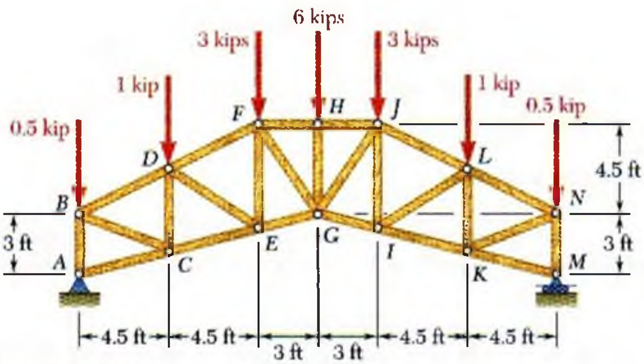


Figura *P6.54*

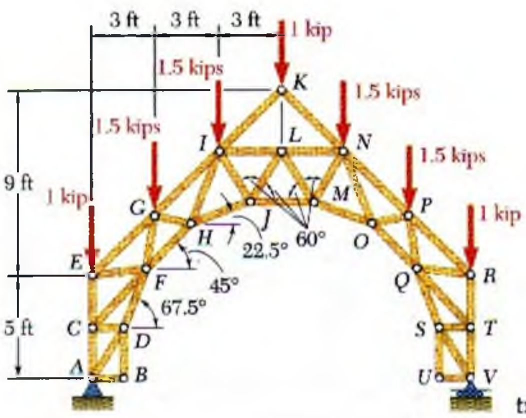


Figura P6.55

6.55 Una armadura de bóveda corrida se carga en la forma que muestra la figura. Si la longitud de las cuerdas inferiores *DF*, *FH*, . . . , y *QS* es de 3 ft, determine la fuerza presente en los elementos *IK*, *JL* y *JM*.

6.56 Una armadura abovedada para techo se carga como indica la figura. Determine la fuerza presente en los elementos BE, CE y DF.

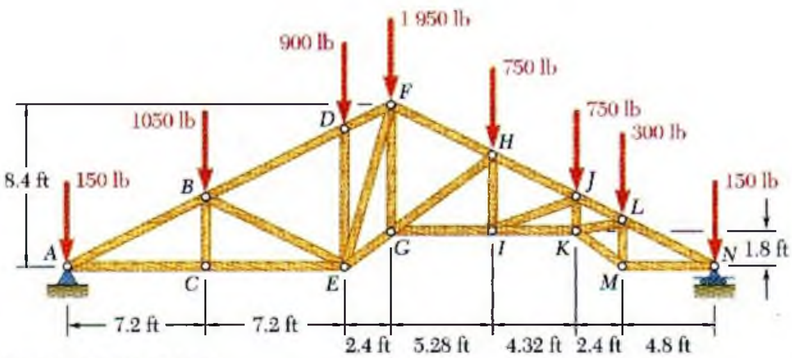


Figura *P6.56* y P6.57

6.57 Una armadura abovedada para techo se carga como indica la figura. Determine la fuerza presente en los elementos HJ, IJ y GI.

***6.58** Una armadura arqueada para techo se carga como indica la figura. La longitud de todas las cuerdas exteriores, AC, CE, . . . , y OQ, es de 1 m y la de las almas AB, CD, EF, . . . , y RQ es de 0.4 m. Determine la fuerza presente en los elementos CE, CF y DF. (*Sugerencia*: Las cuerdas interiores y exteriores en cada panel de la armadura no son paralelas.)

***6.59** Una armadura arqueada para techo se carga como indica la figura. La longitud de todas las cuerdas exteriores, AC, CE, . . . , y OQ, es de 1 m y la de las almas AB, CD, EF, . . . , y RQ es de 0.4 m. Determine la fuerza presente en los elementos GI, GJ e IJ. (*Sugerencia*: Las cuerdas interiores y exteriores en cada panel de la armadura no son paralelas.)

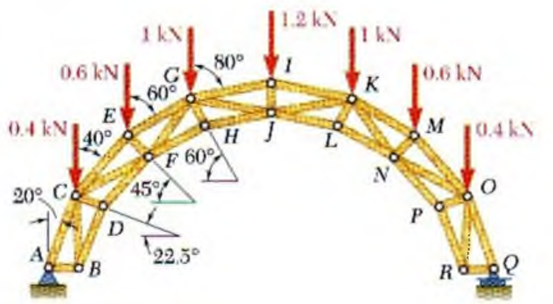


Figura P6.58 y *P6.59*

6.60 Para la armadura mostrada en la figura, determine la fuerza presente en los elementos DG y FH. (*Sugerencia*: Use la sección *aa*.)

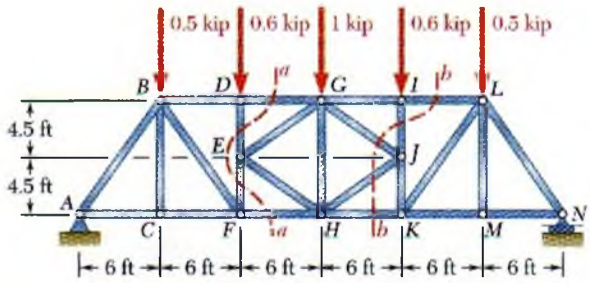


Figura P6.60 y *P6.61*

6.61 Para la armadura mostrada en la figura, determine la fuerza presente en los elementos IL, GJ y HK. (*Sugerencia*: Comience con los pernos I y J y después use la sección *bb*.)

6.62 Para la armadura mostrada en la figura, determine la fuerza presente en los elementos IK y HK. (*Sugerencia*: Use la sección *aa*.)

6.63 Para la armadura mostrada en la figura, determine la fuerza presente en los elementos FI y EG. (*Sugerencia*: Use la sección *bb*.)

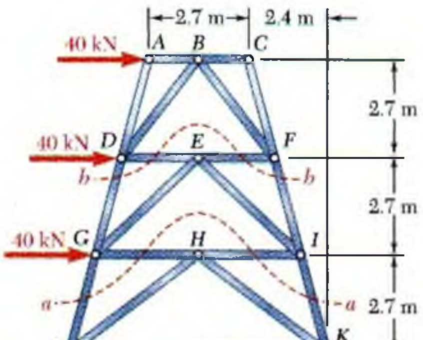


Figura P6.62 y P6.63

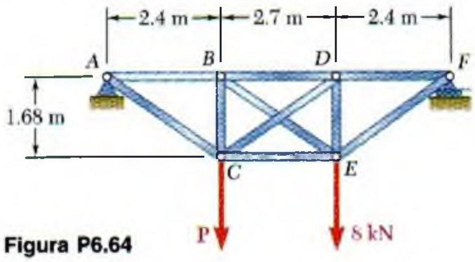


Figura P6.64

6.64 Los elementos diagonales del panel central de la armadura mostrada en la figura son muy ligeros y sólo pueden actuar en tensión; estos elementos se conocen como *contravientos*. Determine la fuerza presente en los elementos BD y CE y en el contraviento que actúa cuando $P = 12$ kN.

6.65 Resuelva el problema 6.64 cuando $P = 6$ kN.

***6.66* y 6.67** Los elementos diagonales de los paneles situados al centro de la armadura que muestra la figura son muy ligeros y solamente pueden actuar en tensión; estos elementos se conocen como *contravientos*. Para las cargas mostradas, determine la fuerza presente en el elemento DE y en los contravientos que están actuando.

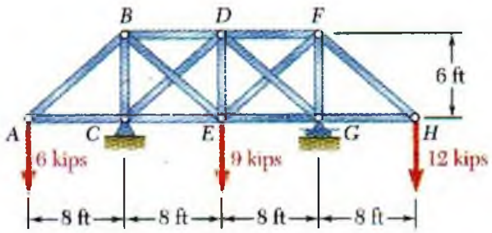


Figura *P6.66*

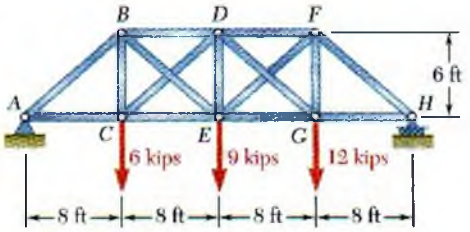


Figura P6.67

6.68 Los elementos diagonales CF y DE de la armadura que muestra la figura son muy ligeros y solamente pueden actuar en tensión; tales elementos son conocidos como *contravientos*. Determine la fuerza presente en los elementos CF y DE y en el contraviento que actúa cuando $P = 0$.

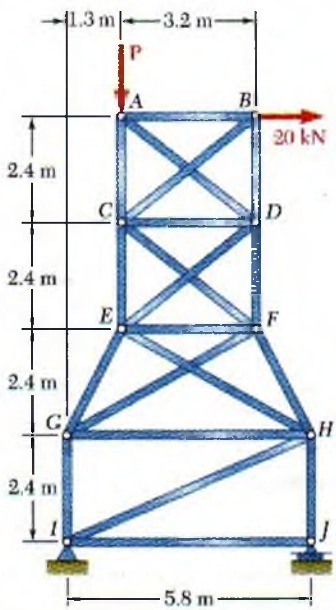


Figura P6.68 y *P6.69*

6.69 Los elementos diagonales EH y FG de la armadura que muestra la figura son muy ligeros y solamente pueden actuar en tensión; tales elementos son conocidos como *contravientos*. Determine la fuerza presente en los elementos EG y FH y en el contraviento que actúa cuando $P = 40$ kN.

6.70 a 6.75 Clasifique las estructuras mostradas en cada figura como completa, parcial o impropiamente restringidas; si la estructura es completamente restringida, clasifíquela como estáticamente determinada o indeterminada. (Todos los elementos pueden actuar tanto en tensión como en compresión.)

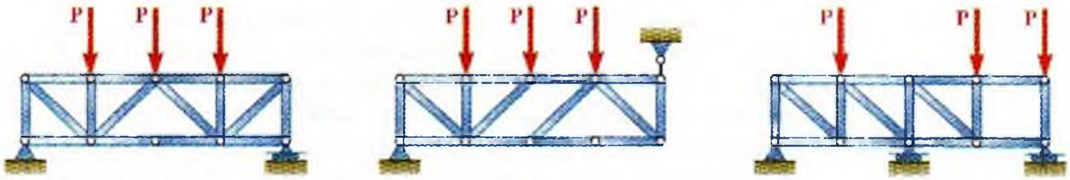


Figura P6.70 *a*) *b*) *c*)

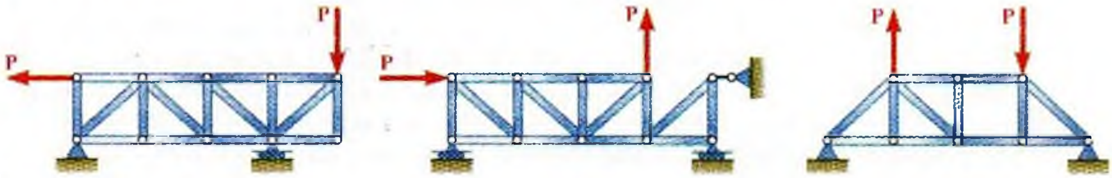


Figura P6.71 *a*) *b*) *c*)

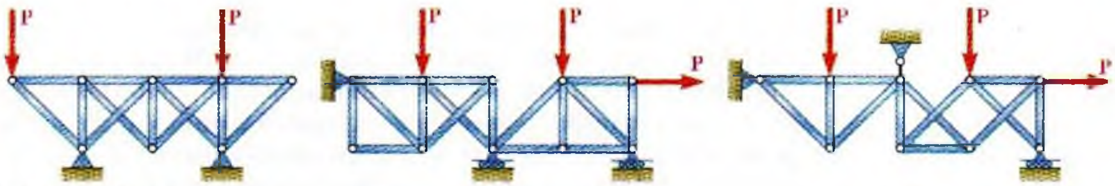


Figura *P6.72* *a*) *b*) *c*)

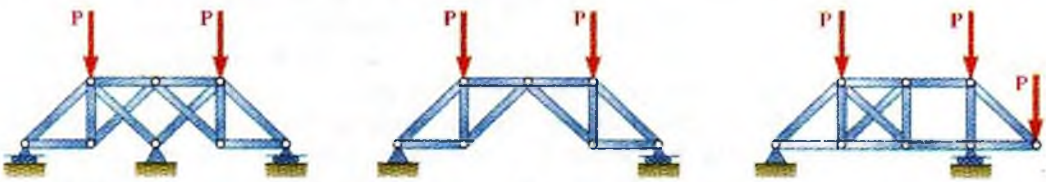


Figura P6.73 *a*) *b*) *c*)



Figura P6.74 *a*) *b*) *c*)



a) *b*) *c*)

Figura *P6.75*

ARMAZONES Y MÁQUINAS

6.9. ESTRUCTURAS QUE CONTIENEN ELEMENTOS SUJETOS A FUERZAS MÚLTIPLES

Bajo la denominación de armaduras, bastidores o armazones se consideran estructuras totalmente constituidas por pernos y elementos rectos sujetos a la acción de dos fuerzas. Se sabía que las fuerzas que actuaban sobre los elementos estaban dirigidas a lo largo de los mismos. Ahora se considerarán estructuras en las cuales por lo menos uno de los elementos es un elemento *sujeto a la acción de fuerzas múltiples*, esto es, un elemento sobre el que actúan tres o más fuerzas. En general, dichas fuerzas no estarán dirigidas a lo largo de los elementos sobre los cuales actúan; su dirección es desconocida y, por tanto, se deben representar por dos componentes desconocidas.

Los armazones y las máquinas son estructuras que contienen elementos sometidos a la acción de varias fuerzas. Los *armazones* están diseñados para soportar cargas y son estructuras estacionarias totalmente restringidas. Las *máquinas* están diseñadas para transmitir y modificar fuerzas; éstas pueden o no ser estacionarias y siempre tendrán partes móviles.

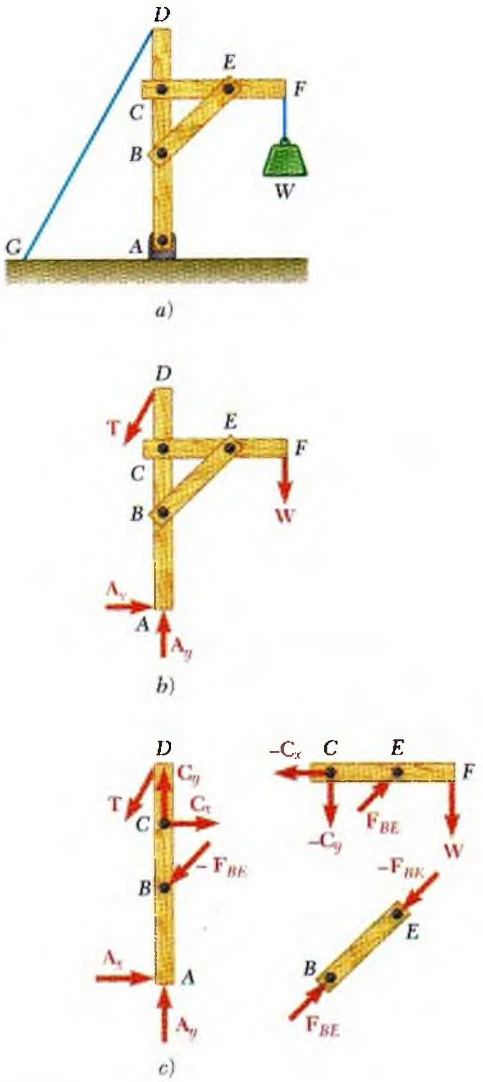


Figura 6.20

6.10. ANÁLISIS DE UN ARMAZÓN

Como un primer ejemplo del análisis de un armazón, se retomará el ejemplo de una grúa que soporta determinada carga W que ya fue descrito en la sección 6.1 (figura 6.20*a*). El diagrama de cuerpo libre para la estructura completa se muestra en la figura 6.20*b*. Este diagrama se puede utilizar para determinar las fuerzas externas que actúan sobre la estructura. Primero, al sumar momentos con respecto a A, se determina la fuerza ejercida por el cable; entonces, si se suman componentes x y y se determinan las componentes $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$ de la reacción en el perno A.

Con el fin de determinar las fuerzas internas que mantienen unidas a las diversas partes del armazón, éste se debe desensamblar y dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada una de las partes que la constituyen (figura 6.20*c*). Primero se deben considerar los elementos sometidos a la acción de dos fuerzas. En este armazón, el elemento BE es el único sobre el que actúan dos fuerzas. Las fuerzas que actúan en cada uno de los extremos de este elemento deben tener la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos (sección 4.6). Por tanto, dichas fuerzas están dirigidas a lo largo de BE y se representarán, respectivamente, por $\mathbf{F}_{BE}$ y $-\mathbf{F}_{BE}$. De modo arbitrario, se supondrá que su sentido es como se muestra en la figura 6.20*c*; después, el signo obtenido para la magnitud común F_{BE} de estas dos fuerzas confirmará o negará esta suposición.

Enseguida se consideran los elementos sometidos a la acción de varias fuerzas, los elementos sobre los que actúan tres o más fuerzas. De acuerdo con la tercera ley de Newton, la fuerza ejercida en B por el elemento BE sobre el elemento AD debe ser igual y opuesta a la fuerza $\mathbf{F}_{BE}$ ejercida por AD sobre BE. En forma similar, la fuerza ejercida en E por el elemento BE sobre el elemento CF debe ser igual y opuesta a la fuerza $-\mathbf{F}_{BE}$ ejercida por CF sobre BE. Por tanto, las fuerzas que el elemento sometido a la acción de dos fuerzas BE ejerce sobre AD y CF son iguales, respectivamente, a $-\mathbf{F}_{BE}$ y $\mathbf{F}_{BE}$; estas fuerzas tienen la misma magnitud F_{BE} y sentidos opuestos y deben estar dirigidas como se muestra en la figura 6.20*c*.

Dos elementos sometidos a la acción de varias fuerzas están conectados en C. Como no se conocen ni la magnitud ni la dirección de

las fuerzas que actúan en C, dichas fuerzas se representarán por sus componentes x y y. Las componentes $\mathbf{C}_x$ y $\mathbf{C}_y$ de la fuerza que actúa sobre el elemento AD serán dirigidas de manera arbitraria hacia la derecha y hacia arriba. De acuerdo con la tercera ley de Newton, las fuerzas ejercidas por el elemento CF sobre AD y las fuerzas ejercidas por el elemento AD sobre CF son iguales y opuestas, las componentes de la fuerza que actúa sobre el elemento CF *deben* estar dirigidas hacia la izquierda y hacia abajo; dichas componentes se representarán, respectivamente, por $-\mathbf{C}_x$ y $-\mathbf{C}_y$. Si la fuerza $\mathbf{C}_x$ en realidad está dirigida hacia la derecha y la fuerza $-\mathbf{C}_x$ hacia la izquierda se determinará después, a partir del signo de su magnitud común C_x, un signo positivo indicará que la suposición hecha fue correcta y un signo negativo indicará que la suposición fue incorrecta. Los diagramas de cuerpo libre de los elementos sujetos a la acción de fuerzas múltiples muestran las fuerzas externas que actúan en A, D y F.[†]

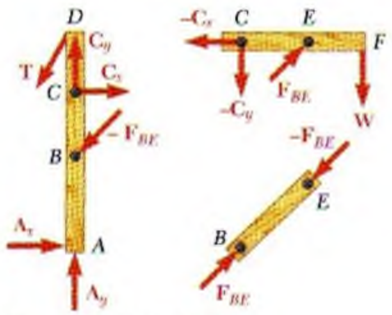


Figura 6.20*c* (*repetida*)

Ahora se pueden determinar las fuerzas internas considerando el diagrama de cuerpo libre de cualquiera de los dos elementos sometidos a la acción de varias fuerzas. Por ejemplo, seleccionando el diagrama de cuerpo libre correspondiente al elemento CF, se escriben las ecuaciones $\Sigma M_C = 0$, $\Sigma M_E = 0$ y $\Sigma F_x = 0$, las cuales proporcionan, respectivamente, los valores de las magnitudes F_{BE}, C_y y C_x. Estos valores se pueden comprobar verificando que el elemento AD también se encuentra en equilibrio.

Se debe señalar que en la figura 6.20 se supuso que los pernos formaban una parte integral de uno de los dos elementos que conectaban dichos pernos y, por tanto, no fue necesario dibujar sus diagramas de cuerpo libre. Esta suposición siempre se puede utilizar para simplificar el análisis de los armazones y las máquinas. Sin embargo, cuando un perno conecta a tres o más elementos, o cuando un perno conecta a un apoyo y a dos o más elementos o cuando se aplica una carga en un perno debe tomarse una decisión clara con relación al elemento seleccionado al cual se supondrá que pertenece el perno. (Si son elementos sujetos a la acción de fuerzas múltiples se debe unir el perno a uno de dichos elementos.) Entonces, deben identificarse las diversas fuerzas ejercidas sobre el perno. Esto se ilustra en el problema resuelto 6.6.

6.11. ARMAZONES QUE DEJAN DE SER RÍGIDOS CUANDO SE SEPARAN DE SUS SOPORTES

La grúa analizada en la sección 6.10 estaba construida de manera que podía mantener la misma forma sin la ayuda de sus apoyos; por tanto, se consideró a la grúa como un cuerpo rígido. Sin embargo, muchos armazones o estructuras se colapsarían si se separan de sus apoyos; en consecuencia, dichos armazones no pueden considerarse como cuerpos rígidos. Por ejemplo, considere el armazón mostrado en la figura 6.21*a*, el cual consta de dos elementos AC y CB que soportan, respectivamente,

[†]No es necesario utilizar un signo menos para distinguir a la fuerza ejercida por un elemento sobre otro de fuerza igual y opuesta ejercida por el segundo elemento sobre el primero, puesto que ambas fuerzas pertenecen a diferentes diagramas de cuerpo libre y, por tanto, no pueden confundirse fácilmente. En los problemas resueltos se usa el mismo símbolo para representar a fuerzas iguales y opuestas que están aplicadas sobre distintos cuerpos libres. Se debe señalar que, bajo estas circunstancias, el signo obtenido para una componente de fuerza dada no relaciona directamente el sentido de dicha componente con el sentido del eje coordenado correspondiente. En lugar de esto, un signo positivo indica que *el sentido supuesto para esa componente en el diagrama de cuerpo libre* es correcto y un signo negativo indica que dicho sentido es incorrecto.

a las cargas **P** y **Q** que actúan en los puntos medios de dichos elementos; los elementos están soportados por pernos en A y B y están conectados por medio de un perno en C. Este armazón no mantendrá su forma si se separa de sus apoyos; por tanto, se debe considerar que está hecho de *dos partes rígidas distintas* AC y CB.

Las ecuaciones $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma M = 0$ (con respecto a cualquier punto dado) expresan las condiciones para el *equilibrio de un cuerpo rígido* (capítulo 4); por tanto, deben utilizarse en conjunto con los diagramas de cuerpo libre correspondientes a cuerpos rígidos, es decir, los diagramas de cuerpo libre para los elementos AC y CB (figura 6.21*b*). Como los dos elementos en cuestión están sujetos a la acción de fuerzas múltiples, y se emplean pernos en los apoyos y en la conexión, cada una de las reacciones en A y B y las fuerzas en C se deben representar por medio de dos componentes. De acuerdo con la tercera ley de Newton, las componentes de la fuerza ejercida por CB sobre AC y las componentes de la fuerza ejercida por AC sobre CB estarán representadas por vectores que tienen la misma magnitud y sentidos opuestos; por tanto, si el primer par de componentes está constituido por $\mathbf{C}_x$ y $\mathbf{C}_y$, el segundo estará representado por $-\mathbf{C}_x$ y $-\mathbf{C}_y$. Se observa que actúan cuatro componentes de fuerzas desconocidas sobre el cuerpo libre AC, mientras que sólo pueden emplearse tres ecuaciones independientes para expresar que dicho cuerpo está en equilibrio; de manera similar, cuatro incógnitas están asociadas con el cuerpo libre CB, pero sólo se tienen tres ecuaciones independientes. Sin embargo, sólo están involucradas seis incógnitas diferentes en el análisis de los dos elementos y, en conjunto, están disponibles seis ecuaciones para expresar que ambos elementos están en equilibrio. Escribiendo $\Sigma M_A = 0$ para el cuerpo libre AC y $\Sigma M_B = 0$ para el cuerpo libre CB, se obtienen dos ecuaciones simultáneas que pueden resolverse para la magnitud común C_x de las componentes $\mathbf{C}_x$ y $-\mathbf{C}_x$ y para la magnitud común C_y de las componentes $\mathbf{C}_y$ y $-\mathbf{C}_y$. Enseguida se escribe $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ para cada uno de los dos cuerpos libres con el fin de obtener, sucesivamente, las magnitudes A_x, A_y, B_x y B_y.

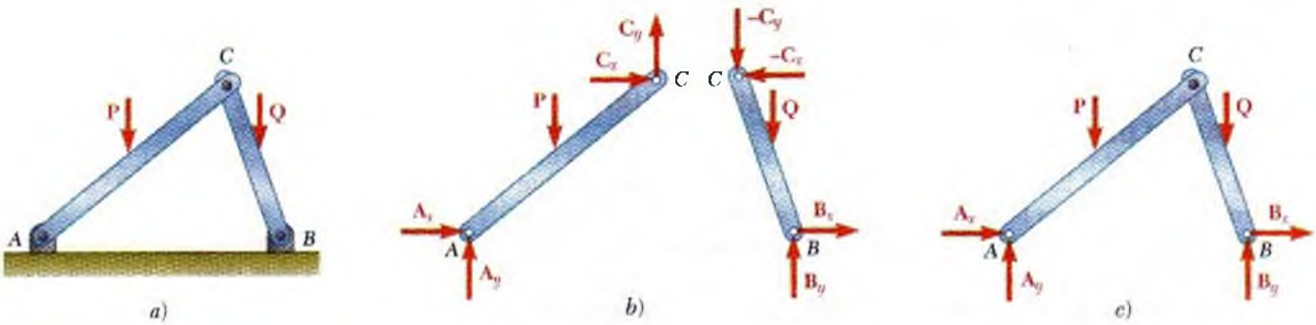
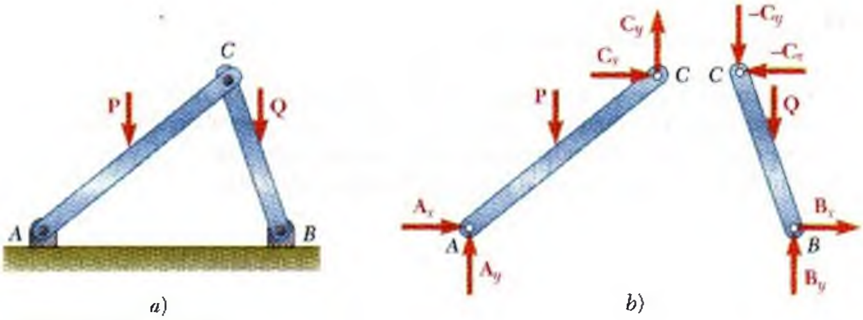


Figura 6.21

Puesto que las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre AC satisfacen las ecuaciones de equilibrio $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma M = 0$ (con respecto a cualquier punto dado) se satisfacen por las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre AC y debido a que dichas ecuaciones también se satisfacen por las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre CB, ahora se puede observar que las tres ecuaciones de equilibrio también deben cumplirse cuando se consideran simultáneamente las fuerzas que actúan sobre los dos cuerpos libres. Como las fuerzas internas en C se cancelan entre sí, se concluye que las fuerzas externas mostradas en el diagrama de cuerpo libre para el propio armazón ACB (figura 6.21*c*) deben satis-



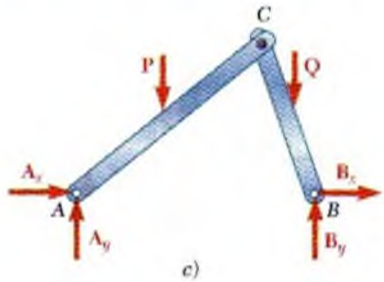


Figura 6.21 (*repetida*)

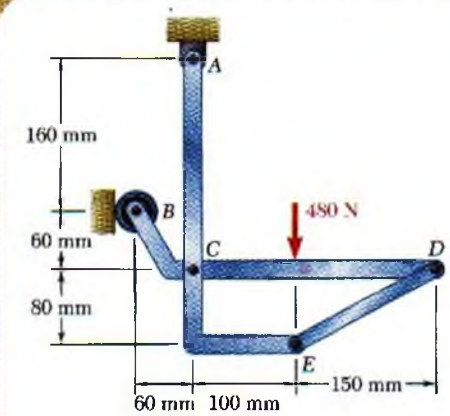
facer las ecuaciones de equilibrio, a pesar de que el armazón en análisis no es un cuerpo rígido. Dichas ecuaciones se utilizan para determinar algunas de las componentes de las reacciones en A y B. Sin embargo, también se concluye que *no se pueden determinar por completo las reacciones a partir del diagrama de cuerpo libre para el armazón completo*. Por tanto, es necesario desensamblar el armazón y considerar los diagramas de cuerpo libre de las partes que lo constituyen (figura 6.21*b*), aun cuando sólo se deseen determinar las reacciones externas. Lo anterior se debe a que las ecuaciones de equilibrio obtenidas para el cuerpo libre *ACB son condiciones necesarias, pero no suficientes*, para el equilibrio de una estructura que no es rígida.

El método de solución descrito en el segundo párrafo de la presente sección involucró ecuaciones simultáneas. A continuación se presenta un método más eficiente, el cual utiliza tanto al cuerpo libre ACB como a los cuerpos libres AC y CB. Si se escribe $\Sigma M_A = 0$ y $\Sigma M_B = 0$ para el cuerpo libre ACB, se obtienen B_y y A_y. Escribiendo $\Sigma M_C = 0$, $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ para el cuerpo libre AC se obtienen, sucesivamente, A_x, C_x y C_y. Por último, al escribir $\Sigma F_x = 0$ para ACB, se obtiene B_x.

Se señaló con anterioridad que el análisis del armazón de la figura 6.21 involucra seis componentes de fuerzas desconocidas y seis ecuaciones de equilibrio independientes. (Las ecuaciones de equilibrio para el armazón completo se obtuvieron a partir de las seis ecuaciones originales y, por tanto, no son independientes.) Además, se corroboró que en realidad se podían determinar todas las incógnitas y satisfacer todas las ecuaciones. Por tanto, el armazón considerado es *estáticamente determinado y rígido*.[†] En general, para determinar si una estructura es estáticamente determinada y rígida, se debe dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada una de las partes que la constituyen y contar el número de reacciones y de fuerzas internas que están involucradas. También se debe determinar el número de ecuaciones de equilibrio independientes (excluyendo las ecuaciones que expresan el equilibrio de la estructura completa o de grupos de partes componentes que ya se han analizado). Si hay más incógnitas que ecuaciones, la estructura es *estáticamente indeterminada*. Si hay menos incógnitas que ecuaciones, la estructura *no es rígida*. Si hay tantas incógnitas como ecuaciones y *si se pueden determinar todas las incógnitas y satisfacer todas las ecuaciones* bajo condiciones generales de carga, la estructura es *estáticamente determinada y rígida*. Sin embargo, si debido a un *arreglo impropio* de los elementos y apoyos no se pueden determinar todas las incógnitas ni satisfacer todas las ecuaciones, la estructura es *estáticamente indeterminada y no es rígida*.

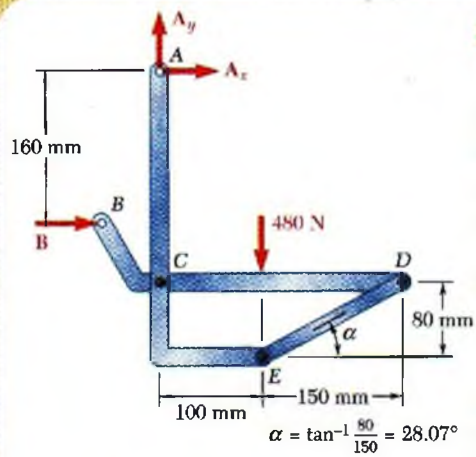
[†] La palabra *rígido* se usa para indicar que el armazón mantendrá su forma mientras permanezca unido a sus apoyos.

PROBLEMA RESUELTO 6.4



En el armazón que se muestra en la figura, los elementos *ACE* y *BCD* están conectados por medio de un perno en *C* y por el eslabón *DE*. Para la condición de carga mostrada, determine la fuerza en el eslabón *DE* y las componentes de la fuerza ejercida por los elementos *BCD* en *C*.

SOLUCIÓN



Cuerpo libre: armazón completo. Como las reacciones externas involucran sólo tres incógnitas, se calculan dichas reacciones considerando el diagrama de cuerpo libre para todo el armazón.

$+\uparrow\Sigma F_y = 0$: $\quad A_y - 480\text{ N} = 0 \quad A_y = +480\text{ N} \quad \mathbf{A}_y = 480\text{ N}\uparrow$

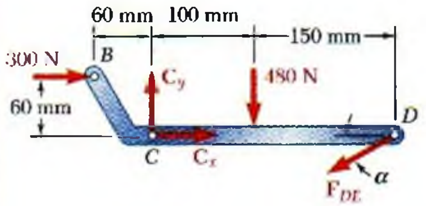
$+\circlearrowleft\Sigma M_A = 0$: $\quad -(480\text{ N})(100\text{ mm}) + B(160\text{ mm}) = 0$

$B = +300\text{ N} \quad \mathbf{B} = 300\text{ N}\rightarrow$

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0$: $\quad B + A_x = 0$

$300\text{ N} + A_x = 0 \quad A_x = -300\text{ N} \quad \mathbf{A}_x = 300\text{ N}\leftarrow$

Elementos. Ahora se desensambla el armazón. Como sólo dos elementos están conectados en *C*, las componentes de las fuerzas desconocidas que actúan sobre *ACE* y *BCD* son, respectivamente, iguales y opuestas y se supone que están dirigidas como se muestra en la figura. Se supone que el eslabón *DE* está en tensión y ejerce fuerzas iguales y opuestas en *D* y *E*, las cuales están dirigidas como muestra la figura.



Cuerpo libre: elemento BCD. Con el cuerpo libre *BCD*, se escribe

$+\circlearrowleft\Sigma M_C = 0$:

$$-(F_{DE}\text{ sen }\alpha)(250\text{ mm}) - (300\text{ N})(80\text{ mm}) - (480\text{ N})(100\text{ mm}) = 0$$

$$F_{DE} = -561\text{ N} \qquad F_{DE} = 561\text{ N } C \ \blacktriangleleft$$

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0$: $\quad C_x - F_{DE}\cos\alpha + 300\text{ N} = 0$

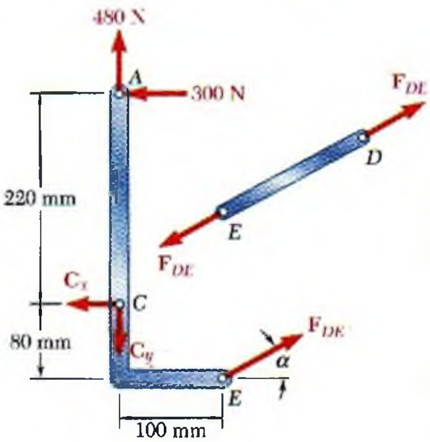
$C_x - (-561\text{ N})\cos 28.07° + 300\text{ N} = 0 \qquad C_x = -795\text{ N}$

$+\uparrow\Sigma F_y = 0$: $\quad C_y - F_{DE}\text{ sen }\alpha - 480\text{ N} = 0$

$C_y - (-561\text{ N})\text{ sen } 28.07° - 480\text{ N} = 0 \qquad C_y = +216\text{ N}$

A partir de los signos obtenidos para C_x y C_y se concluye que las componentes de fuerza $\mathbf{C}_x$ y $\mathbf{C}_y$ ejercidas sobre el elemento *BCD* están dirigidas, respectivamente, hacia la izquierda y hacia arriba. Así se tiene

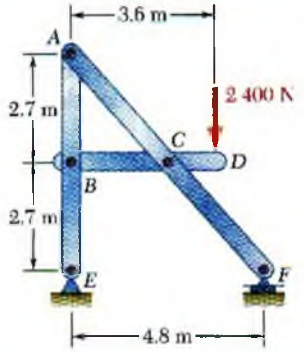
$$\mathbf{C}_x = 795\text{ N}\leftarrow,\ \mathbf{C}_y = 216\text{ N}\uparrow \ \blacktriangleleft$$



Cuerpo libre: elemento ACE (comprobación). Se comprueban los cálculos considerando el cuerpo libre *ACE*. Por ejemplo,

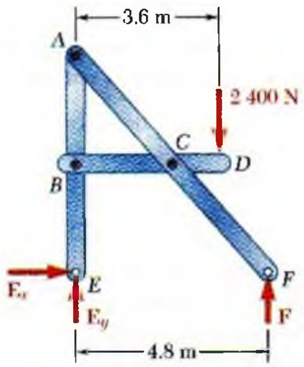
$$+\circlearrowleft\Sigma M_A = (F_{DE}\cos\alpha)(300\text{ mm}) + (F_{DE}\text{ sen }\alpha)(100\text{ mm}) - C_x(220\text{ mm})$$
$$= (-561\cos\alpha)(300) + (-561\text{ sen }\alpha)(100) - (-795)(220) = 0$$

PROBLEMA RESUELTO 6.5



Determine las componentes de las fuerzas que actúan sobre cada elemento del armazón que se muestra en la figura.

SOLUCIÓN



Cuerpo libre: armazón completo. Como las reacciones externas involucran sólo tres incógnitas, se calculan dichas reacciones considerando el diagrama de cuerpo libre para el armazón completo.

$+\circlearrowleft \Sigma M_E = 0$: $\quad -(2\,400 \text{ N})(3.6 \text{ m}) + F(4.8 \text{ m}) = 0$

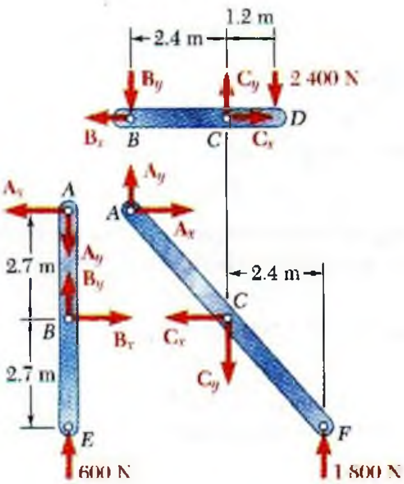
$F = +1\,800 \text{ N}$ $\qquad$ $\mathbf{F} = 1\,800 \text{ N}\uparrow$ ◀

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$: $\quad -2\,400 \text{ N} + 1\,800 \text{ N} + E_y = 0$

$E_y = +600 \text{ N}$ $\qquad$ $\mathbf{E}_y = 600 \text{ N}\uparrow$ ◀

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0$: $\quad E_x = 0$ $\qquad$ $\mathbf{E}_x = 0$ ◀

Elementos. Ahora se desensambla el armazón: como sólo están conectados dos elementos en cada nodo, en la figura se muestran componentes iguales y opuestos sobre cada elemento en cada nodo.



Cuerpo libre: elemento BCD

$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0$: $\quad -(2\,400 \text{ N})(3.6 \text{ m}) + C_y(2.4 \text{ m}) = 0$ $\qquad C_y = +3\,600 \text{ N}$ ◀

$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0$: $\quad -(2\,400 \text{ N})(1.2 \text{ m}) + B_y(2.4 \text{ m}) = 0$ $\qquad B_y = +1\,200 \text{ N}$ ◀

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0$: $\quad -B_x + C_x = 0$

Se observa que ni B_x ni C_x se obtienen considerando sólo al elemento *BCD*. Los valores positivos obtenidos para B_y y C_y indican que las componentes de fuerza $\mathbf{B}_y$ y $\mathbf{C}_y$ están dirigidas como se supuso.

Cuerpo libre: elemento ABE

$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0$: $\quad B_x(2.7 \text{ m}) = 0$ $\qquad B_x = 0$ ◀

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0$: $\quad +B_x - A_x = 0$ $\qquad A_x = 0$ ◀

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$: $\quad -A_y + B_y + 600 \text{ N} = 0$

$-A_y + 1\,200 \text{ N} + 600 \text{ N} = 0$ $\qquad A_y = +1\,800 \text{ N}$ ◀

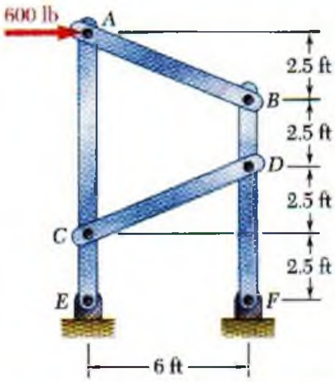
Cuerpo libre: elemento BCD. Ahora, regresando al elemento *BCD* se escribe

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0$: $\quad -B_x + C_x = 0 \qquad 0 + C_x = 0$ $\qquad C_x = 0$ ◀

***Cuerpo libre: elemento ACF* (comprobación).** Ahora ya se han determinado todas las componentes desconocidas; para comprobar los resultados se verifica que el elemento *ACF* esté en equilibrio.

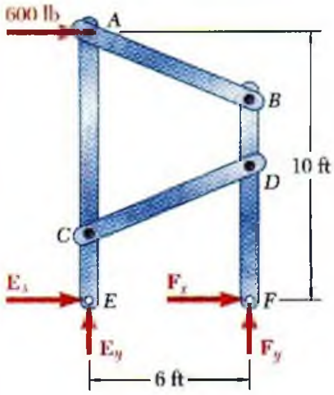
$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = (1\,800 \text{ N})(2.4 \text{ m}) - A_y(2.4 \text{ m}) - A_x(2.7 \text{ m})$$
$$= (1\,800 \text{ N})(2.4 \text{ m}) - (1\,800 \text{ N})(2.4 \text{ m}) - 0 = 0 \text{ (queda comprobado)}$$

PROBLEMA RESUELTO 6.6



Una fuerza horizontal de 600 lb se aplica sobre el perno *A* del armazón mostrado en la figura; determine las fuerzas que actúan sobre los dos elementos verticales del armazón.

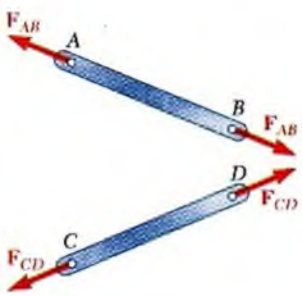
SOLUCIÓN



Cuerpo libre: armazón completo. Se selecciona al armazón completo en cuerpo libre; a pesar de que las reacciones involucran a cuatro incógnitas, se pueden determinar $\mathbf{E}_y$ y $\mathbf{F}_y$ escribiendo

$$+\circlearrowleft \Sigma M_E = 0: \quad -(600 \text{ lb})(10 \text{ ft}) + F_y(6 \text{ ft}) = 0$$
$$F_y = +1\,000 \text{ lb} \qquad \mathbf{F}_y = 1\,000 \text{ lb}\uparrow \blacktriangleleft$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad E_y + F_y = 0$$
$$E_y = -1\,000 \text{ lb} \qquad \mathbf{E}_y = 1\,000 \text{ lb}\downarrow \blacktriangleleft$$

Elementos. Las ecuaciones de equilibrio para el armazón completo no son suficientes para determinar $\mathbf{E}_x$ y $\mathbf{F}_x$. Ahora se deben considerar los diagramas de cuerpo libre de los distintos elementos que constituyen al armazón para continuar con la solución del problema. Al desensamblar el armazón, se supondrá que el perno *A* está unido al elemento sujeto a la acción de varias fuerzas *ACE* y, por tanto, que la fuerza de 600 lb está aplicada sobre dicho elemento. Además, también se debe señalar que *AB* y *CD* son elementos sujetos a dos fuerzas.



Cuerpo libre: elemento ACE

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -\tfrac{5}{13}F_{AB} + \tfrac{5}{13}F_{CD} - 1\,000 \text{ lb} = 0$$
$$+\circlearrowleft \Sigma M_E = 0: \quad -(600 \text{ lb})(10 \text{ ft}) - (\tfrac{12}{13}F_{AB})(10 \text{ ft}) - (\tfrac{12}{13}F_{CD})(2.5 \text{ ft}) = 0$$

Si se resuelven simultáneamente estas ecuaciones, se encuentra que

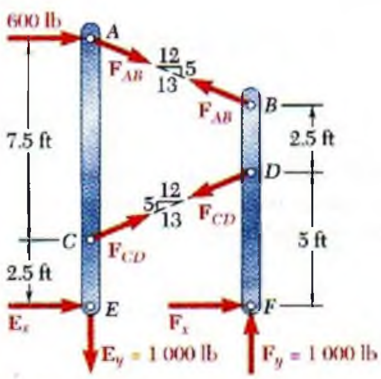
$$F_{AB} = -1\,040 \text{ lb} \qquad F_{CD} = +1\,560 \text{ lb} \blacktriangleleft$$

Los signos obtenidos indican que el sentido supuesto para F_{CD} fue correcto y que el sentido supuesto para F_{AB} fue incorrecto. Ahora, sumando componentes *x*,

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \quad 600 \text{ lb} + \tfrac{12}{13}(-1\,040 \text{ lb}) + \tfrac{12}{13}(+1\,560 \text{ lb}) + E_x = 0$$
$$E_x = -1\,080 \text{ lb} \qquad \mathbf{E}_x = 1\,080 \text{ lb}\leftarrow \blacktriangleleft$$

Cuerpo libre: armazón completo. Como ya se ha determinado $\mathbf{E}_x$ se puede regresar al diagrama de cuerpo libre para el armazón completo y escribir

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \quad 600 \text{ lb} - 1\,080 \text{ lb} + F_x = 0$$
$$F_x = +480 \text{ lb} \qquad \mathbf{F}_x = 480 \text{ lb}\rightarrow \blacktriangleleft$$



***Cuerpo libre: elemento BDF* (comprobación).** Se pueden comprobar los cálculos realizados verificando que las fuerzas que actúan sobre el elemento *BDF* satisfacen la ecuación $\Sigma M_B = 0$.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = -\left(\tfrac{12}{13}F_{CD}\right)(2.5 \text{ ft}) + (F_x)(7.5 \text{ ft})$$
$$= -\tfrac{12}{13}(1\,560 \text{ lb})(2.5 \text{ ft}) + (480 \text{ lb})(7.5 \text{ ft})$$
$$= -3\,600 \text{ lb} \cdot \text{ft} + 3\,600 \text{ lb} \cdot \text{ft} = 0 \qquad \text{(queda comprobado)}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se aprendió a analizar *armazones que contienen uno o más elementos sujetos a la acción de fuerzas múltiples*. En los problemas propuestos que aparecen a continuación se pedirá calcular las reacciones externas ejercidas sobre el armazón y las fuerzas internas que mantienen unidos a sus elementos.

Cuando se resuelven problemas que involucran armazones que contienen uno o más elementos sujetos a la acción de fuerzas múltiples, se deben seguir los siguientes pasos:

1. Dibujar un diagrama de cuerpo libre del armazón completo. Se usa este diagrama de cuerpo libre para calcular, en la medida de lo posible, las reacciones en los apoyos. (En el problema resuelto 6.6 sólo se pudieron encontrar dos de las cuatro componentes de reacción a partir del diagrama de cuerpo libre del armazón completo.)

2. Desensamblar el armazón y dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada uno de sus elementos.

3. Considerar primero a los elementos sujetos a dos fuerzas, se aplican fuerzas iguales y opuestas a cada uno de los elementos sujetos a dos fuerzas en los puntos en que éstos se conectan a otro elemento. Si el elemento sujeto a dos fuerzas es un elemento recto, dichas fuerzas estarán dirigidas a lo largo del eje del elemento. Si en este momento no se puede decidir si un elemento está en tensión o en compresión, se *supone* que el elemento está en tensión y se *dirigen ambas fuerzas hacia fuera del elemento*. Como estas fuerzas tienen la misma magnitud desconocida, a ambas se les da el *mismo nombre* y, para evitar cualquier confusión posterior, *no se usa un signo positivo o un signo negativo*.

4. Después se consideran los elementos sujetos a fuerzas múltiples. Para cada uno de estos elementos, se muestran todas las fuerzas que actúan sobre el mismo, incluyendo *las cargas aplicadas, las reacciones y las fuerzas internas en las conexiones*. Se debe indicar la magnitud y dirección de cualquier reacción o componente de reacción que se encontró anteriormente a partir del diagrama de cuerpo libre para el armazón completo.

a) Donde un elemento sujeto a fuerzas múltiples está conectado a un elemento sujeto a dos fuerzas, se debe aplicar al elemento sujeto a fuerzas múltiples una fuerza *igual y opuesta* a la fuerza dibujada en el diagrama de cuerpo libre correspondiente al elemento sujeto a dos fuerzas, *asignándole el mismo nombre*.

b) Donde un elemento sujeto a fuerzas múltiples está conectado a otro elemento sujeto a fuerzas múltiples, se usan *componentes horizontales y verticales* para representar a las fuerzas internas que actúan en ese punto, puesto que ni la magnitud ni la dirección de dichas fuerzas es conocida. La dirección que se selecciona para cada una de las dos componentes de fuerza ejercidas sobre el primer elemento sujeto a fuerzas múltiples es arbitraria, pero *se deben aplicar componentes de fuerza iguales y opuestas representadas con el mismo nombre* del otro elemento sujeto a fuerzas múltiples. *No se debe usar un signo positivo o negativo.*

5. ***Ahora se pueden determinar las fuerzas internas,*** al igual que *aquellas reacciones* que aún no se han determinado.

a) ***El diagrama de cuerpo libre*** de cada uno de los elementos sujetos a fuerzas múltiples puede proporcionar *tres ecuaciones de equilibrio*.

b) ***Para simplificar la solución,*** se debe buscar una forma de escribir una ecuación que involucre a una sola incógnita. Si se puede localizar *un punto donde se intersequen todas las componentes de fuerza desconocidas excepto una,* se obtendrá una ecuación con una sola incógnita sumando momentos con respecto a dicho punto. *Si todas las fuerzas desconocidas son paralelas excepto una,* se obtendrá una ecuación con una sola incógnita si se suman componentes de fuerza en una dirección perpendicular a la de las fuerzas paralelas.

c) ***Como la dirección de cada una de las fuerzas desconocidas se seleccionó de manera arbitraria,*** no se puede determinar si la suposición hecha fue correcta hasta que se haya completado la solución. Para llevar a cabo esto, se debe considerar el *signo* del valor encontrado para cada una de las incógnitas; un signo *positivo* significa que la dirección que se seleccionó fue *correcta*; un signo *negativo* significa que la dirección es opuesta a la dirección que se supuso.

6. ***Para ser más efectivo y eficiente*** a medida que se procede con la solución, se deben observar las siguientes reglas:

a) ***Si se puede encontrar una ecuación que involucre a una sola incógnita,*** se debe escribir esa ecuación y *resolverla para esa incógnita*. De inmediato se debe *reemplazar* esa incógnita *por el valor que se encontró* en cualquier lugar que aparezca en los otros diagramas de cuerpo libre. Este proceso se debe repetir buscando ecuaciones de equilibrio que involucren a una sola incógnita hasta que se hayan determinado todas las fuerzas internas y todas las reacciones desconocidas.

b) ***Si no se puede encontrar una ecuación que involucre a una sola incógnita,*** se tendrá que *resolver un par de ecuaciones simultáneas*. Antes de llevar a cabo esto, se debe verificar que se han mostrado los valores de todas las reacciones que se obtuvieron a partir del diagrama de cuerpo libre para el armazón completo.

c) ***El número total de ecuaciones*** de equilibrio para el armazón completo y para los elementos individuales *será mayor que el número de fuerzas y reacciones desconocidas*. Una vez que se han encontrado todas las reacciones y todas las fuerzas internas, se pueden emplear las ecuaciones que no se utilizaron para comprobar la exactitud de los cálculos realizados.

Problemas

6.76 Determine las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre el elemento *ABCD* del ensamble que muestra la figura.

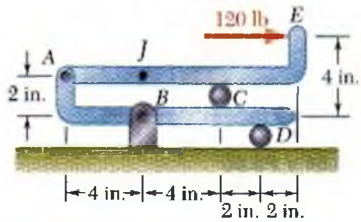


Figura P6.76

6.77 Para el armazón y la carga mostrados en la figura, determine la fuerza que actúa sobre el elemento *ABC* en *a*) *B*, *b*) *C*.

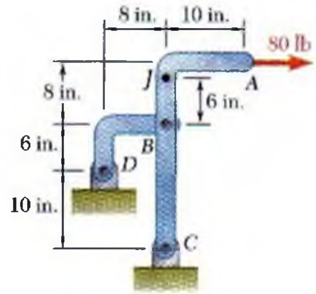


Figura *P6.77*

6.78 Para el armazón y la carga mostrados en la figura, determine las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre el elemento *DECF*.

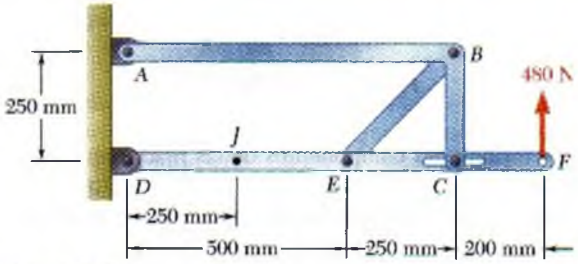


Figura P6.78

6.79 Resuelva el problema 6.78 suponiendo que la carga de 480 N se reemplaza por un par, en el mismo sentido que las manecillas del reloj, con magnitud de 400 N · m aplicado al elemento *DECF* en el punto *F*.

6.80 Un aro con radio de 8 in. está unido mediante un pasador al punto *A* y se sostiene por medio de la barra *BC*, la cual se fija en el punto *C* con un collarín que puede moverse a lo largo del aro. Para la posición en que $\theta = 35°$, determine *a*) la fuerza presente en la barra *BC*, *b*) la reacción en *A*.

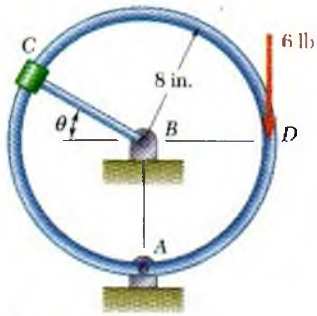


Figura P6.80

6.81 Resuelva el problema 6.80 cuando $\theta = -20°$.

6.82 Para el armazón y la carga mostrados en la figura, determine las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre el elemento *ABCD*.

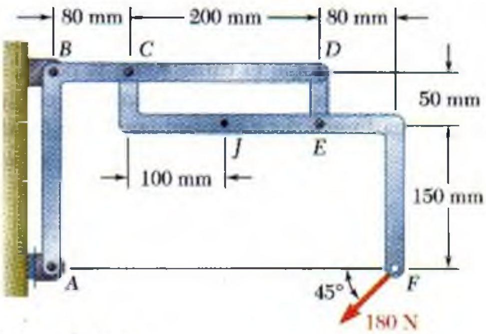


Figura P6.82

6.83 Resuelva el problema 6.82 suponiendo que la carga de 180 N se reemplaza por un par de 60 N · m de magnitud, el cual actúa en el mismo sentido que las manecillas del reloj y se aplica sobre el elemento *CEF* en el punto *F*.

6.84 Determine las componentes de las reacciones en *A* y *E* cuando se aplica una fuerza de 24 lb dirigida verticalmente hacia abajo en *a*) *B*, *b*) *D*.

6.85 Determine las componentes de las reacciones en *A* y *E* cuando se aplica una fuerza de 320 N dirigida verticalmente hacia abajo en *a*) *B*, *b*) *D*.

6.86 Determine las componentes de las reacciones en *A* y *E* si el armazón está cargado con un par de 192 lb · in. de magnitud, el cual actúa en sentido contrario al de las manecillas del reloj y se aplica en *a*) *B*, *b*) *D*.

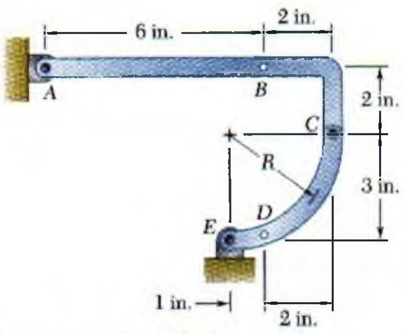


Figura P6.84 y P6.86

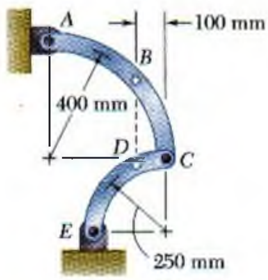


Figura P6.85 y *P6.87*

6.87 Determine las componentes de las reacciones en *A* y *E* si el armazón está cargado con un par de 120 N · m de magnitud, el cual actúa en sentido contrario al de las manecillas del reloj y se aplica en *a*) *B*, *a*) *D*.

6.88 Si se aplica sobre el armazón un par que actúa en el mismo sentido que las manecillas del reloj y tiene magnitud de 180 lb · ft, determine todas las fuerzas ejercidas sobre el elemento *AI* en *a*) el punto *D*, *b*) el punto *E*.

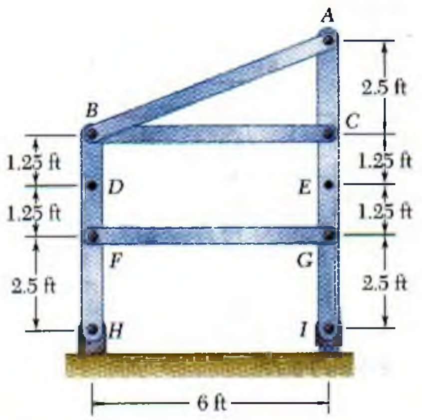


Figura P6.88

6.89 La carga de 120 N que se muestra en la figura puede moverse a lo largo de su línea de acción y, por tanto, aplicarse en *A*, *D* o *E*. Determine las componentes de las reacciones en *B* y *F* si la carga de 120 N se aplica en *a*) *A*, *b*) *D*, *c*) *E*.

6.90 La carga de 120 N se elimina y un par de 48 N · m que actúa en el mismo sentido que las manecillas del reloj se aplica, sucesivamente, en *A*, *D* y *E*. Determine las componentes de las reacciones en *B* y *F* cuando el par se aplica en *a*) *A*, *b*) *D*, *c*) *E*.

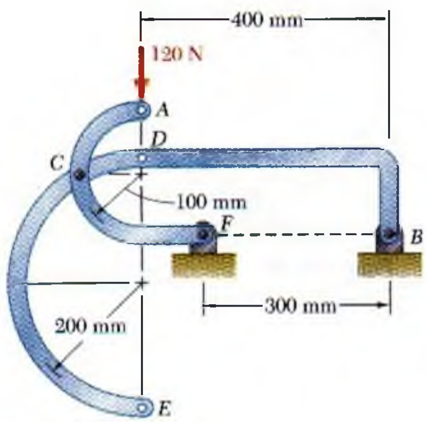


Figura P6.89 y *P6.90*

6.91 *a*) Muestre que cuando un armazón sostiene una polea en *A*, la carga equivalente del armazón y de cada una de las partes que lo constituyen puede obtenerse quitando la polea y aplicando en *A* dos fuerzas iguales y paralelas a las fuerzas que ejerce el cable sobre la polea. *b*) Muestre que si uno de los extremos del cable se fija al armazón en el punto *B*, también debe aplicarse en *B* una fuerza de magnitud igual a la tensión presente en el cable.

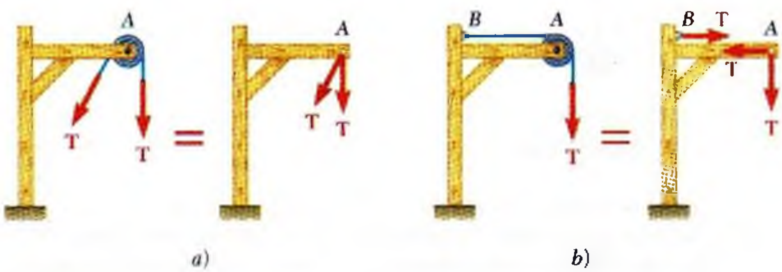


Figura P6.91

6.92 Dos tubos de 10 in. de diámetro (tubo *1* y tubo *2*) se sostienen cada 10 ft mediante un armazón pequeño como el que se muestra en la figura. Si la masa combinada por unidad de longitud de cada tubo y su contenido es de 22 lb/ft y se suponen superficies sin fricción, determine las componentes de las reacciones en A y E cuando $a = 0$.

6.93 Resuelva el problema 6.92 cuando $a = 14$ in.

6.94 Si la polea mostrada en la figura tiene un radio de 60 mm, determine las componentes de las reacciones en A y E.

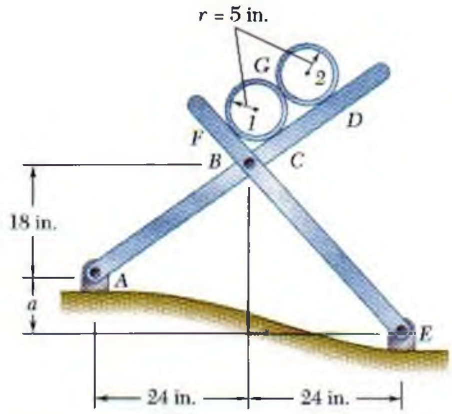


Figura P6.92

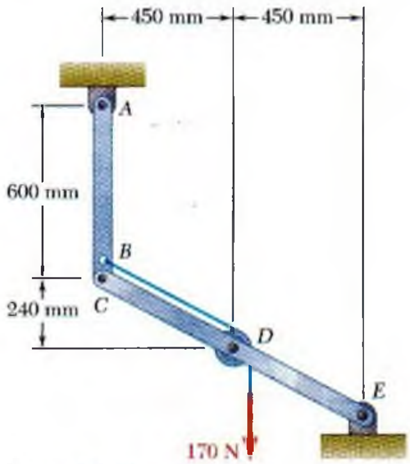


Figura P6.94

6.95 Si la polea que muestra la figura tiene un radio de 75 mm, determine las componentes de las reacciones en A y B.

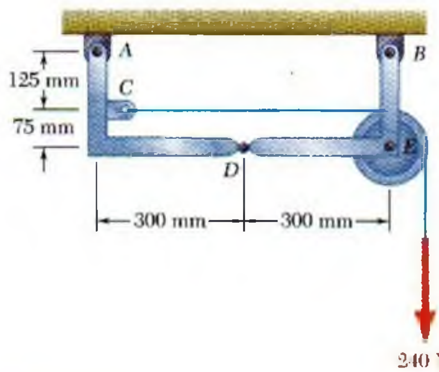


Figura P6.95

6.96 El tractor y las unidades transportadoras mostradas en la figura se conectan mediante un perno vertical localizado 60 in. detrás de las ruedas del tractor, y la distancia desde C hasta D es de 30 in. El centro de gravedad del tractor de 50 kips está localizado en G_m, mientras que los centros de gravedad de la unidad transportadora de 18 kips y de la carga de 16 kips se localizan, respectivamente, en G_c y G_l. Si el tractor está en reposo sin aplicar sus frenos, determine *a*) las reacciones en cada una de las cuatro ruedas, *b*) las fuerzas ejercidas sobre el tractor en C y D.

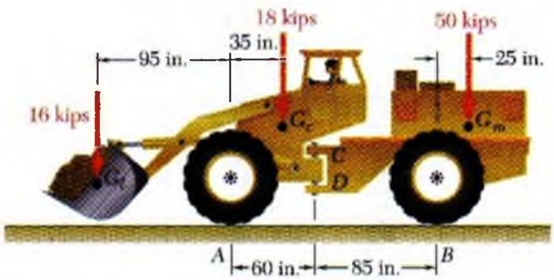
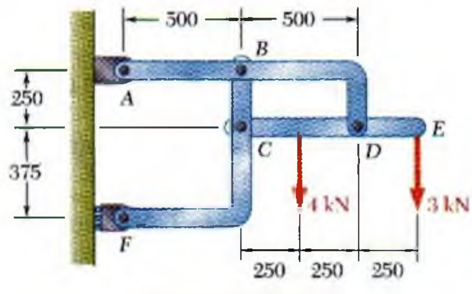


Figura P6.96

6.97 Resuelva el problema 6.96 suponiendo que se elimina la carga de 16 kips.

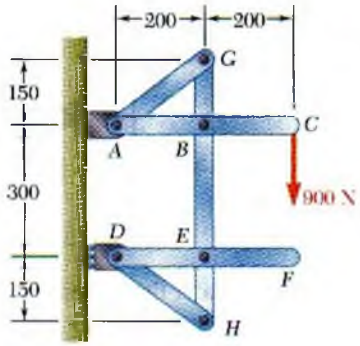
6.98 Para el armazón y la carga mostrados en la figura, determine las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre el elemento *ABD*.



Dimensiones en mm

Figura P6.98

6.99 Para el armazón y la carga mostrados en la figura, determine las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre el elemento *GBEH*.



Dimensiones en mm

Figura *P6.99*

6.100 Para el armazón y la carga mostrados en la figura, determine las componentes de las fuerzas que actúan sobre el elemento *ABC* en *B* y *C*.

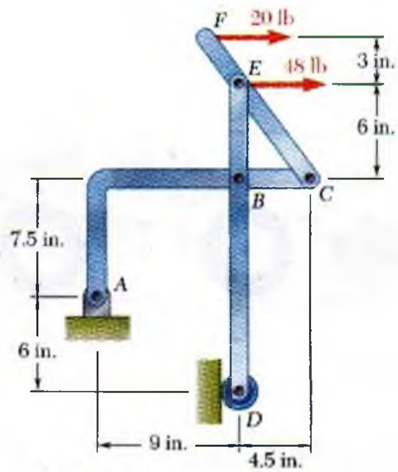


Figura P6.100

6.101 Para el armazón y la carga mostrados en la figura, determine las componentes de las fuerzas que actúan sobre el elemento ABC en B y C.

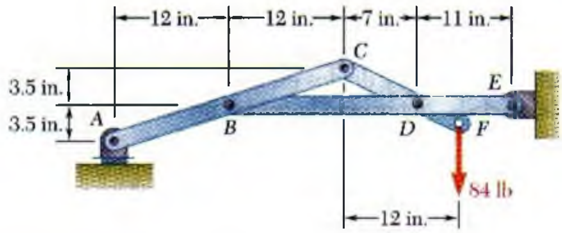


Figura P6.101

6.102 Una mujer de 56 kg se para en el punto C de la escalera plegable mostrada en la figura. La mitad del peso de la mujer es soportado por las patas que se observan en la vista lateral. Determine las componentes de la fuerza ejercida en E sobre la pata BE suponiendo que el borde inferior de cada pata no es paralelo al piso, por lo que se produce rodamiento en los puntos A y B. No tome en cuenta la masa de la escalera, y suponga que el piso está libre de fricción.

6.103 Una mujer de 56 kg se para en el punto C de la escalera plegable mostrada en la figura. La mitad del peso de la mujer es soportado por las patas que se observan en la vista lateral. El borde inferior de cada pata no es paralelo al piso, por lo que puede producirse rodamiento de cuatro formas: en A y B, en A y B', en A' y B, o en A' y B'. No tome en cuenta la masa de la escalera y suponga que el piso está libre de fricción para determinar *a*) la combinación de puntos de rodamiento para la que la fuerza en el elemento FG es máxima, *b*) el valor correspondiente de la fuerza en FG.

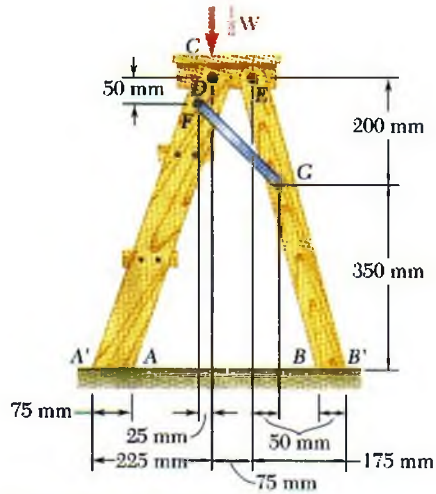


Figura *P6.102* y P6.103

6.104 El eje del arco ABC con tres articulaciones es una parábola con vértice en B. Si $P = 14$ kips y $Q = 21$ kips, determine *a*) las componentes de la reacción en A, *b*) las componentes de la fuerza ejercida sobre el segmento AB en B.

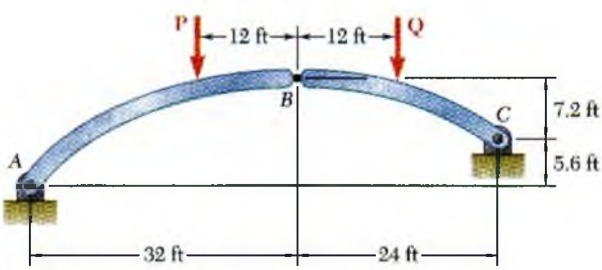


Figura P6.104 y P6.105

6.105 El eje del arco ABC con tres articulaciones es una parábola con vértice en B. Si $P = 21$ kips y $Q = 14$ kips, determine *a*) las componentes de la reacción en A, *b*) las componentes de la fuerza ejercida sobre el segmento AB en B.

6.106 Para el armazón y la carga mostrados en la figura, determine *a*) la reacción en D, *b*) la fuerza en elemento BF, si $P = 411$ lb y $Q = 0$.

6.107 Para el armazón y la carga mostrados en la figura, determine *a*) la reacción en D, *b*) la fuerza en elemento BF, si $P = 0$ y $Q = 274$ lb.

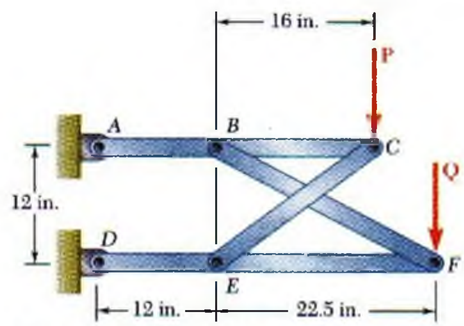


Figura P6.106 y *P6.107*

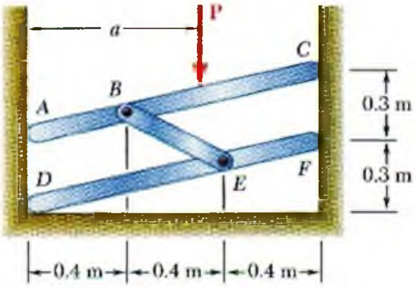


Figura P6.108

6.108 Dos elementos paralelos, *ABC* y *DEF*, se colocan entre dos paredes y se conectan mediante el eslabón *BE*. Sin considerar la fricción entre los elementos y las paredes, determine el rango de valores de la distancia *a* para los cuales puede soportarse la carga **P**.

6.109 a 6.111 El armazón que se muestra en la figura consta de los elementos *ABCD* y *EFGH*, y de dos eslabones que conectan dichos elementos. Para la carga dada, determine la fuerza presente en cada eslabón.

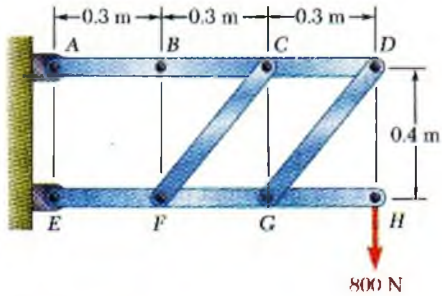


Figura P6.109

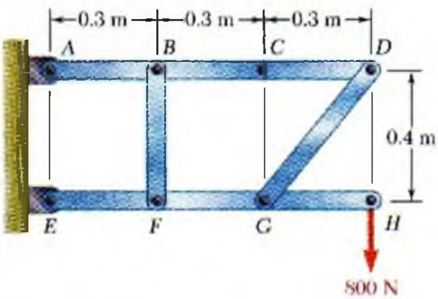


Figura P6.110

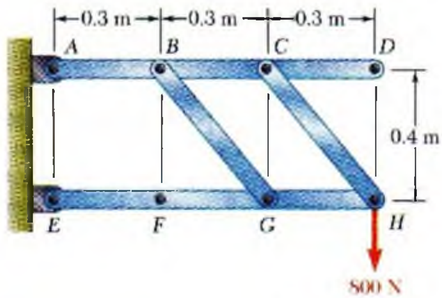


Figura P6.111

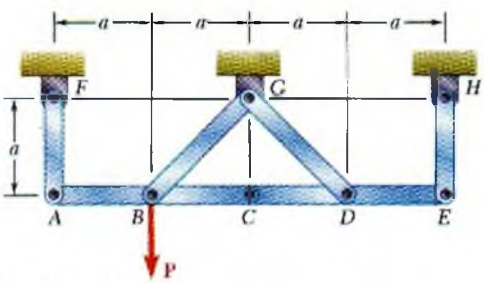


Figura *P6.112*

6.112 Los elementos *ABC* y *CDE* se articulan en el punto *C* y se sostienen mediante los cuatro eslabones *AF*, *BG*, *GD* y *EH*. Para la carga mostrada, determine la fuerza presente en cada eslabón.

6.113 Tres vigas de madera, cada una con longitud de $3a$, se clavan entre sí para formar el sistema de soporte mostrado en la figura. Suponiendo que en las conexiones sólo se ejercen fuerzas verticales, determine las reacciones verticales en *A*, *D* y *F*.

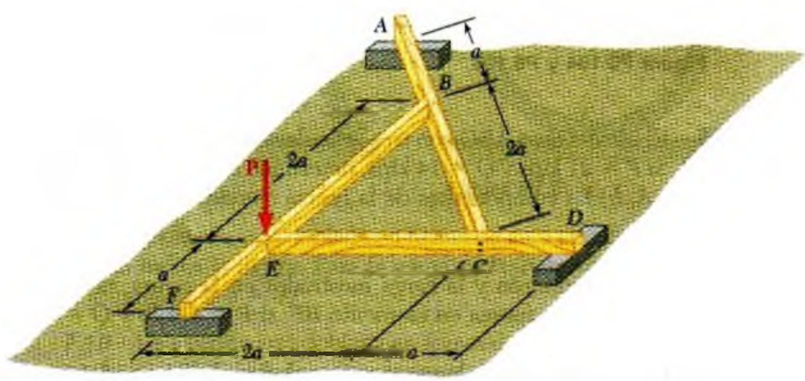


Figura P6.113

6.114 Cuatro vigas de madera, cada una con longitud de $2a$, se clavan entre sí en sus puntos medios para formar el sistema de soporte mostrado en la figura. Si en las conexiones sólo se ejercen fuerzas verticales, determine las reacciones verticales en A, D, E y H.

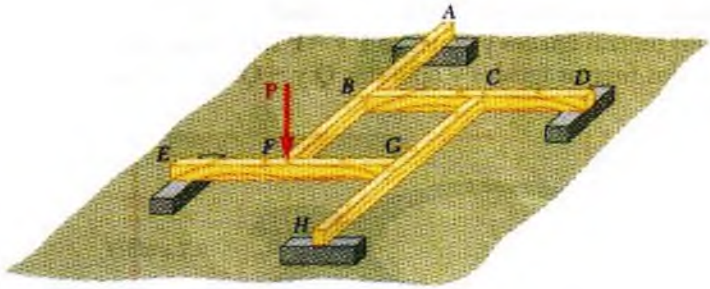


Figura P6.114

6.115 a 6.117 Cada uno de los armazones que se muestran en la figura consta de dos elementos en forma de L conectados mediante dos eslabones rígidos. Para cada armazón, determine las reacciones en los apoyos e indique si es o no rígido.

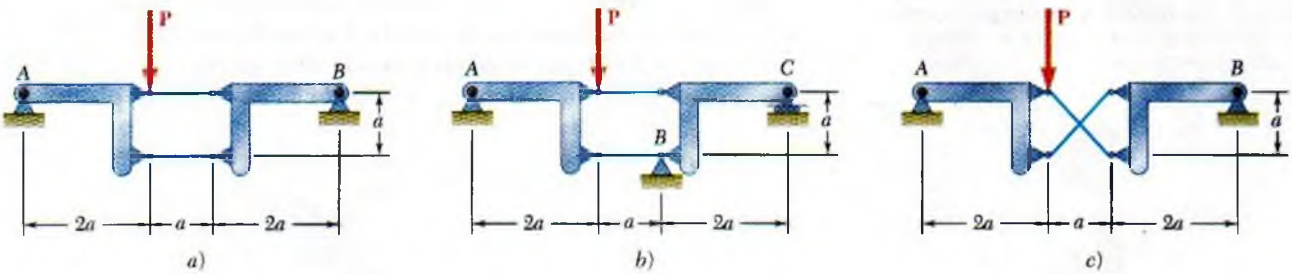


Figura P6.115

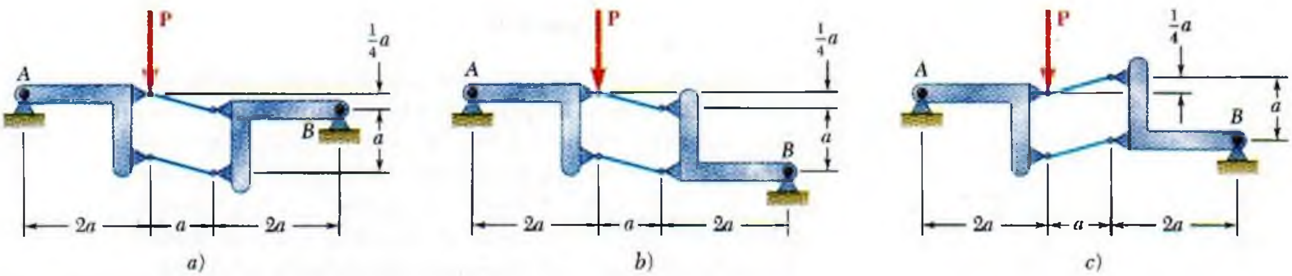


Figura P6.116

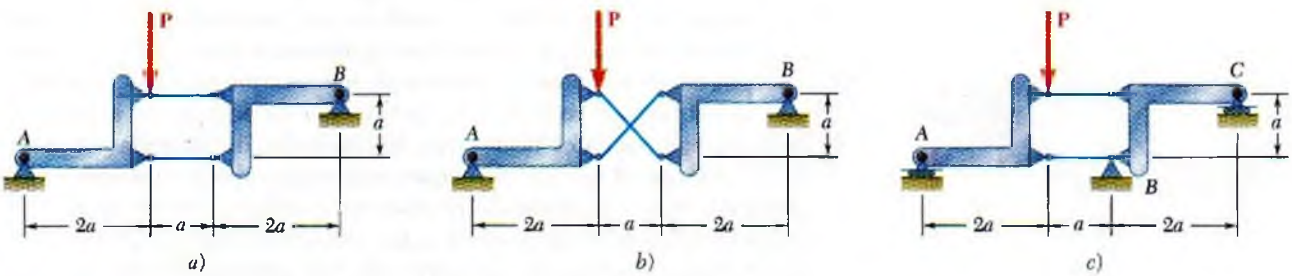


Figura P6.117



Fotografía 6.5 La lámpara que se muestra puede colocarse en muchas posiciones. La fuerza en sus resortes y las fuerzas internas en sus nodos se pueden determinar mediante la consideración de varios cuerpos libres.

6.12. MÁQUINAS

Las máquinas son estructuras diseñadas para transmitir y modificar fuerzas. No importa si éstas son herramientas simples o incluyen mecanismos complicados, su propósito principal es transformar *fuerzas de entrada* en *fuerzas de salida*. Por ejemplo, considere unas pinzas de corte que se emplean para cortar un alambre (figura 6.22*a*). Si se aplican dos fuerzas iguales y opuestas **P** y −**P** sobre sus mangos, éstas ejercerán dos fuerzas iguales y opuestas **Q** y −**Q** sobre el alambre (figura 6.22*b*).

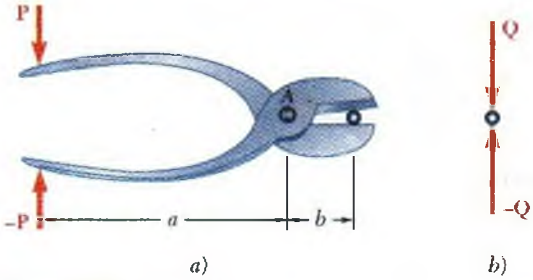


Figura 6.22

Para determinar la magnitud Q de las fuerzas de salida cuando se conoce la magnitud P de las fuerzas de entrada (o a la inversa, para determinar P cuando se conoce Q), se dibuja un diagrama de cuerpo libre de las pinzas *por sí solas*, mostrando las fuerzas de entrada **P** y −**P** y las *reacciones* −**Q** y **Q** que el alambre ejerce sobre las pinzas (figura 6.23).



Figura 6.23

Sin embargo, como las pinzas forman una estructura que no es rígida, se debe utilizar una de las partes que la constituyen como un cuerpo libre para poder determinar las fuerzas desconocidas. Por ejemplo, en la figura 6.24*a*, si se toman momentos con respecto a A, se obtiene la relación $Pa = Qb$, la cual define a la magnitud de Q en términos de P o a la magnitud de P en términos de Q. Se puede emplear el mismo diagrama de cuerpo libre para determinar las componentes de la fuerza interna en A; de esta forma, se encuentra que $A_x = 0$ y $A_y = P + Q$.

En el caso de máquinas más complejas, es necesario utilizar varios diagramas de cuerpo libre y, posiblemente, se tendrán que resolver ecuaciones simultáneas que involucren fuerzas múltiples internas. Los cuerpos libres se deben seleccionar de manera que incluyan a las fuerzas de entrada y a las reacciones de las fuerzas de salida, y el número total de componentes de fuerzas desconocidas involucradas no debe ser mayor que el número de ecuaciones independientes que están disponibles. Antes de tratar de resolver un problema, es recomendable conocer si la estructura considerada es determinada o no. Sin embargo, no tiene caso discutir la rigidez de una máquina puesto que ésta incluye partes móviles y, por ende, *no debe ser rígida*.

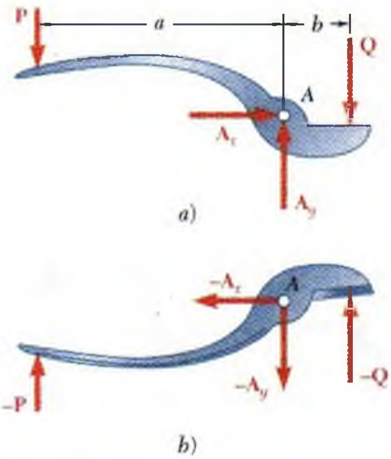
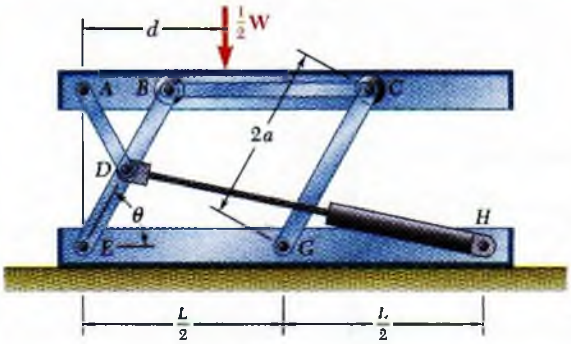


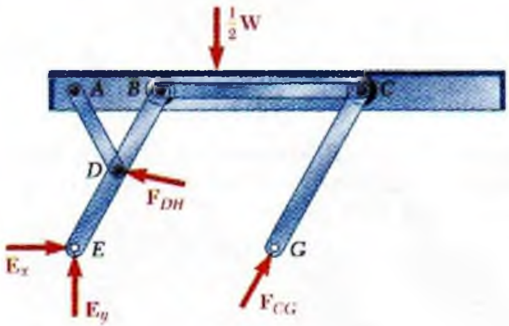
Figura 6.24

PROBLEMA RESUELTO 6.7

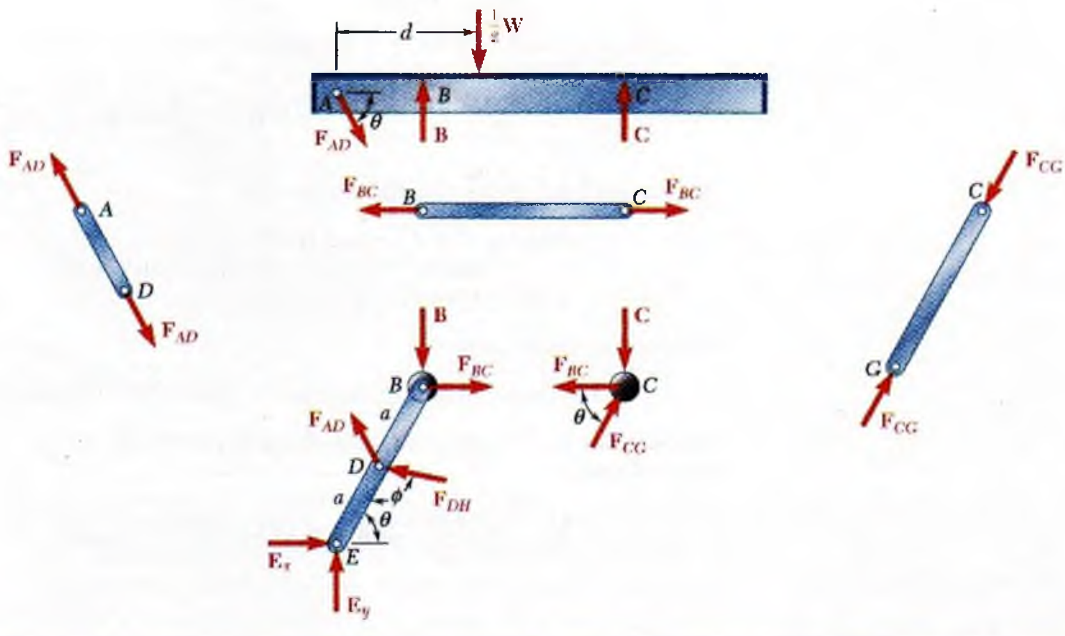


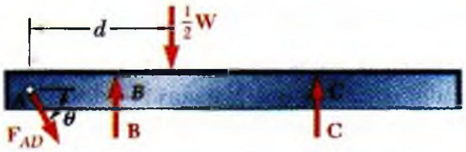
Un elevador hidráulico se emplea para levantar una caja de 1 000 kg. El elevador consta de una plataforma y dos eslabones idénticos sobre los cuales los cilindros hidráulicos ejercen fuerzas iguales. (En la figura sólo se muestra uno de los cilindros y uno de los eslabones.) Cada uno de los elementos *EDB* y *CG* tienen una longitud de $2a$ y el elemento *AD* está sujeto con un perno en el punto medio de *EDB*. Si la caja se coloca sobre la plataforma de modo que la mitad de su peso sea soportado por el sistema que se muestra, determine la fuerza ejercida por cada cilindro para levantar la caja cuando $\theta = 60°$, $a = 0.70$ m y $L = 3.20$ m. Demuestre que el resultado obtenido es independiente de la distancia *d*.

SOLUCIÓN



La máquina en consideración consta de la plataforma y del eslabón. Su diagrama de cuerpo libre incluye una fuerza de entrada $\mathbf{F}_{DH}$ ejercida por el cilindro, al peso $\frac{1}{2}\mathbf{W}$, y a reacciones en *E* y *G*, cuyas direcciones se muestran en la figura. Como están involucradas más de tres incógnitas, no se utilizará este diagrama de cuerpo libre. Se desensambla el mecanismo y se dibuja un diagrama de cuerpo libre para cada una de las partes que lo constituyen. Se observa que *AD*, *BC* y *CG* son elementos sujetos a dos fuerzas. Ya se supuso que el elemento *CG* está en compresión; ahora se supone que los elementos *AD* y *BC* están en tensión y las fuerzas ejercidas sobre éstos se dirigen como se muestra en la figura. Se utilizarán vectores iguales y opuestos para representar las fuerzas ejercidas por los elementos sujetos a dos fuerzas sobre la plataforma, sobre el elemento *BDE* y sobre el rodillo *C*.



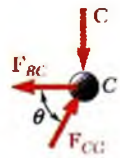


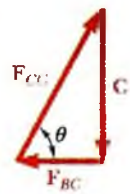
Cuerpo libre: plataforma *ABC*.

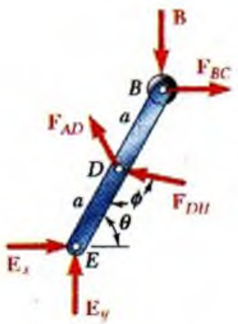
$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0$: $\quad F_{AD}\cos\theta = 0 \qquad F_{AD} = 0$

$+\uparrow\Sigma F_y = 0$: $\quad B + C - \frac{1}{2}W = 0 \qquad B + C = \frac{1}{2}W \qquad (1)$

Cuerpo libre: rodillo *C*. Se dibuja un triángulo de fuerzas y se obtiene $F_{BC} = C\cot\theta$.







Cuerpo libre: elemento *BDE*. Recordando que $F_{AD} = 0$,

$+\circlearrowleft\Sigma M_E = 0$: $\quad F_{DH}\cos(\phi - 90°)a - B(2a\cos\theta) - F_{BC}(2a\,\text{sen}\,\theta) = 0$

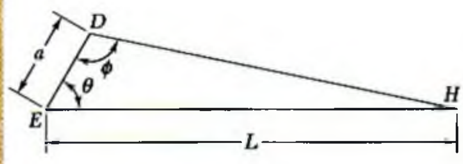
$$F_{DH}a\,\text{sen}\,\phi - B(2a\cos\theta) - (C\cot\theta)(2a\,\text{sen}\,\theta) = 0$$

$$F_{DH}\,\text{sen}\,\phi - 2(B + C)\cos\theta = 0$$

Recordando la ecuación (1), se tiene que

$$F_{DH} = W\frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\phi} \qquad (2)$$

y se observa que *el resultado obtenido es independiente de d.* ◀



Primero se aplica la ley de los senos al triángulo *EDH*, se escribe

$$\frac{\text{sen}\,\phi}{EH} = \frac{\text{sen}\,\theta}{DH} \qquad \text{sen}\,\phi = \frac{EH}{DH}\text{sen}\,\theta \qquad (3)$$

Ahora, con la ley de los cosenos se tiene que

$$(DH)^2 = a^2 + L^2 - 2aL\cos\theta$$
$$= (0.70)^2 + (3.20)^2 - 2(0.70)(3.20)\cos 60°$$
$$(DH)^2 = 8.49 \qquad DH = 2.91\text{ m}$$

También se observa que

$$W = mg = (1\,000\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2) = 9\,810\text{ N} = 981\text{ kN}$$

Sustituyendo en (2) el valor de sen ϕ obtenido en (3) y con los datos numéricos, se escribe

$$F_{DH} = W\frac{DH}{EH}\cot\theta = (9.81\text{ kN})\frac{2.91\text{ m}}{3.20\text{ m}}\cot 60°$$

$F_{DH} = 5.15$ kN ◀

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Esta lección estuvo dedicada al análisis de *máquinas*. Como éstas están diseñadas para transmitir o modificar fuerzas, siempre contienen partes móviles. Sin embargo, las máquinas que se considerarán aquí siempre estarán en reposo y se estará trabajando con el conjunto de *fuerzas requeridas para mantener el equilibrio de la máquina*.

Las fuerzas conocidas que actúan sobre una máquina reciben el nombre de *fuerzas de entrada*. *Una máquina transforma las fuerzas de entrada en fuerzas de salida*, como las fuerzas de corte aplicadas por las pinzas de la figura 6.22. Las fuerzas de salida se determinan encontrando las fuerzas iguales y opuestas a las fuerzas de salida que se deben aplicar sobre la máquina para mantener su equilibrio.

En la lección previa se analizaron armazones; ahora se utilizará casi el mismo procedimiento para analizar máquinas:

1. ***Dibujar un diagrama de cuerpo libre de la máquina completa*** y utilizarlo para determinar tantas fuerzas desconocidas ejercidas sobre la máquina como sea posible.

2. ***Desensamblar la máquina y dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada uno de los elementos que la constituyen.***

3. ***Considere primero a los elementos sujetos a dos fuerzas***, se aplican fuerzas iguales y opuestas a cada uno de los elementos sujetos a dos fuerzas en aquellos puntos donde éstos se conectan a otros elementos. Si en este momento no se puede establecer si el elemento está en tensión o en compresión, sólo se *supone* que el elemento está en tensión y se *dirigen ambas fuerzas hacia afuera del elemento*. Como estas fuerzas tienen la misma magnitud desconocida, *a ambas se les asigna el mismo nombre*.

4. ***Después se consideran los elementos sujetos a fuerzas múltiples.*** Para cada uno de estos elementos se deben mostrar todas las fuerzas que actúan sobre el mismo, incluyendo cargas y fuerzas aplicadas, reacciones y fuerzas internas en las conexiones.

    a) ***Donde un elemento sujeto a fuerzas múltiples está conectado a un elemento sujeto a dos fuerzas***, se aplica a aquella fuerza *igual y opuesta* a la fuerza dibujada en el diagrama de cuerpo libre de éste, *asignándole el mismo nombre*.

    b) ***Donde un elemento sujeto a fuerzas múltiples está conectado a otro elemento sujeto a fuerzas múltiples***, se usan *componentes horizontales y verticales* para representar a las fuerzas internas en dicho punto. Las direcciones que se seleccionan para cada una de las dos componentes de fuerza ejercidas sobre el primer elemento sujeto a fuerzas múltiples son arbitrarias, pero *se deben aplicar componentes de fuerza iguales y opuestas y con el mismo nombre* al otro elemento.

5. ***Se pueden escribir ecuaciones de equilibrio*** después de que se han terminado los diagramas de cuerpo libre.

    a) ***Para simplificar la solución***, siempre que sea posible se deben escribir y resolver ecuaciones de equilibrio que involucren a una sola incógnita.

    b) ***Como la dirección de cada una de las fuerzas desconocidas se seleccionó de manera arbitraria***, al final de la solución se debe determinar si la suposición fue correcta o no. Para esto *se considera el signo* del valor encontrado para cada una de las incógnitas. Un signo *positivo* indica que la suposición fue correcta y un signo *negativo* indica que la suposición fue incorrecta.

6. ***Por último, se debe verificar la solución*** sustituyendo los resultados obtenidos en una ecuación de equilibrio que no se haya utilizado previamente.

Problemas

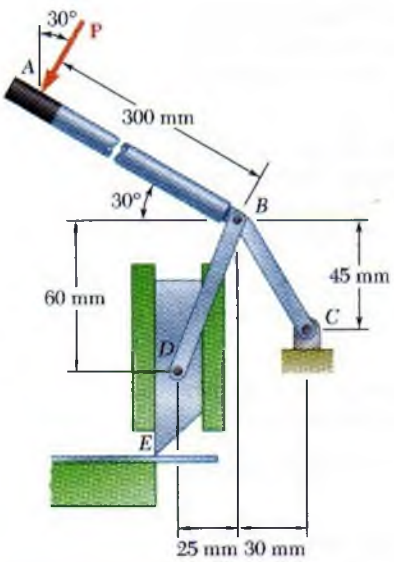


Figura P6.118 y P6.119

6.118 La guillotina que muestra la figura se usa para cortar láminas para tarjetas de circuitos electrónicos. Si $P = 400$ N, determine *a*) la componente vertical de la fuerza ejercida sobre la cuchilla de corte en *D*, *b*) la reacción en *C*.

6.119 La guillotina mostrada en la figura se usa para cortar láminas para tarjetas de circuitos electrónicos. Sin tomar en cuenta el espesor de la cuchilla de corte, y sabiendo que se requiere una fuerza cortante vertical de 3 kN sobre *E* para cortar la lámina, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P** aplicada, *b*) la reacción en *C*.

6.120 La prensa que muestra la figura se utiliza para grabar un sello pequeño en *E*. Si $P = 250$ N, determine *a*) la componente vertical de la fuerza ejercida sobre el sello, *b*) la reacción en *A*.

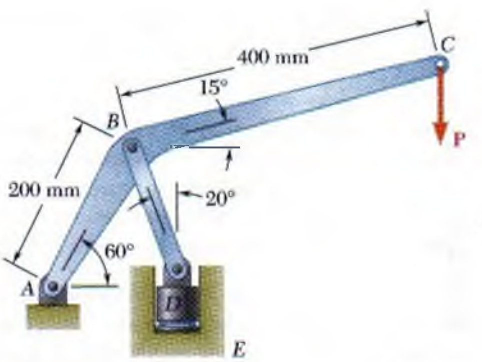


Figura *P6.120* y *P6.121*

6.121 La prensa que se muestra en la figura se utiliza para grabar un sello pequeño en *E*. Si la componente vertical de la fuerza ejercida sobre el sello debe ser de 900 N, determine *a*) la fuerza vertical **P** requerida, *b*) la reacción correspondiente en *A*.

6.122 La varilla de control *CE* pasa a través de un orificio horizontal perforado en el cuerpo de la mordaza acodada que muestra la figura. Determine *a*) la fuerza **Q** requerida para mantener la mordaza en equilibrio, *b*) la fuerza correspondiente en el eslabón *BD*.

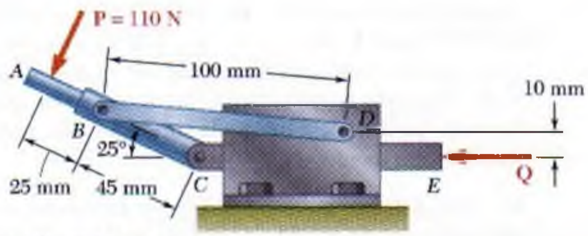


Figura P6.122

6.123 El mecanismo de candado de doble mordaza acodada que muestra la figura se utiliza para mantener al elemento G contra el apoyo. Si $\alpha = 60°$, determine la fuerza ejercida sobre G.

6.124 El mecanismo de candado de doble mordaza acodada que muestra la figura se utiliza para mantener al elemento G contra el apoyo. Si $\alpha = 75°$, determine la fuerza ejercida sobre G.

6.125 El mecanismo de doble rótula que muestra la figura se usa en una máquina sacabocados. Si los eslabones AB y BC tienen longitud de 6 in. cada uno, determine el par **M** necesario para mantener al sistema en equilibrio cuando $\phi = 20°$.

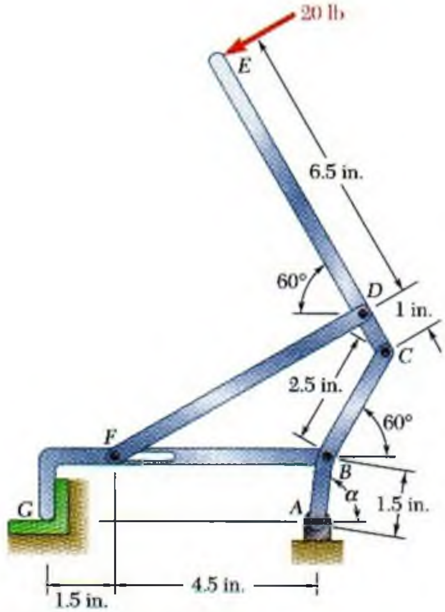


Figura P6.123 y P6.124

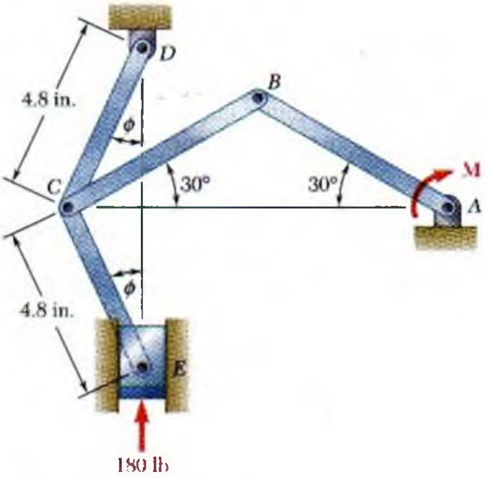


Figura P6.125 y *P6.126*

6.126 El mecanismo de doble rótula mostrado en la figura se usa en una máquina sacabocados. Si los eslabones AB y BC tienen longitud de 6 in. cada uno y $M = 660$ lb · in., determine el ángulo ϕ cuando el sistema se encuentra en equilibrio.

6.127 Una fuerza **P** de 160 N de magnitud se aplica sobre el deslizador del mecanismo motriz de cuatro barras que muestra la figura. Para cada una de las posiciones dadas, determine el par **M** necesario para mantener el equilibrio del sistema.

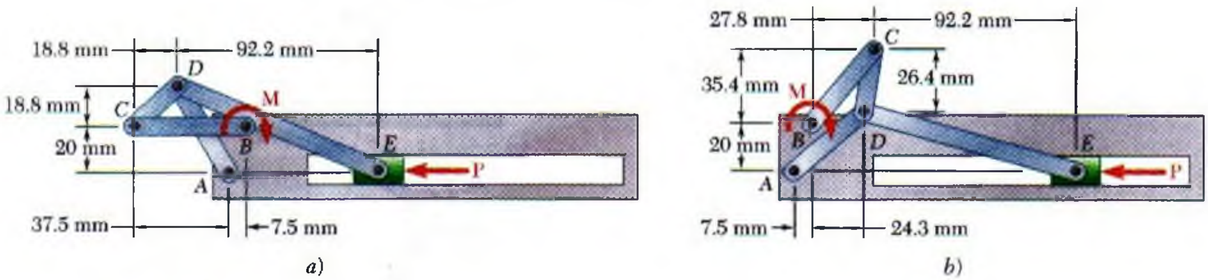


Figura P6.127 y P6.128

6.128 Un par **M** de 6 N · m de magnitud se aplica sobre el eslabón de entrada del mecanismo motriz de cuatro barras que muestra la figura. Para cada una de las posiciones dadas, determine la fuerza **P** necesaria para mantener el equilibrio del sistema.

6.129 El brazo BCD se conecta mediante pernos a un collarín en C y a la manivela AB en B. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine el par **M** necesario para mantener al sistema en equilibrio cuando $\theta = 0$.

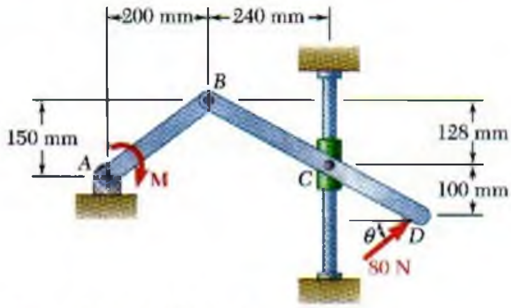


Figura P6.129 y P6.130

6.130 El brazo BCD se conecta mediante pernos a un collarín en C y a la manivela AB en B. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine el par **M** necesario para mantener al sistema en equilibrio cuando $\theta = 45°$.

6.131 y 6.132 Dos barras se conectan mediante un bloque deslizante como se muestra en la figura. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine el par $\mathbf{M}_A$ necesario para mantener al sistema en equilibrio.

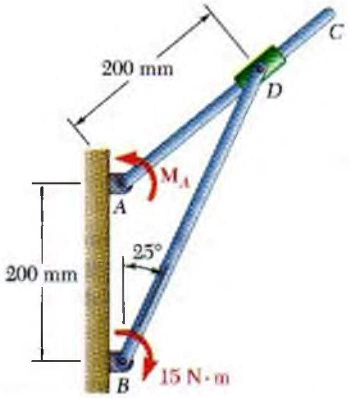


Figura P6.131

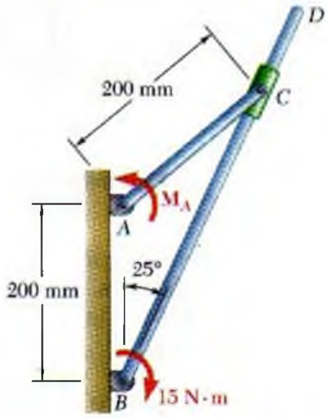


Figura P6.132

6.133 y *6.134* La barra CD está unida al collarín D y pasa a través de un collarín soldado en el extremo B de la palanca AB. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine el par **M** necesario para mantener al sistema en equilibrio cuando $\theta = 30°$.



Figura P6.133

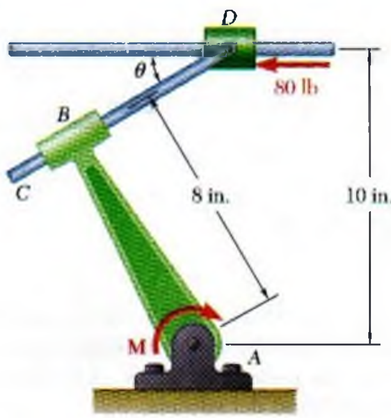


Figura *P6.134*

6.135 Un barril pequeño con peso de 250 lb es levantado mediante un par de tenazas como indica la figura. Si $a = 5$ in., determine las fuerzas ejercidas sobre la tenaza *ABD* en *B* y *D*.

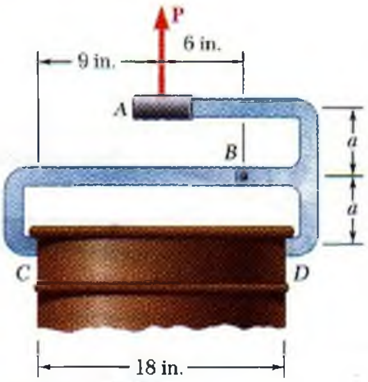


Figura *P6.135*

6.136 Las tenazas que se muestran en la figura se usan para aplicar una fuerza total de 45 kN hacia arriba en la tapa de una tubería. Determine las fuerzas ejercidas en *D* y *F* sobre la tenaza *ADF*.

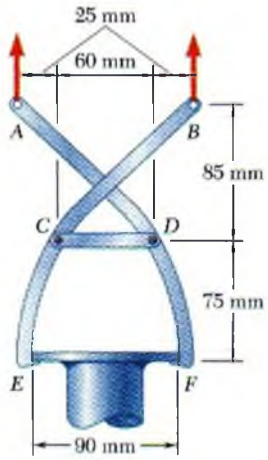


Figura P6.136

6.137 El transportador de plataformas que se muestra en la figura se usa para jalar una plataforma cargada a la parte trasera de un camión. Si $P = 2.1$ kN, determine las fuerzas ejercidas en *G* y *H* sobre la tenaza *FGH*.

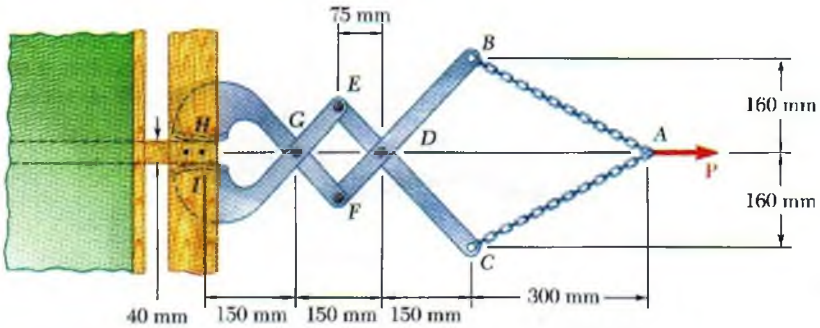


Figura P6.137

6.138 El transportador de tambores que se muestra en la figura se usa para levantar un tambor de acero. Si el peso del tambor y su contenido es de 110 lb, determine las fuerzas ejercidas en *F* y *H* sobre el elemento *DFH*.

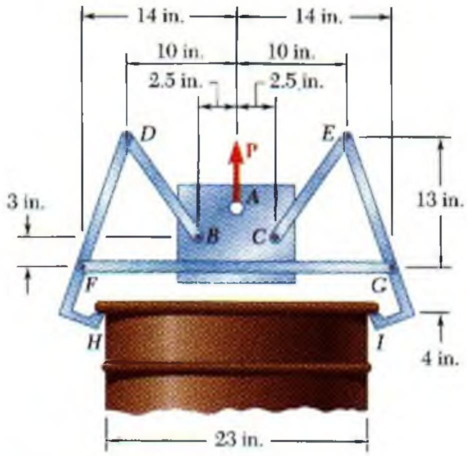


Figura *P6.138*

6.139 Un cilindro hidráulico operado manualmente fue diseñado para utilizarse en sitios donde el espacio es muy limitado. Determine la magnitud de la fuerza ejercida sobre el pistón instalado en *D* cuando se aplican dos fuerzas de 90 lb como indica la figura.

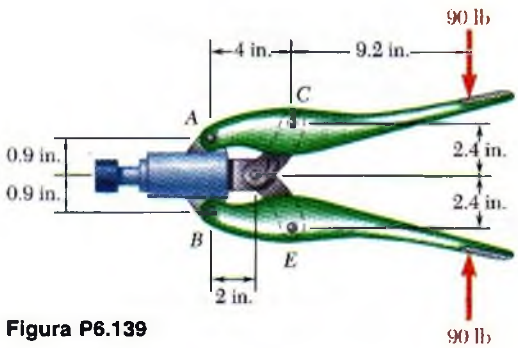


Figura P6.139

6.140 La herramienta mostrada en la figura se utiliza para apretar terminales sobre alambres eléctricos. Si un trabajador aplica fuerzas de magnitud $P = 135$ N a los mangos, determine la magnitud de las fuerzas de sujeción que se ejercen sobre la terminal.

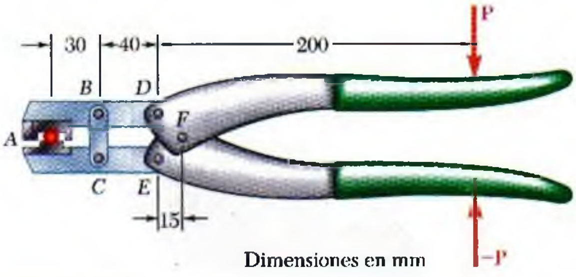


Figura P6.140

6.141 Las tijeras podadoras de palanca compuesta que se muestran en la figura pueden ajustarse mediante el perno A en varias posiciones de trinquete sobre la cuchilla ACE. Si se necesitan fuerzas verticales de 1.5 kN para completar el corte de una rama pequeña, determine la magnitud P de las fuerzas que deben aplicarse sobre los mangos de las tijeras cuando éstas se ajustan como indica la figura.

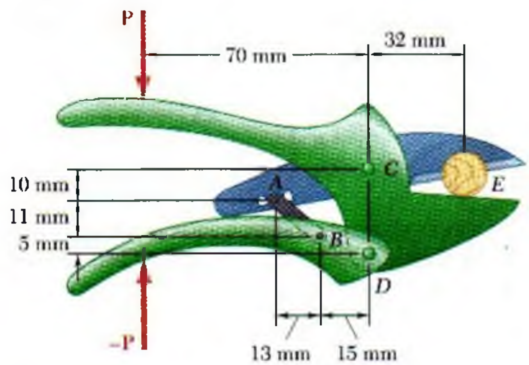


Figura P6.141

6.142 Una abrazadera de sujeción en C es usada para prensar dos placas de acero de $\frac{1}{4}$ in. Determine la magnitud de las fuerzas de sujeción producidas cuando se aplican dos fuerzas de 30 lb, como indica la figura.

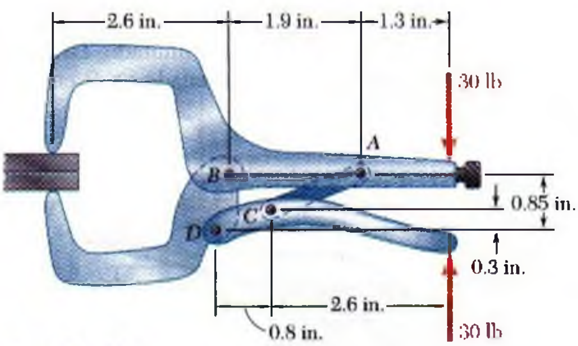


Figura P6.142

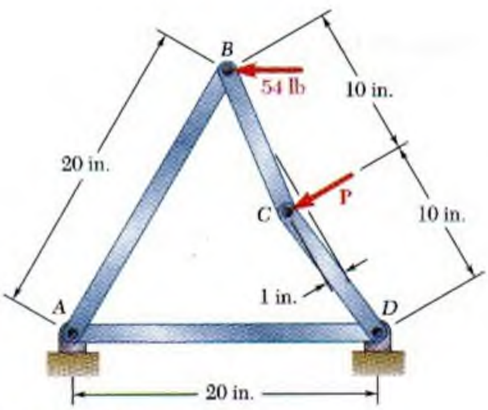


Figura P6.143

6.143 Determine la fuerza **P** que debe ser aplicada la conexión articulada BCD para mantener el equilibrio en la posición indicada por la figura.

6.144 En la posición cerrada que muestra la figura, la abrazadera acodada ejerce en A una fuerza vertical de 270 lb sobre el bloque de madera, y el mango CF descansa contra el tope situado en G. Determine la fuerza **P** necesaria para liberar la abrazadera. (*Sugerencia*: Para liberar la abrazadera, las fuerzas de contacto en G deben ser cero.)

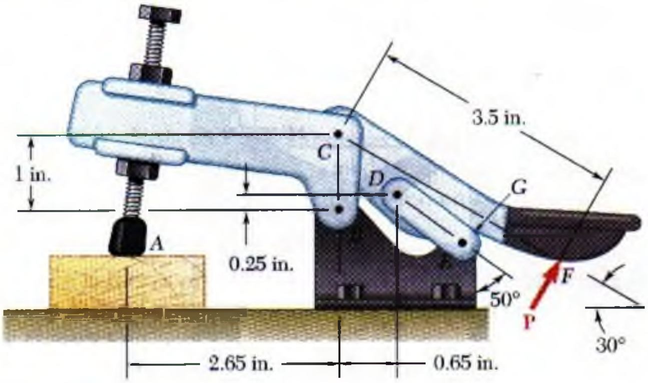


Figura P6.144

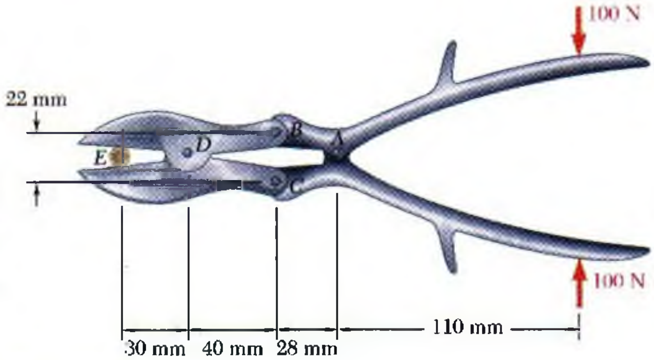


Figura *P6.145*

6.145 El cortador de huesos mostrado en la figura se utiliza en procedimientos quirúrgicos para cortar huesos pequeños. Determine la magnitud de las fuerzas ejercidas sobre el hueso colocado en E cuando se aplican dos fuerzas de 100 N como indica la figura.

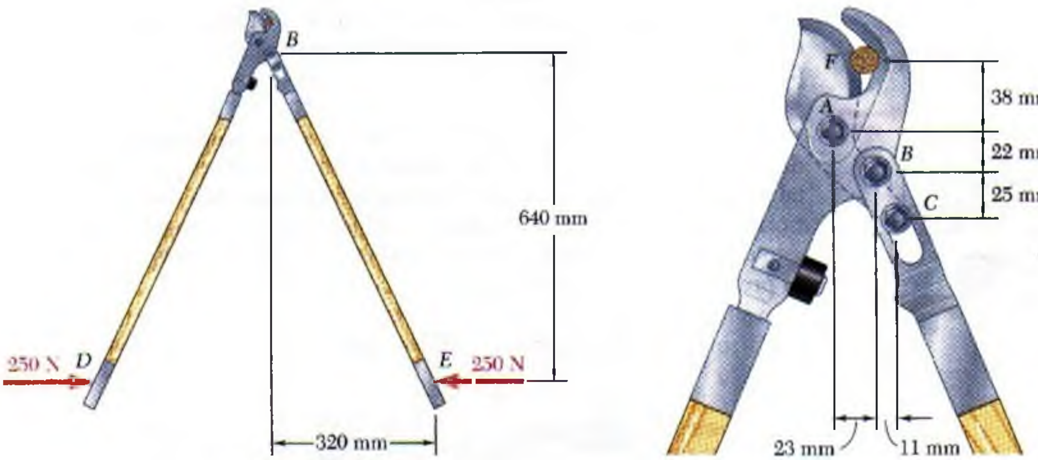


Figura P6.146

6.146 Para cortar una pequeña rama colocada en F se usan tijeras podadoras, los mangos AD y BE pivotean respecto al perno B y la cuchilla AC pivotea respecto al perno fijo A, mientras que el perno C puede deslizarse libremente en la ranura del mango BE. Determine la magnitud de las fuerzas ejercidas sobre la rama cuando se aplican dos fuerzas de 250 N a los mangos, según muestra la figura.

6.147 El brazo de extensión telescópica ABC se emplea para elevar a un trabajador hasta una altura situada por encima de alambres telefónicos y eléctricos. Para la extensión que muestra la figura, el centro de gravedad del brazo de 1 400 lb se localiza en el punto G. El trabajador, la cubeta y el equipo unido a ésta pesan 450 lb y tienen un centro de gravedad combinado en C. Determine la fuerza ejercida en B por el cilindro hidráulico BD cuando $\theta = 35°$.

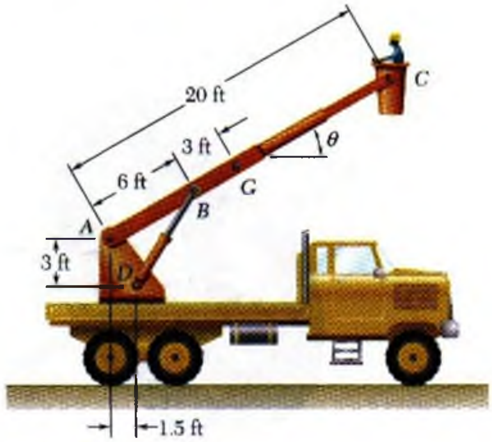


Figura P6.147

6.148 La posición del carrete *DE* perteneciente a una grúa está parcialmente controlada por medio de dos sistemas idénticos de eslabón y cilindro hidráulico, de los cuales sólo se muestra uno. El carrete contiene un rollo de 3 000 lb de cable eléctrico en la posición indicada. Si la carga soportada por el sistema que se muestra en la figura es de 1 500 lb, determine *a*) la fuerza ejercida por el cilindro hidráulico en el punto *G*, *b*) las componentes de la fuerza ejercida sobre el elemento *BCF* en el punto *C*.

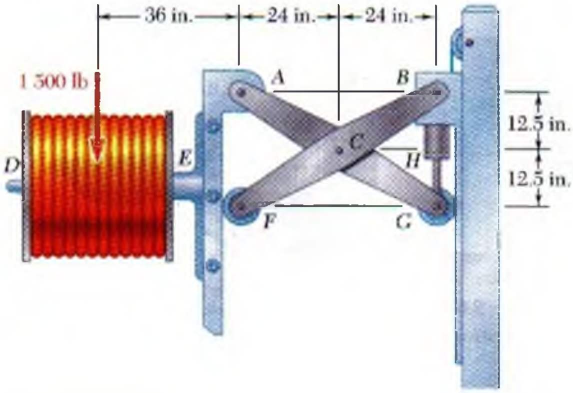


Figura P6.148

6.149 El brazo de extensión telescópica *ABC* es empleado para levantar una plataforma con trabajadores de la construcción. La masa conjunta de los trabajadores y la plataforma es de 240 kg y su centro de gravedad compuesto se localiza directamente por encima de *C*. Para la posición en que $\theta = 24°$, determine *a*) la fuerza ejercida en *B* por el cilindro hidráulico *BD*, *b*) la fuerza ejercida sobre el carro de apoyo en *A*.

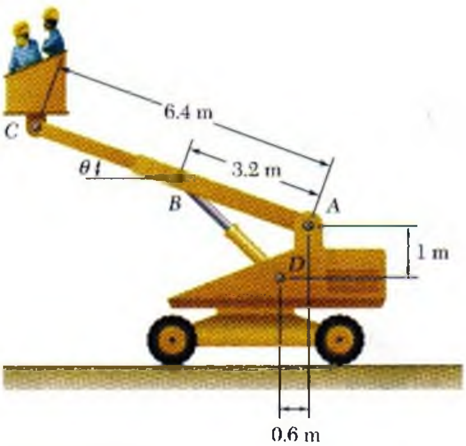
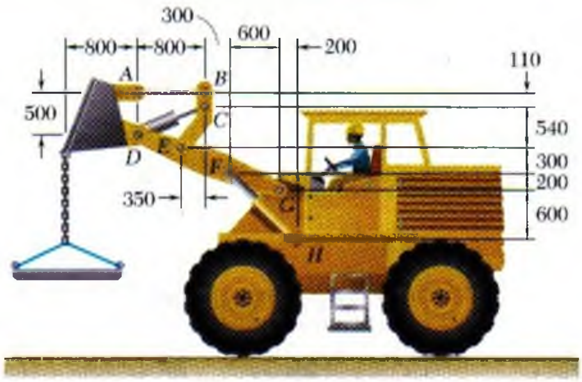


Figura *P6.149*

6.150 Una dala de concreto de 500 kg se sostiene mediante una cadena y un arnés, los cuales están unidos al cubo situado en el extremo frontal de la retroexcavadora que muestra la figura. La acción del cubo es controlada por dos mecanismos idénticos, de los cuales sólo se muestra uno. Si este mecanismo soporta la mitad de los 500 kg de la dala, determine la fuerza presente en *a*) el cilindro *CD*, *b*) el cilindro *FH*.



Dimensiones en mm

Figura P6.150

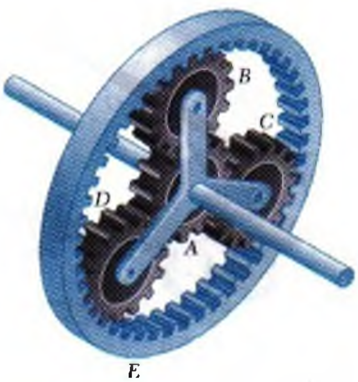


Figura P6.151

6.151 En el sistema planetario de engranes mostrado en la figura, el radio del engrane central *A* es $a = 24$ mm, el radio de cada engrane planetario es *b*, y el radio del engrane exterior *E* es $(a + 2b)$. Se aplica un par de magnitud $M_A = 15$ N · m en el mismo sentido que las manecillas del reloj sobre el engrane central *A*, y se aplica un par de magnitud $M_S = 75$ N · m en un sentido contrario al de las manecillas del reloj sobre el brazo *BCD*. Si el sistema está en equilibrio, determine *a*) el radio *b* que deben tener los engranes planetarios, *b*) la magnitud del par $\mathbf{M}_E$ que debe aplicarse sobre el engrane exterior *E*.

6.152 Los engranes *A* y *D* se fijan rígidamente a los ejes horizontales que se sostienen mediante cojinetes sin fricción. Determine *a*) el par $\mathbf{M}_0$ que debe aplicarse al eje *DEF* para mantener el equilibrio, *b*) las reacciones en *G* y *H*.

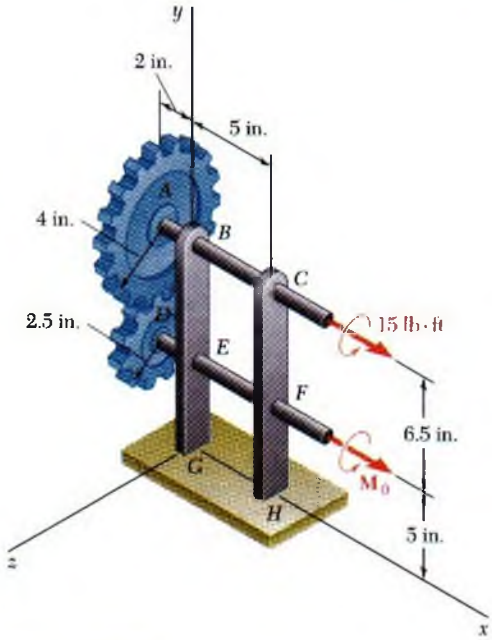


Figura P6.152

6.153 Dos ejes *AC* y *CF*, los cuales están contenidos en el plano vertical *xy*, se conectan mediante una junta universal instalada en *C*. Los cojinetes puestos en *B* y *D* no ejercen ninguna fuerza axial. Un par con magnitud de 50 N · m (que actúa en el sentido de las manecillas del reloj cuando se ve desde el eje positivo *x*) se aplica sobre el eje *CF* en *F*. En el instante que el brazo de la pieza transversal unida al eje *CF* queda en posición horizontal, determine *a*) la magnitud del par que debe aplicarse al eje *AC* en *A* para mantener el equilibrio, *b*) las reacciones en *B*, *D* y *E*. (*Sugerencia*: La suma de los pares ejercidos sobre la pieza transversal debe ser igual a cero.)

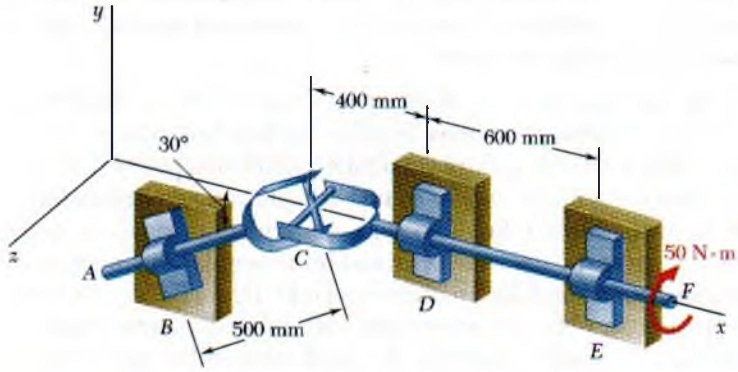


Figura *P6.153*

***6.154** Resuelva el problema 6.153 suponiendo que el brazo de la pieza transversal unida al eje *CF* está en posición vertical.

***6.155** Las tenazas mecánicas de gran tamaño que muestra la figura se emplean para asir una placa gruesa de metal *HJ* de 1 500 lb. Si no existe deslizamiento entre los asideros de las tenazas y la placa en *H* y *J*, determine las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre el elemento *EFH*. (*Sugerencia*: Considere la simetría de las tenazas para establecer las relaciones que hay entre las componentes de la fuerza que actúa sobre *EFH* en *E* y las componentes de la fuerza aplicada sobre *CDF* en *D*.)

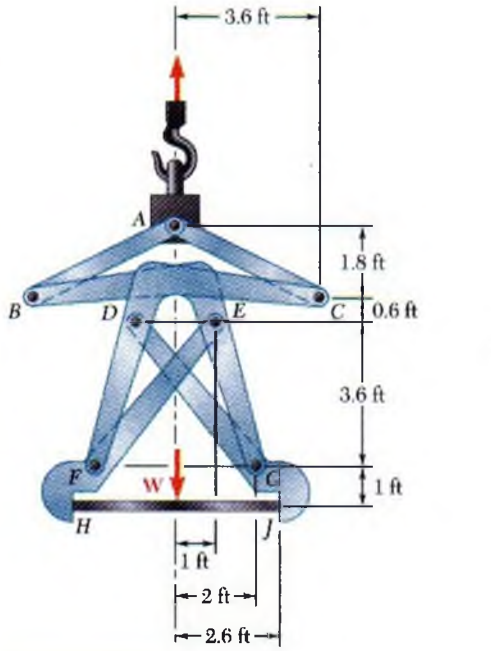


Figura P6.155

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 6

En este capítulo se aprendió a determinar las *fuerzas internas* que mantienen unidas a las distintas partes de una estructura.

Análisis de armaduras

La primera mitad del capítulo estuvo dedicada al análisis de *armaduras*, es decir, el análisis de estructuras constituidas por *elementos rectos que están conectados únicamente en sus extremos*. Como los elementos son delgados e incapaces de soportar cargas laterales, todas las cargas deben estar aplicadas en las uniones o nodos; por tanto, una armadura está constituida por *pernos y por elementos sujetos a dos fuerzas* [sección 6.2].

Armaduras simples

Se dice que una armadura es *rígida* si está diseñada de modo que no se deformará mucho o se colapsará bajo la acción de una carga pequeña. Una armadura triangular constituida por tres elementos conectados en tres nodos es una armadura rígida (figura 6.25*a*). De la misma forma, también será una armadura rígida la que se obtiene agregándole a dicha armadura triangular dos nuevos elementos y conectándolos en un nuevo nodo (figura 6.25*b*). Las armaduras que se obtienen repitiendo este procedimiento reciben el nombre de *armaduras simples*. Se puede comprobar que en una armadura simple el número total de elementos es $m = 2n - 3$, donde n es el número total de nodos [sección 6.3].

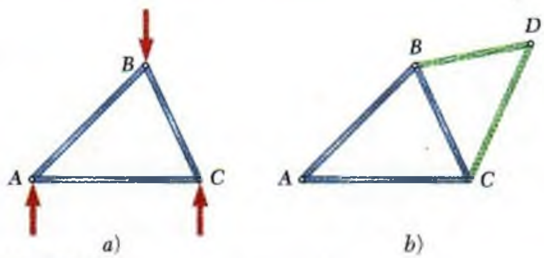


Figura 6.25

Método de los nodos

Por el *método de los nodos* [sección 6.4] se pueden determinar las fuerzas en los distintos elementos de una armadura simple. Primero, se obtienen las reacciones en los apoyos considerando a toda la armadura como un cuerpo libre. Después se dibuja el diagrama de cuerpo libre para cada perno, mostrando las fuerzas ejercidas sobre el mismo por los elementos o apoyos que éste conecta. Como los elementos que constituyen a la armadura son elementos rectos sujetos a dos fuerzas, la fuerza ejercida por un elemento sobre el perno está dirigida a lo largo de dicho elemento y, por tanto, sólo se desconoce su magnitud. En el caso de una armadura simple, siempre se pueden dibujar los diagramas de cuerpo libre de los pernos en un orden tal que únicamente se incluyen dos incógnitas en cada diagrama. Estas fuerzas se obtienen a partir de las dos ecuaciones de equilibrio correspondientes o —si sólo están involucradas tres fuerzas— a partir

del triángulo de fuerzas correspondiente. Si la fuerza ejercida por un elemento sobre un perno está dirigida hacia el perno, dicho elemento está en *compresión*; si la fuerza ejercida por un elemento sobre un perno está dirigida hacia fuera de éste, dicho elemento está en *tensión* [problema resuelto 6.1]. Algunas veces se simplifica el análisis de una armadura si se identifican primero los *nodos que se encuentran bajo condiciones especiales de carga* [sección 6.5]. El método de los nodos también se extiende para el análisis de *armaduras espaciales* o tridimensionales [sección 6.6].

Método de secciones

El *método de secciones* es más eficaz que el método de los nodos cuando únicamente se desea determinar la fuerza en un solo elemento —o en muy pocos elementos— [sección 6.7]. Por ejemplo, para determinar la fuerza en el elemento BD de la armadura de la figura 6.26*a*, se *pasa una sección* a través de los elementos BD, BE y CE, se remueven dichos elementos y se usa la porción ABC de la armadura como un cuerpo libre (figura 6.26*b*). Si se escribe $\Sigma M_E = 0$, se determina la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}_{BD}$, la cual representa la fuerza en el elemento BD. Un signo positivo indica que el elemento está en *tensión*; un signo negativo indica que el elemento está en *compresión* [problemas resueltos 6.2 y 6.3].

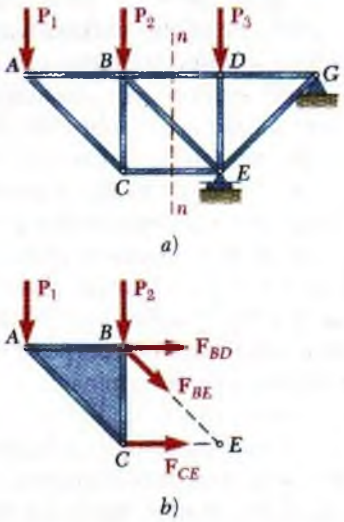


Figura 6.26

Armaduras compuestas

El método de secciones es útil para el análisis de *armaduras compuestas*, esto es, armaduras que no se pueden construir a partir de la armadura triangular básica de la figura 6.25*a*, pero que se obtienen conectando rígidamente varias armaduras simples [sección 6.8]. Si las armaduras simples que constituyen a la armadura compuesta han sido conectadas en forma apropiada (por medio de un perno y un eslabón o por medio de tres eslabones que no son concurrentes ni paralelos) y si la estructura resultante está bien apoyada (por medio de un perno y un rodillo), la armadura compuesta será *estáticamente determinada, rígida y completamente restringida*. Entonces se satisface la siguiente condición necesaria —pero no suficiente—: $m + r = 2n$, donde m es el número de elementos, r es el número de incógnitas que representan a las reacciones en los apoyos y n es el número de nodos.

Armazones y máquinas

La segunda parte del capítulo estuvo dedicada al análisis de *armazones y máquinas*. Ambas son estructuras que contienen *elementos sujetos a fuerzas múltiples*, sobre los cuales actúan tres o más fuerzas. Los armazones están diseñados para soportar cargas y usualmente son estructuras estacionarias totalmente restringidas. Las máquinas están diseñadas para transmitir o modificar fuerzas y siempre contienen partes móviles [sección 6.9].

Análisis de un armazón

Para *analizar un armazón*, primero se considera al *armazón completo como un cuerpo libre* y se escriben tres ecuaciones de equilibrio [sección 6.10]. Si el armazón permanece rígido cuando se separa de sus apoyos, las reacciones involucran sólo tres incógnitas y se pueden determinar a partir de dichas ecuaciones de equilibrio [problemas resueltos 6.4 y 6.5]. Por otra parte, si el armazón deja de ser rígido cuando se separa de sus apoyos, las reacciones involucran más de tres incógnitas y no pueden determinarse todas las incógnitas a partir de las ecuaciones de equilibrio para el armazón completo [sección 6.11; problema resuelto 6.6].

Elementos sujetos a fuerzas múltiples

Cuando se *desensambla el armazón* y se identifican los diversos elementos que lo constituyen como elementos sujetos a dos fuerzas o elementos sujetos a fuerzas múltiples, se supone que los pernos forman una parte integral de uno de los elementos que éstos conectan. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de cada uno de los elementos sujetos a fuerzas múltiples, observando que cuando dos elementos sujetos a fuerzas múltiples están conectados al mismo elemento sujeto a dos fuerzas, este último actúa sobre los elementos sujetos a fuerzas múltiples con *fuerzas iguales y opuestas de magnitud desconocida pero cuya dirección es conocida*. Cuando dos elementos sujetos a fuerzas múltiples están conectados por un perno, éstos ejercen entre sí *fuerzas iguales y opuestas cuya dirección es desconocida*, las cuales se deben representar por *dos componentes desconocidas*. Entonces se pueden resolver las ecuaciones de equilibrio obtenidas a partir de los diagramas de cuerpo libre de los elementos sujetos a fuerzas múltiples para determinar las distintas fuerzas internas [problemas resueltos 6.4 y 6.5]. También pueden emplearse las ecuaciones de equilibrio para completar la determinación de las reacciones en los apoyos [problema resuelto 6.6]. De hecho, si el armazón es *estáticamente determinado y rígido*, los diagramas de cuerpo libre de los elementos sujetos a fuerzas múltiples pueden proporcionar un número de ecuaciones igual al número de fuerzas desconocidas (incluyendo las reacciones) [sección 6.11]. Sin embargo, como se sugirió, es conveniente considerar primero el diagrama de cuerpo libre para el armazón completo con el fin de minimizar el número de ecuaciones que se deben resolver de manera simultánea.

Análisis de una máquina

Para *analizar una máquina*, ésta se desensambla y con el mismo procedimiento empleado para un armazón, se dibuja el diagrama de cuerpo libre de cada uno de los elementos sujetos a fuerzas múltiples. Las ecuaciones de equilibrio correspondientes proporcionan las *fuerzas de salida* ejercidas por la máquina en términos de las *fuerzas de entrada* que se le aplican, así como las *fuerzas internas* en cada una de las conexiones [sección 6.12; problema resuelto 6.7].

Problemas de repaso

6.156 Utilice el método de los nudos para determinar la fuerza presente en cada elemento de la armadura que muestra la figura. Establezca si los elementos se encuentran en tensión o en compresión.

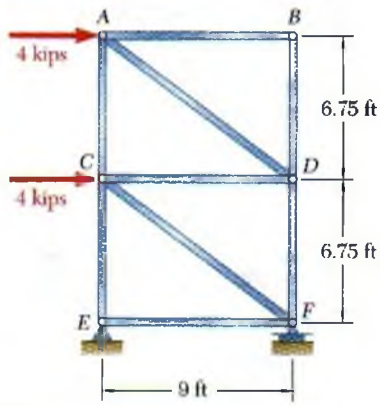


Figura P6.156

6.157 En la armadura tipo tijera para techo que muestra la figura, determine la fuerza presente en cada elemento localizado a la derecha del elemento FG. Además, establezca si los elementos se encuentran en tensión o en compresión.

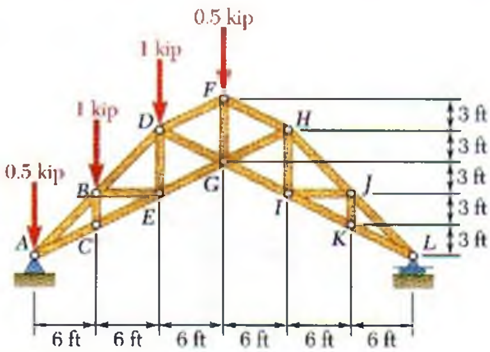


Figura P6.157

6.158 Determine la fuerza presente en cada miembro de la armadura mostrada en la figura. Establezca si los elementos se encuentran en tensión o en compresión.

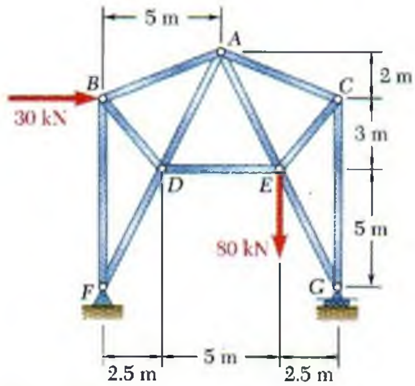


Figura P6.158

6.159 Una armadura plana de paso para techo se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza presente en los elementos CE, DE y DF.

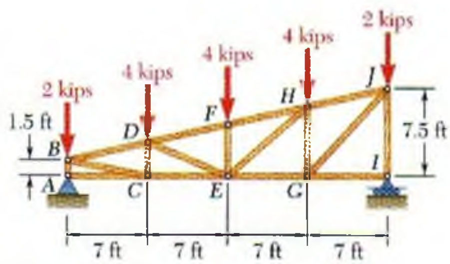


Figura *P6.159*

6.160 Una armadura para el techo de un estadio se carga como indica la figura. Determine la fuerza presente en los elementos AB, AG y FG.

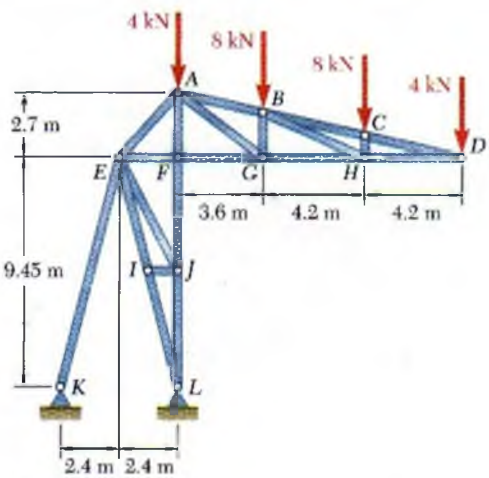


Figura P6.160

6.161 Para la armadura mostrada en la figura, determine la fuerza presente en los elementos *AF* y *EJ* cuando $P = Q = 2$ kips. (*Sugerencia*: Use la sección *aa*.)

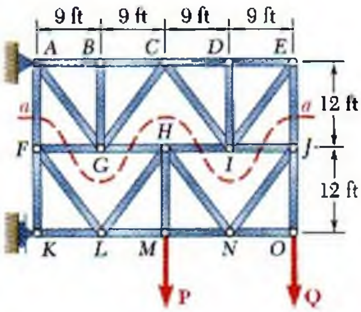


Figura ***P6.161***

6.162 Para el armazón y la carga mostrados en la figura, determine las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre el elemento *ABC*.

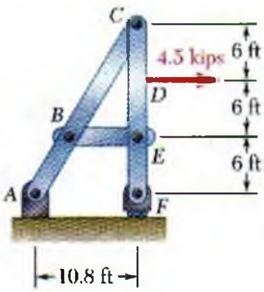


Figura P6.162

6.163 Determine las componentes de las reacciones en *B* y *E* si el radio de la polea mide 1.25 in.

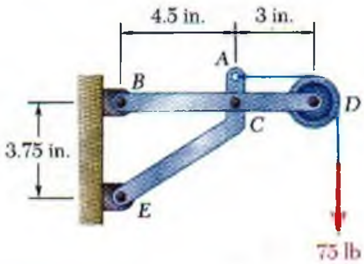


Figura P6.163

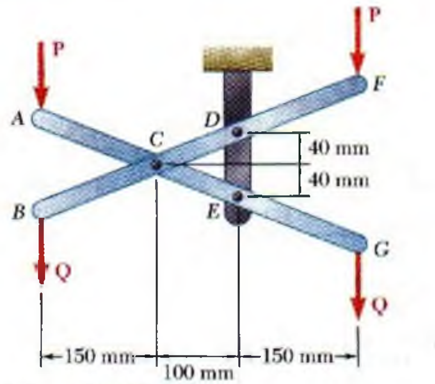


Figura ***P6.164***

6.164 Si $P = 15$ N y $Q = 65$ N, determine las componentes de las fuerzas ejercidas sobre *a*) el elemento *BCDF* en *C* y *D*, *b*) el elemento *ACEG* en *E*.

6.165 Para el sistema y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la fuerza **P** requerida para mantener el equilibrio, *b*) la fuerza correspondiente en el elemento *BD*, *c*) la reacción correspondiente en *C*.

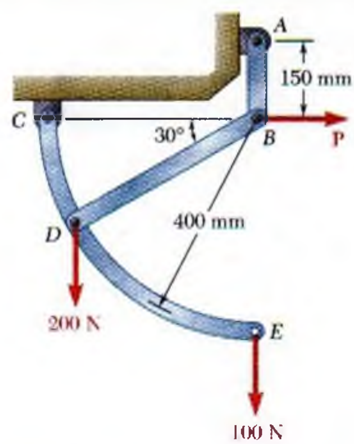


Figura P6.165

6.166 Determine la magnitud de las fuerzas de sujeción ejercidas sobre la tuerca a lo largo de la línea *aa* cuando se aplican dos fuerzas de 240 N sobre los mangos como indica la figura. Suponga que los pasadores *A* y *D* se deslizan libremente sobre las ranuras de las pinzas.

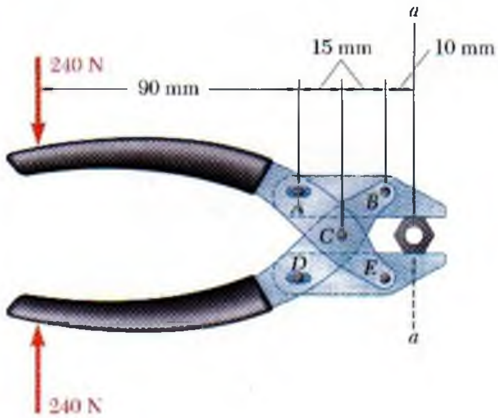


Figura P6.166

6.167 Las tijeras para jardín mostradas en la figura constan de dos cuchillas y dos mangos. Los mangos y las cuchillas se unen, respectivamente, por medio del perno *C* y el perno *D*. La cuchilla izquierda y el mango del lado derecho están unidos mediante el perno *A*, y la cuchilla derecha y el mango del lado izquierdo con el perno *B*. Determine la magnitud de las fuerzas ejercidas sobre una rama pequeña colocada en *E* cuando se aplican dos fuerzas de 20 lb en los mangos de las tijeras, como indica la figura.

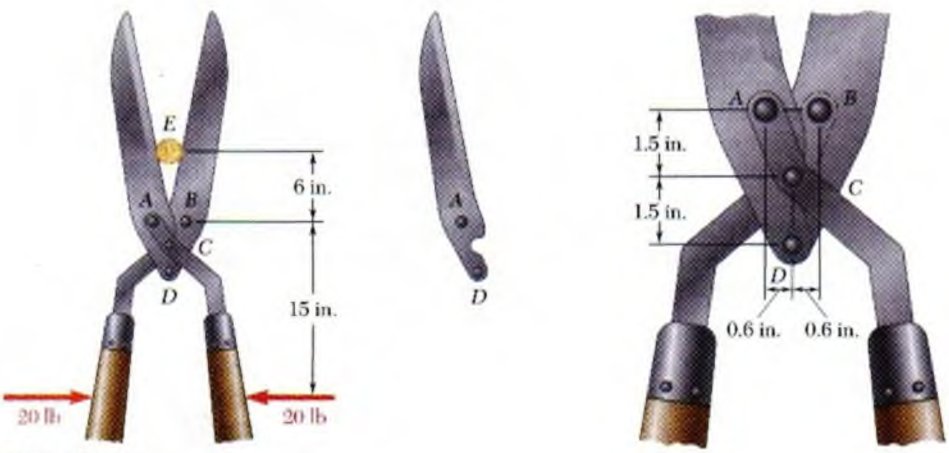


Figura *P6.167*

Problemas de computadora

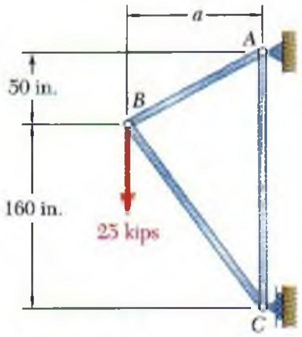


Figura P6.C1

6.C1 Para la carga mostrada, determine la fuerza en cada elemento de la armadura como una función de la dimensión a. Grafique la fuerza en cada elemento para 40 in. $\leq a \leq$ 240 in., considerando las fuerzas de tensión como positivas y las fuerzas de compresión como negativas.

6.C2 Una sola fuerza de 3.75 kips debe aplicarse en uno de los nodos numerados de la armadura Fink que se muestra en la figura. Calcule la fuerza en el elemento CD aplicando la carga sucesivamente en los nodos 1, 2, . . . , 9.

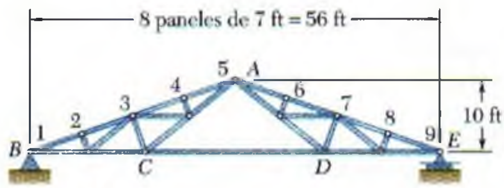


Figura P6.C2

6.C3 El piso de un puente se apoya sobre largueros soportados por vigas transversales de piso, como se muestra en la figura 6.3. Los extremos de las vigas se unen a los nodos superiores de dos armaduras, una de las cuales se muestra en la figura P6.C3. Como parte del diseño del puente, se desea simular el comportamiento de la armadura cuando pasa un camión de 3 kips sobre el puente. Si la distancia entre los ejes del camión es b = 7.5 ft y suponiendo que el peso del camión se distribuye por igual sobre sus cuatro ruedas, use software computacional para calcular y graficar las fuerzas generadas por el camión en los elementos BH y GH como una función de x para 0 $\leq x \leq$ 57.5 ft. A partir de los resultados obtenidos, determine: *a*) la fuerza de tensión máxima en BH, *b*) la fuerza de compresión máxima en BH y *c*) la fuerza de tensión máxima en GH. En cada caso, indique el valor correspondiente de x.

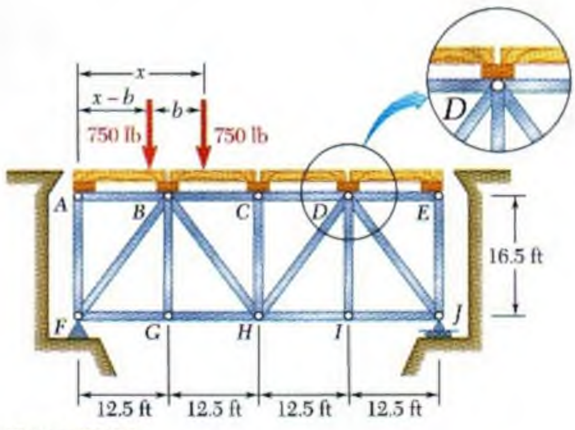


Figura P6.C3

6.C4 Si sabe que el radio de la polea es de 300 mm, grafique la magnitud de las reacciones en A y G como funciones de θ para $0 \leq \theta \leq 90°$.

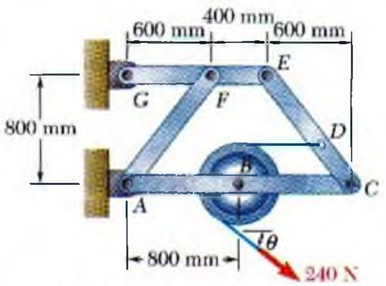


Figura P6.C4

6.C5 El diseño de un sistema de robot necesita del mecanismo de dos barras mostrado. Las barras AC y BD se conectan mediante un bloque deslizante en D, como se muestra en la figura. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, calcule y grafique el par $\mathbf{M}_A$ necesario para mantener las barras en equilibrio, considerando valores de θ desde 0 hasta 120°. Para los mismos valores de θ, calcule y grafique la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}$ ejercida por la barra AC sobre el bloque deslizante.

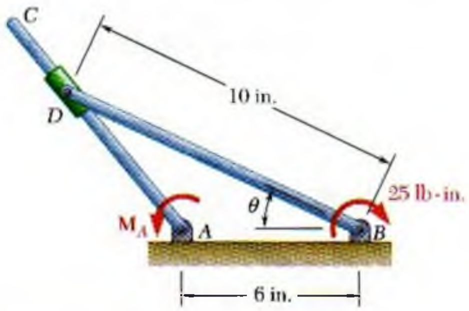


Figura P6.C5

6.C6 En la figura se presenta la magnitud de la fuerza $\mathbf{P}$ aplicada al pistón del sistema de una máquina, durante una revolución de la manivela AB. Grafique la magnitud del par $\mathbf{M}$, necesario para mantener al sistema en equilibrio, como una función de θ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

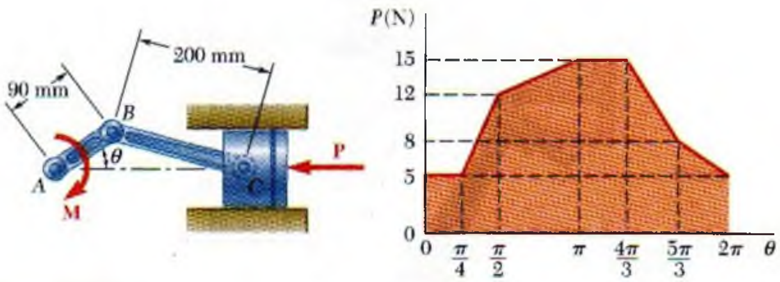


Figura P6.C6

6.C7 El larguero ABC se mantiene en la posición horizontal mediante un puntal con autoaseguramiento, que consiste de dos partes BDE y EDF

articuladas en E y apoyadas una contra la otra en D. Determine la fuerza **P**, necesaria para liberar el puntal, como una función del ángulo θ. Se sabe que la masa del larguero es de 18 kg, grafique la magnitud de **P** como una función de θ para $0° \leq \theta \leq 90°$.

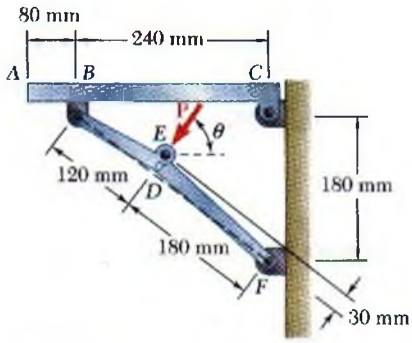


Figura P6.C7

6.C8 Para el mecanismo mostrado en la figura, la posición de la barra AC se controla mediante el brazo BD. Para la carga aplicada, calcule y grafique la reacción en A y el par **M**, necesario para mantener al sistema en equilibrio, como una función de θ para $-30° \leq \theta \leq 90°$. Como parte del proceso de diseño del mecanismo, determine: *a*) el valor de θ para el cual M es máxima y el valor correspondiente de M y *b*) el valor de θ para el cual la reacción en A es máxima y la magnitud correspondiente de esta reacción.

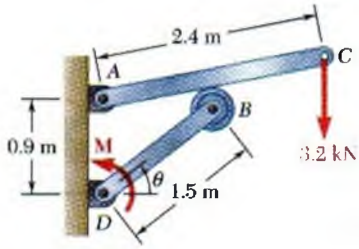


Figura P6.C8

6.C9 La barra CD está unida al collarín D y pasa a través de un collarín soldado en el extremo B de la palanca AB. Como un paso inicial en el diseño de la palanca AB, use software de computadora para calcular y graficar

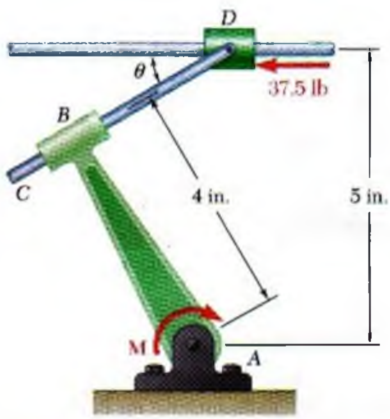


Figura P6.C9

la magnitud M, del par necesario para mantener el equilibrio del sistema, como una función de θ para $15° \leq \theta \leq 90°$. Determine el valor de θ para el cual M es mínimo y el valor correspondiente de M.

***6.C10** La podadora de árboles que se muestra en la figura se usa para cortar una rama de 25 mm de diámetro. Si la tensión en la cuerda es de 70 N, y sin tomar en cuenta los radios de las poleas, grafique la magnitud de la fuerza ejercida sobre la rama por la cuchilla BC como una función de θ para $0 \leq \theta \leq 90°$, donde el filo cortante de la cuchilla está en posición vertical y apenas hace contacto con la rama cuando $\theta = 0$. (*Sugerencia*: Suponga que la línea de acción de la fuerza que actúa sobre la rama pasa a través de su centro y que es perpendicular a la cuchilla. También suponga que los tramos AD y AE de la cuerda son paralelos a la línea que une a los puntos A y E.)

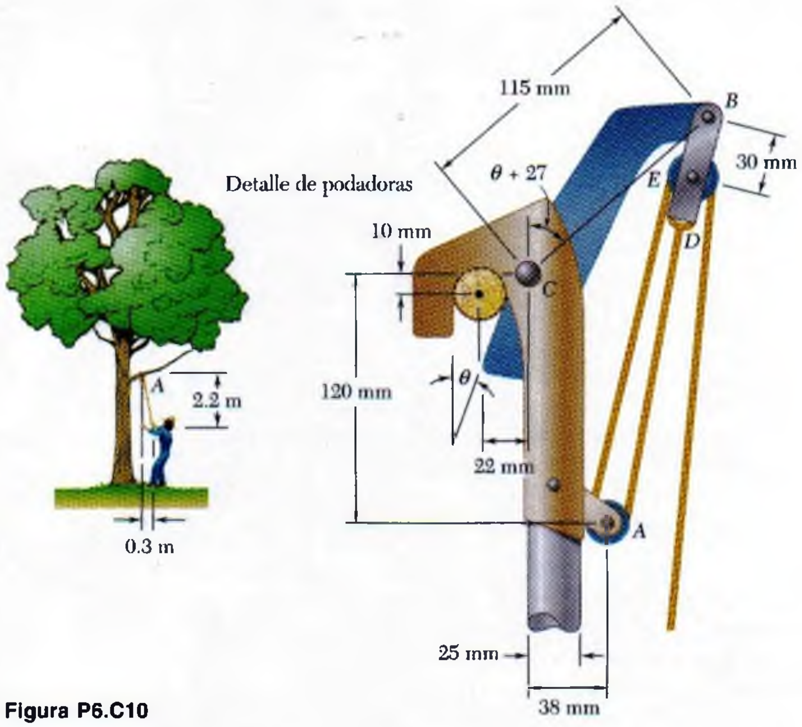
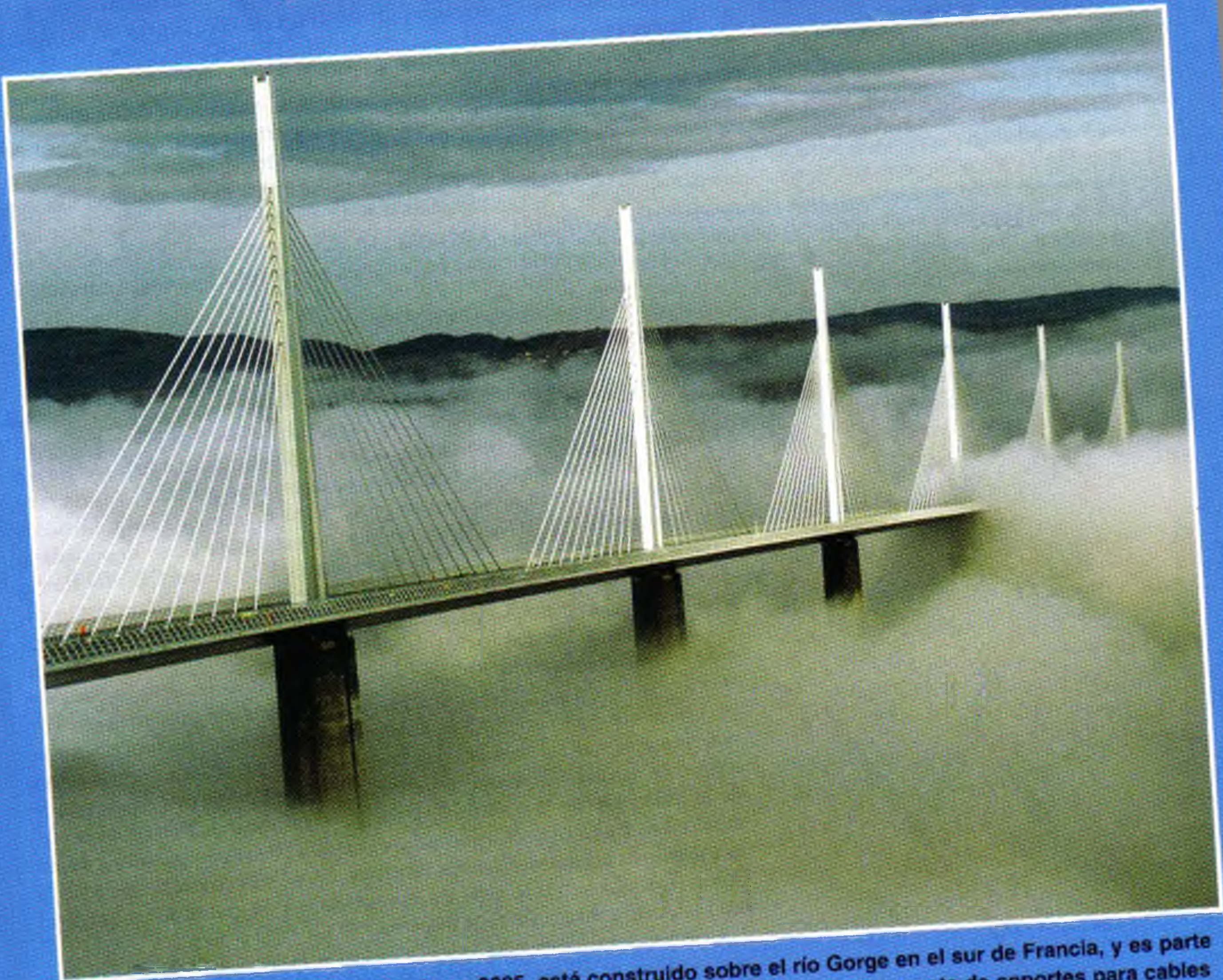


Figura P6.C10

CAPÍTULO 7

Fuerzas en vigas y cables



El Grand Viaduc de Millau, terminado en 2005, está construido sobre el río Gorge en el sur de Francia, y es parte de una nueva ruta entre París y Barcelona. El puente mide 2.46 km de longitud y consta de soportes para cables tensores y pilares que se elevan sobre la superficie del río hasta 245 y 335 m, respectivamente.

FUERZAS EN VIGAS Y CABLES

*7.1. INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores se estudiaron dos problemas básicos que involucraban estructuras: 1) determinación de las fuerzas externas que actúan sobre una estructura (capítulo 4) y 2) determinación de las fuerzas que mantienen unidos a los distintos elementos que constituyen a una estructura (capítulo 6). Ahora se analizará el problema de la determinación de las fuerzas internas que mantienen unidas a las distintas partes de un elemento dado.

Primero se analizarán las fuerzas internas en los elementos de un armazón como la grúa considerada en las secciones 6.1 y 6.10, observando que mientras las fuerzas internas en un elemento recto sometido a la acción de dos fuerzas sólo pueden producir *tensión* o *compresión* en dicho elemento, las fuerzas internas en cualquier otro tipo de elemento usualmente también producen *corte* y *flexión*.

La mayor parte de este capítulo estará dedicada al análisis de las fuerzas internas en dos tipos importantes de estructuras de ingeniería, llamadas:

1. *Vigas*: las cuales usualmente son elementos prismáticos rectos y largos diseñados para soportar cargas aplicadas en varios puntos a lo largo del elemento.
2. *Cables*: son elementos flexibles capaces de soportar sólo tensión y están diseñados para soportar cargas concentradas o distribuidas. Los cables se utilizan en muchas aplicaciones de ingeniería, como en puentes colgantes y líneas de transmisión.

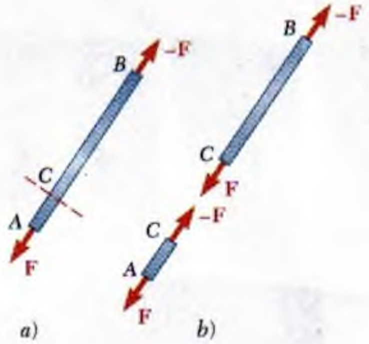


Figura 7.1

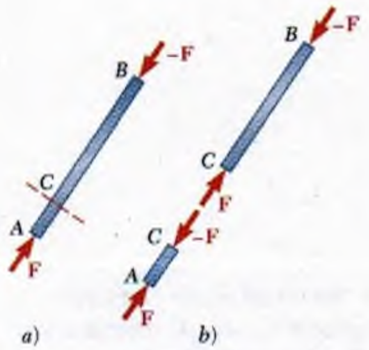


Figura 7.2

*7.2. FUERZAS INTERNAS EN ELEMENTOS

Consideremos el *elemento recto sujeto a la acción de dos fuerzas AB* (figura 7.1*a*). De la sección 4.6, se sabe que las fuerzas **F** y −**F** que actúan en *A* y *B*, respectivamente, deben estar dirigidas a lo largo de *AB* en sentidos opuestos y deben tener la misma magnitud *F*. Ahora considere que se corta al elemento en *C*. Para mantener el equilibrio de los cuerpos libres *AC* y *CB* obtenidos de esta manera, se debe aplicar sobre *AC* una fuerza −**F** igual y opuesta a **F**, y sobre *CB* una fuerza **F** igual y opuesta a −**F** (figura 7.1*b*). Estas nuevas fuerzas están dirigidas a lo largo de *AB* en sentidos opuestos y tienen la misma magnitud *F*. Como las dos partes *AC* y *CB* estaban en equilibrio antes de que se cortara el elemento, deben haber existido en éste *fuerzas internas* equivalentes a las nuevas fuerzas. Se concluye que en el caso de un elemento recto sujeto a la acción de dos fuerzas, las fuerzas internas que ejercen entre sí las dos partes del elemento son equivalentes a *fuerzas axiales*. La magnitud común *F* de estas fuerzas no depende de la ubicación de la sección *C* y recibe el nombre de *fuerza en el elemento AB*. En el caso considerado, el elemento está en tensión y se estirará bajo la acción de fuerzas internas. En el caso representado en la figura 7.2, el elemento está en compresión y disminuirá su longitud bajo la acción de las fuerzas internas.

Ahora, considere un *elemento sujeto a fuerzas múltiples*. Tómese por ejemplo el elemento *AD* de la grúa analizada en la sección 6.10; esta grúa se muestra nuevamente en la figura 7.3*a* y en la figura 7.3*b* se muestra el diagrama de cuerpo libre del elemento *AD*. Ahora se corta el elemento *AD* en *J* y se dibuja un diagrama de cuerpo libre para cada una de las porciones del elemento *JD* y *AJ* (figura 7.3*c* y *d*). Si se

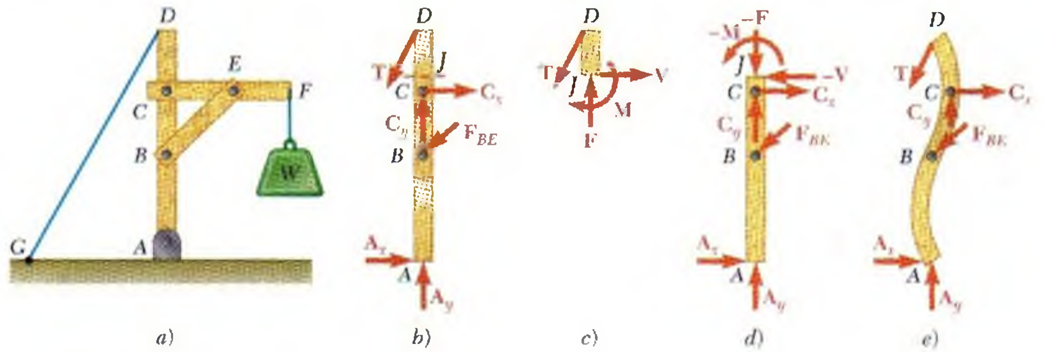


Figura 7.3

considera el cuerpo libre *JD*, se encuentra que se mantendrá su equilibrio si se aplica en *J* una fuerza **F** para balancear la componente vertical de **T**, una fuerza **V** para balancear la componente horizontal de **T** y un par **M** para balancear el momento de **T** con respecto a *J*. De nuevo se concluye que debieron haber existido fuerzas internas en *J* antes de que se cortara el elemento *AD*. Las fuerzas internas que actúan en la parte *JD* del elemento *AD* son equivalentes al sistema fuerza-par que se muestra en la figura 7.3*c*. De acuerdo con la tercera ley de Newton, las fuerzas internas que actúan sobre *AJ* deben ser equivalentes a un sistema fuerza-par igual y opuesto, como se muestra en la figura 7.3*d*. Es obvio que la acción de las fuerzas internas en el elemento *AD no se limita a producir tensión o compresión* como en el caso de los elementos rectos sujetos a la acción de dos fuerzas; por otro lado, las fuerzas internas *también producen corte y flexión*. La fuerza **F** es una *fuerza axial*; la fuerza **V** recibe el nombre de *fuerza cortante* y el momento **M** del par se conoce como el *momento flector o flexor en J*. Se observa que cuando se determinan las fuerzas internas en un elemento, se debe indicar sobre qué parte del elemento se supone que actúan dichas fuerzas. En la figura 7.3*e* se bosquejan las deformaciones que ocurrirán en el elemento *AD*. El análisis real de estas deformaciones es parte del estudio de la mecánica de materiales.

Es necesario señalar que en un *elemento sujeto a dos fuerzas que no es recto*, las fuerzas internas también son equivalentes a un sistema fuerza-par. Esto se muestra en la figura 7.4, donde el elemento sujeto a dos fuerzas *ABC* ha sido cortado en *D*.



Fotografía 7.1 El diseño del eje de una sierra circular debe tomar en cuenta las fuerzas internas que resultan de las fuerzas aplicadas a los dientes de la cuchilla. En un punto dado del eje, estas fuerzas internas son equivalentes a un sistema fuerza-par consistente en fuerzas axiales y cortantes y en un par que representa los momentos de corte y de torsión.

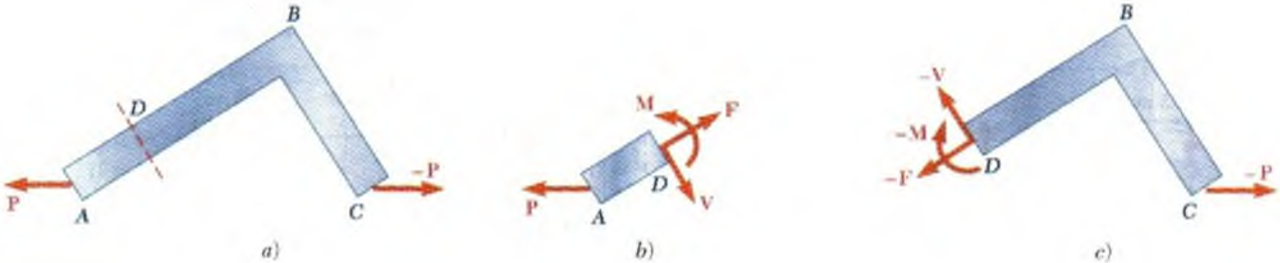
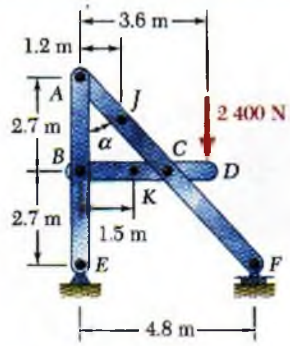
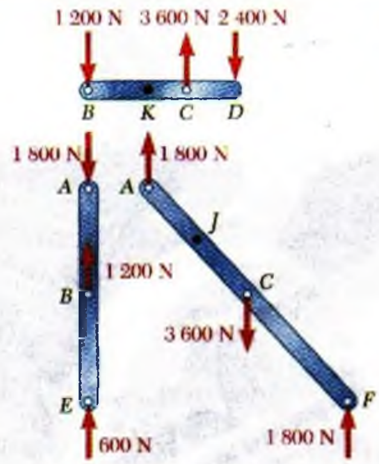


Figura 7.4



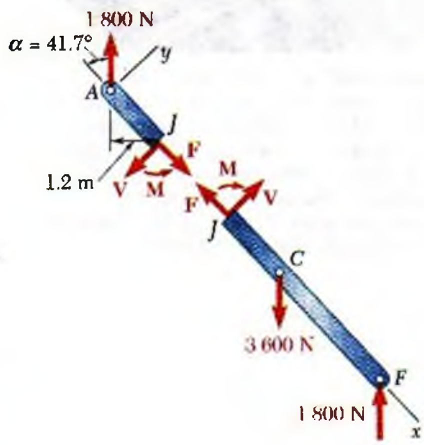
PROBLEMA RESUELTO 7.1

Para el armazón mostrado en la figura, determine las siguientes fuerzas internas: *a*) en el punto *J* del elemento *ACF* y *b*) en el punto *K* del elemento *BCD*. Este armazón ya fue considerado en el problema resuelto 6.5.



SOLUCIÓN

Reacciones y fuerzas en las conexiones. Se determinan las reacciones y las fuerzas que actúan sobre cada uno de los elementos del armazón; esto se llevó a cabo en el problema resuelto 6.5 y los resultados encontrados se repiten a continuación.

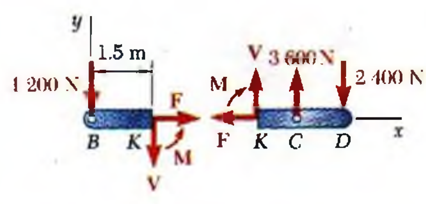


***a*) Fuerzas internas en *J*.** Se corta el elemento *ACF* en el punto *J* y se obtienen las dos partes que se muestran en la figura. Las fuerzas internas en *J* están representadas por un sistema equivalente fuerza-par y se determinan al calcular el equilibrio de cualquiera de las partes en que ha sido dividido el elemento. Si se considera el *diagrama de cuerpo libre AJ*, se escribe

$+\circlearrowleft \Sigma M_J = 0$:	$-(1\,800 \text{ N})(1.2 \text{ m}) + M = 0$	
	$M = +2\,160 \text{ N} \cdot \text{m}$	$\mathbf{M} = 2\,160 \text{ N} \cdot \text{m} \circlearrowleft$ ◀
$+\searrow \Sigma F_x = 0$:	$F - (1\,800 \text{ N}) \cos 41.7° = 0$	
	$F = +1\,344 \text{ N}$	$\mathbf{F} = 1\,344 \text{ N} \searrow$ ◀
$+\nearrow \Sigma F_y = 0$:	$-V + (1\,800 \text{ N}) \text{ sen } 41.7° = 0$	
	$V = +1\,197 \text{ N}$	$\mathbf{V} = 1\,197 \text{ N} \swarrow$ ◀

Por tanto, las fuerzas internas en *J* son equivalentes a un par **M**, a una fuerza axial **F** y a una fuerza cortante **V**. El sistema fuerza-par interno que actúa sobre la parte *JCF* es igual y opuesto.

***b*) Fuerzas internas en *K*.** Se corta el elemento *BCD* en *K* y se obtienen las dos partes que se muestran en la figura. Si se hace el *diagrama de cuerpo libre BK*, se escribe



$+\circlearrowleft \Sigma M_K = 0$:	$(1\,200 \text{ N})(1.5 \text{ m}) + M = 0$	
	$M = -1\,800 \text{ N} \cdot \text{m}$	$\mathbf{M} = 1\,800 \text{ N} \cdot \text{m} \circlearrowright$ ◀
$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0$:	$F = 0$	$\mathbf{F} = 0$ ◀
$+\uparrow \Sigma F_y = 0$:	$-1\,200 \text{ N} - V = 0$	
	$V = -1\,200 \text{ N}$	$\mathbf{V} = 1\,200 \text{ N} \uparrow$ ◀

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se aprendió a determinar las fuerzas internas en un elemento del armazón. Las fuerzas internas en un punto dado de un *elemento recto sujeto a dos fuerzas* se reducen a una fuerza axial, pero en todos los demás casos dichas fuerzas internas son equivalentes a *sistemas fuerza-par* constituidos por una *fuerza axial* **F**, una *fuerza cortante* **V** y un par **M** que representa al *momento flector* en dicho punto.

Para determinar las fuerzas internas en un punto dado J de un elemento de un armazón, se deben seguir los siguientes pasos.

1. ***Dibujar un diagrama de cuerpo libre para el armazón completo*** y se utiliza para determinar las reacciones que sean posibles en los apoyos.

2. ***Desensamblar el armazón y dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada uno de sus elementos.*** Se deben escribir tantas ecuaciones de equilibrio como sean necesarias para encontrar todas las fuerzas que actúan sobre el elemento en el cual está localizado el punto J.

3. ***Cortar el elemento en el punto J y dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada una de las dos partes*** del elemento que se han obtenido de esta forma, aplicando en el punto J de cada porción las componentes de fuerza y el par que representan las fuerzas ejercidas por la otra porción. Note que estas componentes de fuerza y pares tienen la misma magnitud pero sentidos opuestos.

4. ***Seleccionar uno de los dos diagramas de cuerpo libre*** que se han dibujado y utilizarlo para escribir tres ecuaciones de equilibrio para la porción correspondiente del elemento.

   a) Si se suman momentos con respecto a J y se igualan a cero, se obtendrá una ecuación que proporcionará el momento flector en el punto J.

   b) Si se suman componentes en direcciones paralelas y perpendiculares al elemento en el punto J y se igualan a cero se obtendrán, respectivamente, la fuerza axial y la fuerza cortante.

5. ***Cuando se escriban los resultados, se debe tener cuidado de especificar la parte del elemento*** que se utilizó, puesto que las fuerzas y los *pares* que actúan en las dos partes tienen sentidos opuestos.

Puesto que la solución de los problemas propuestos correspondientes a esta lección requieren la determinación de las fuerzas que ejercen entre sí los distintos elementos de un armazón, se deben repasar los métodos utilizados en el capítulo 6 para resolver este tipo de problemas. Por ejemplo, cuando los armazones involucran poleas y cables, se debe recordar que las fuerzas ejercidas por una polea sobre un elemento del armazón al cual está unida tienen la misma magnitud y dirección que las fuerzas ejercidas por el cable sobre la polea [problema 6.91].

Problemas

7.1 Para el armazón y la carga del problema 6.99, determine las fuerzas internas en el punto *J* localizado a la mitad de la distancia entre los puntos *B* y *E*.

7.2 Para el armazón y la carga del problema 6.78, determine las fuerzas internas en el punto *J*.

7.3 Para el armazón y la carga del problema 6.82, determine las fuerzas internas en el punto *J*.

7.4 Para el armazón y la carga del problema 6.85*b*, determine las fuerzas internas en el punto *B*.

7.5 Determine las fuerzas internas en el punto *J* de la estructura que muestra la figura.

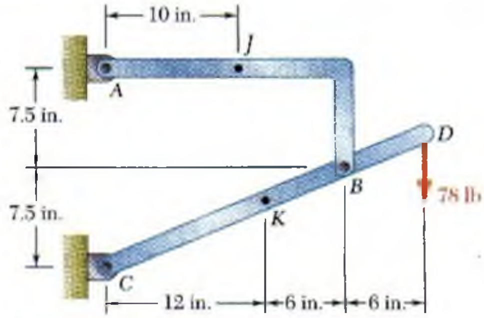


Figura P7.5 y P7.6

7.6 Determine las fuerzas internas en el punto *K* de la estructura que muestra la figura.

7.7 y 7.8 Una barra semicircular descansa sobre una superficie horizontal, como indica la figura. Si la barra semicircular tiene una masa de 9 kg determine, sin tomar en cuenta la fricción entre la barra y la superficie, las fuerzas internas en el punto *J*.

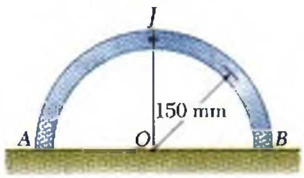


Figura P7.7

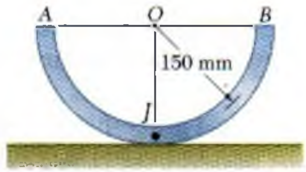


Figura P7.8

7.9 Una varilla está doblada en forma de arco circular, cuyo radio mide 4 in., como indica la figura. Para la carga dada, determine las fuerzas internas en el punto *J* si $\theta = 30°$.

7.10 Una varilla está doblada en forma de arco circular, cuyo radio mide 4 in., como indica la figura. Para la carga dada, determine *a*) el sitio donde el valor del momento flector es máximo, *b*) las fuerzas internas en ese punto.

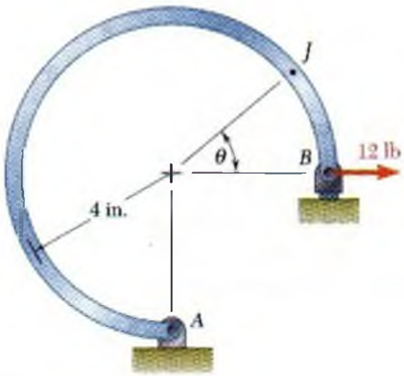


Figura P7.9 y *P7.10*

7.11 Dos elementos que constan cada uno de un tramo recto y otro en forma de un cuarto de círculo, con 8.4 in. de radio, soportan una carga de 120 lb en D y se conectan como indica la figura. Determine las fuerzas internas en el punto J.

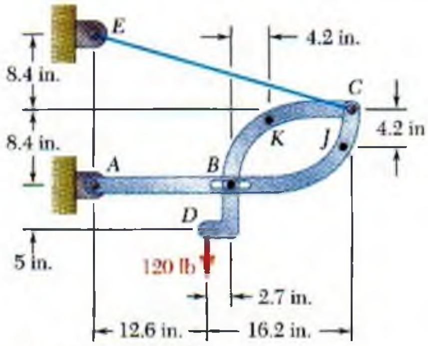


Figura P7.11 y *P7.12*

7.12 Dos elementos que constan cada uno de un tramo recto y otro en forma de un cuarto de círculo, con 8.4 in. de radio, soportan una carga de 120 lb en D y se conectan como indica la figura. Determine las fuerzas internas en el punto K.

7.13 El eje del elemento curvo AB es una parábola con vértice en A. Si se aplica una carga vertical **P** con magnitud de 1.8 kN en A, determine las fuerzas internas en J cuando $h = 240$ mm, $L = 800$ mm y $a = 480$ mm.

7.14 Si el eje del elemento curvo AB es una parábola con vértice en A, determine la magnitud y la ubicación del máximo momento flector.

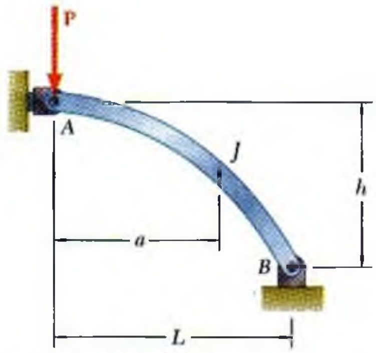


Figura P7.13 y P7.14

7.15 Si el radio de cada polea mide 200 mm, no tome en cuenta el efecto de la fricción para determinar las fuerzas internas en el punto J del armazón que muestra la figura.

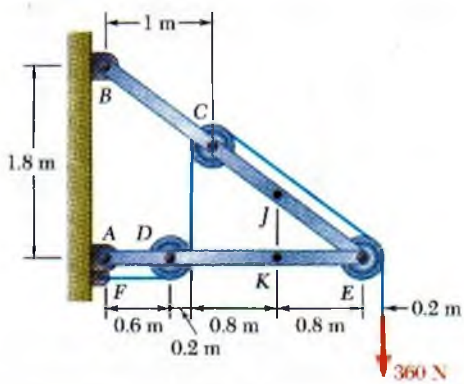


Figura P7.15 y P7.16

7.16 Si el radio de cada polea mide 200 mm, no tome en cuenta el efecto de la fricción para determinar las fuerzas internas en el punto K del armazón que muestra la figura.

7.17 Si el radio de cada polea mide 125 mm, no tome en cuenta el efecto de la fricción para determinar las fuerzas internas en el punto J del armazón que muestra la figura.

7.18 Si el radio de cada polea mide 125 mm, ignore el efecto de la fricción y determine las fuerzas internas en el punto K del armazón que muestra la figura.

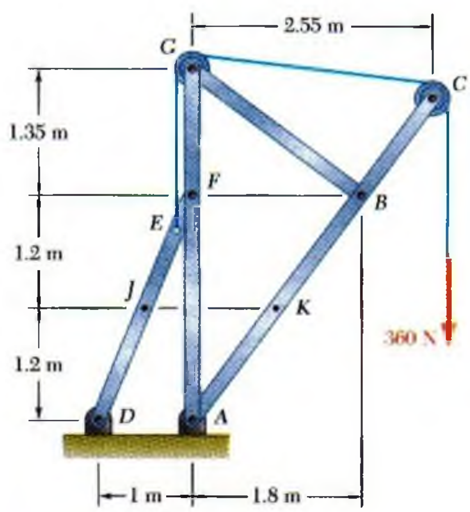


Figura P7.17 y P7.18

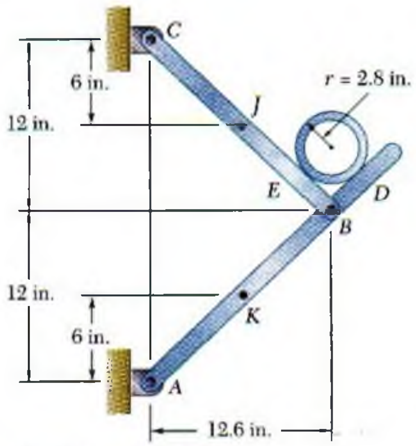


Figura P7.19 y *P7.20*

7.19 Una tubería de 5.6 in. de diámetro está sostenida cada 10 ft por un armazón pequeño, el cual consta de dos elementos como indica la figura. Si el peso combinado por unidad de longitud de la tubería y su contenido es de 18.5 lb/ft, y sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine las fuerzas internas en el punto *J*.

7.20 Una tubería de 5.6 in. de diámetro está sostenida cada 10 ft por un armazón pequeño, el cual consta de dos elementos como indica la figura. Si el peso combinado por unidad de longitud de la tubería y su contenido es de 18.5 lb/ft, e ignorando el efecto de la fricción, determine las fuerzas internas en el punto *K*.

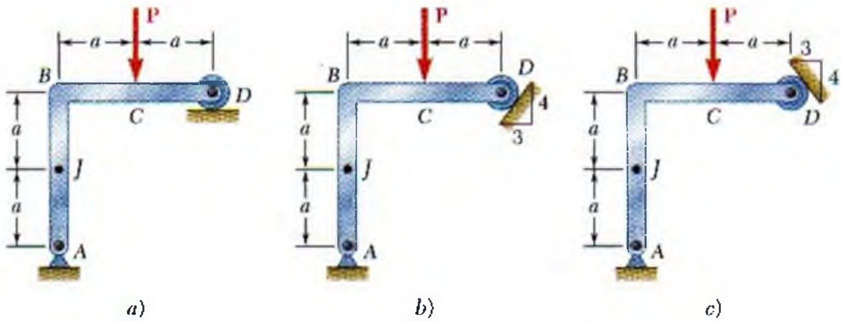


Figura P7.21

7.21 y *7.22* Una fuerza **P** se aplica a una barra doblada, la cual se sostiene mediante un rodillo y un apoyo de pasador. Para cada uno de los tres casos mostrados en las figuras, determine las fuerzas internas en el punto *J*.

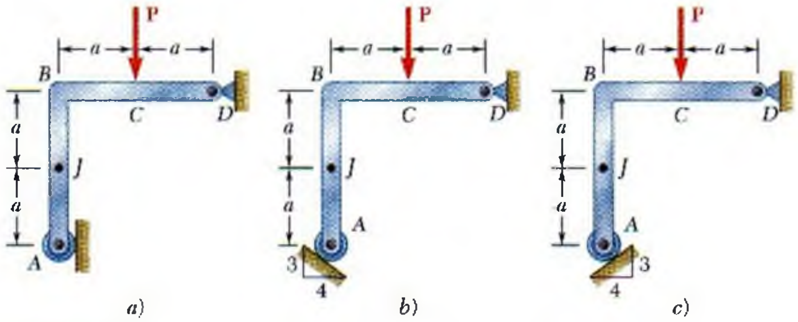


Figura *P7.22*

7.23 y 7.24 Una barra de peso *W* y sección transversal uniforme está doblada en forma de un cuarto de arco circular y se sostiene como indican las figuras. Determine el momento flector en el punto *J* cuando $\theta = 30°$.

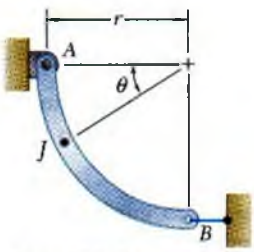


Figura P7.23

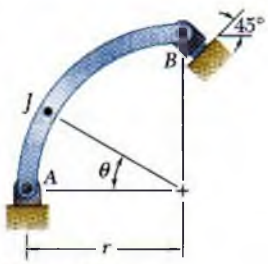


Figura P7.24

7.25 Para la barra del problema 7.23, determine la localización y magnitud del momento flector máximo.

7.26 Para la barra del problema 7.24, determine la localización y magnitud del momento flector máximo.

7.27 Una barra de peso W y sección transversal uniforme está doblada en forma de arco circular de radio r como indica la figura. Determine el momento flector en el punto J cuando $\theta = 30°$.

7.28 Una barra de peso W y sección transversal uniforme está doblada en forma de arco circular de radio r como indica la figura. Determine el momento flector en el punto J cuando $\theta = 120°$.

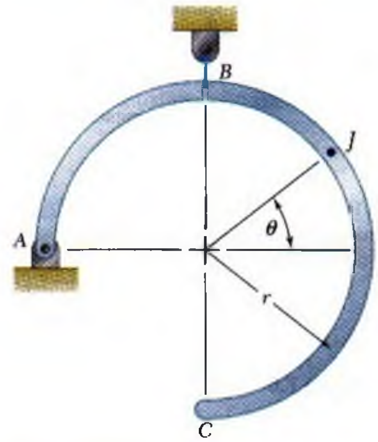


Figura ***P7.27*** **y** ***P7.28***

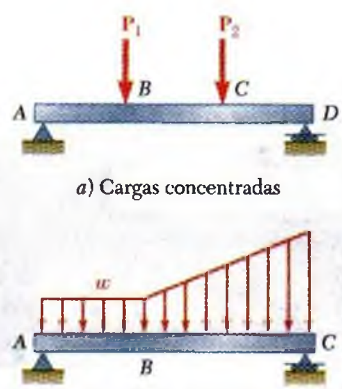
VIGAS

*7.3. DIFERENTES TIPOS DE CARGAS Y APOYOS

Un elemento estructural diseñado para soportar cargas que sean aplicadas en varios puntos a lo largo del elemento se conoce como *viga*. En la mayoría de los casos, las cargas son perpendiculares al eje de la viga y únicamente ocasionarán corte y flexión sobre ésta. Cuando las cargas no formen ángulo recto con la viga, también producirán fuerzas axiales en ella.

Por lo general, las vigas son barras prismáticas rectas y largas. El diseño de una viga para que soporte de la manera más efectiva las cargas aplicadas es un procedimiento que involucra dos partes: 1) determinar las fuerzas cortantes y los momentos flectores producidos por las cargas, y 2) seleccionar la sección transversal que resista de la mejor forma posible a las fuerzas cortantes y a los momentos flectores que se determinaron en la primera parte. Aquí se estudiará la primera parte del problema de diseñar vigas, la segunda parte corresponde al estudio de la mecánica de materiales.

Una viga puede estar sujeta a *cargas concentradas* $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, . . . , expresadas en newtons, libras o sus múltiplos, kilonewtons y kilolibras (figura 7.5*a*), a una *carga distribuida* w, expresada en N/m, kN/m, lb/ft o kips/ft (figura 7.5*b*), o a una combinación de ambas cargas. Cuando la carga w por unidad de longitud tiene un valor constante sobre una parte de la viga (como entre A y B en la figura 7.5*b*), se dice que la carga está *uniformemente distribuida* a lo largo de esa parte de la viga. La determinación de las reacciones en los apoyos se simplifica considerablemente si se reemplazan las cargas distribuidas por cargas concentradas equivalentes, como se explicó en la sección 5.8. Sin embargo, esta sustitución no debe llevarse a cabo o, por lo menos, se debe realizar con cuidado, cuando se calculan las fuerzas internas (vea el problema resuelto 7.3).



a) Cargas concentradas

b) Carga distribuida

Figura 7.5

Las vigas se clasifican de acuerdo con la forma en que estén apoyadas. En la figura 7.6 se muestran varios tipos de vigas que se usan con frecuencia. La distancia L existente entre los apoyos recibe el nombre de *claro*. Se debe señalar que las reacciones se determinarán siempre y cuando los apoyos involucren únicamente tres incógnitas; de estar involucradas más de tres incógnitas, las reacciones serán estáticamente indeterminadas y los métodos de la estática no serán suficientes para determinarlas; bajo estas circunstancias, se deben tomar en consideración las propiedades de la viga relacionadas con su resisten-

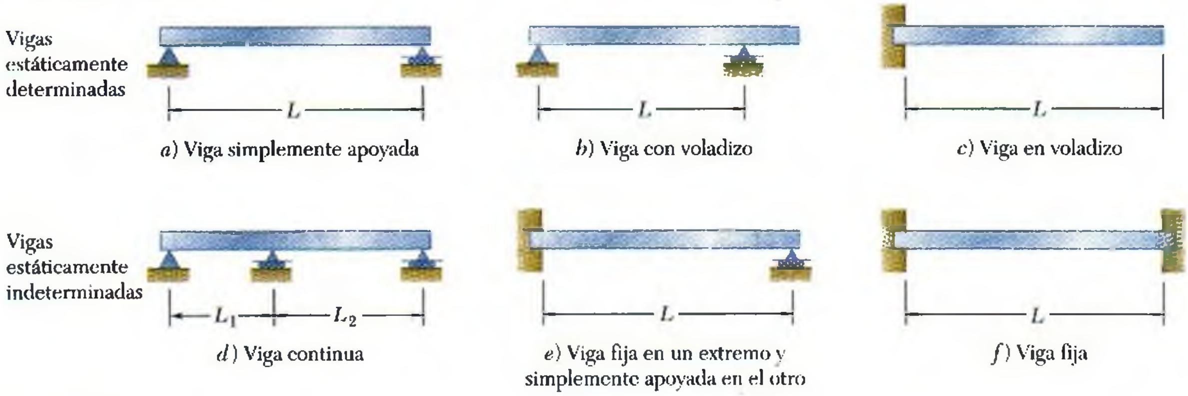


Figura 7.6

cia a la flexión. Aquí no se muestran vigas apoyadas en dos rodillos, las cuales están sólo parcialmente restringidas y se moverán bajo ciertas condiciones de carga.

Algunas veces dos o más vigas están conectadas por medio de articulaciones para formar una sola estructura continua. En la figura 7.7 se muestran dos ejemplos de vigas articuladas en un punto H. Se debe señalar que las reacciones en los apoyos involucran cuatro incógnitas, las cuales no pueden determinarse a partir del diagrama de cuerpo libre del sistema constituido por dos vigas. Sin embargo, éstas pueden ser determinadas considerando por separado el diagrama de cuerpo libre para cada una de las vigas; aquí están involucradas seis incógnitas (incluyendo dos componentes de fuerza en la articulación) y están disponibles seis ecuaciones de equilibrio.

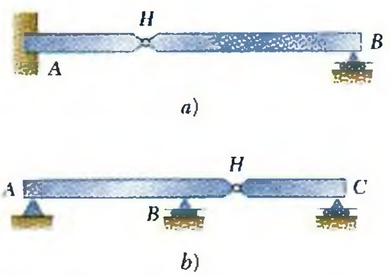


Figura 7.7

*7.4. FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLECTOR EN UNA VIGA

Considere una viga AB que está sujeta a varias cargas concentradas y distribuidas (figura 7.8*a*). Se busca determinar la fuerza cortante y el momento flector en cualquier punto de la viga. Aunque en el ejemplo la viga está simplemente apoyada, el método se puede aplicar a cualquier tipo de viga estáticamente determinada.

Primero se determinan las reacciones en A y en B seleccionando toda la viga como un cuerpo libre (figura 7.8*b*); si se escribe $\Sigma M_A = 0$ y $\Sigma M_B = 0$ se obtienen, respectivamente, $\mathbf{R}_B$ y $\mathbf{R}_A$.

Para determinar las fuerzas internas en C, se corta la viga en C y se dibujan los diagramas de cuerpo libre correspondientes a las partes AC y CB de la viga (figura 7.8*c*). Con el diagrama de cuerpo libre para la parte AC, se puede determinar la fuerza cortante $\mathbf{V}$ en C igualando a cero la suma de las componentes verticales de todas las fuerzas que actúan sobre AC. En forma similar se puede encontrar el momento flector $\mathbf{M}$ en C igualando a cero la suma de los momentos con respecto a C de todas las fuerzas y todos los pares que actúan sobre AC. Sin embargo, otra alternativa sería utilizar el diagrama de cuerpo libre para la parte CB[†] y determinar la fuerza cortante $\mathbf{V}'$ y el momento flector $\mathbf{M}'$ igualando a cero la suma de las componentes verticales y la suma de los momentos con respecto a C de todas las fuerzas y todos los pares que actúan sobre CB. A pesar de que la selección del cuerpo libre que se usa-



Fotografía 7.2 Las fuerzas internas en el paso a desnivel varían conforme el camión lo cruza.

[†] La fuerza y el par que representan las fuerzas internas que actúan sobre CB ahora serán representadas con $\mathbf{V}'$ y $\mathbf{M}'$, en lugar de representarlas con $-\mathbf{V}$ y $-\mathbf{M}$ como se había hecho anteriormente, con el fin de evitar confusiones cuando se aplique la convención de signos que se va a presentar más adelante en esta sección.

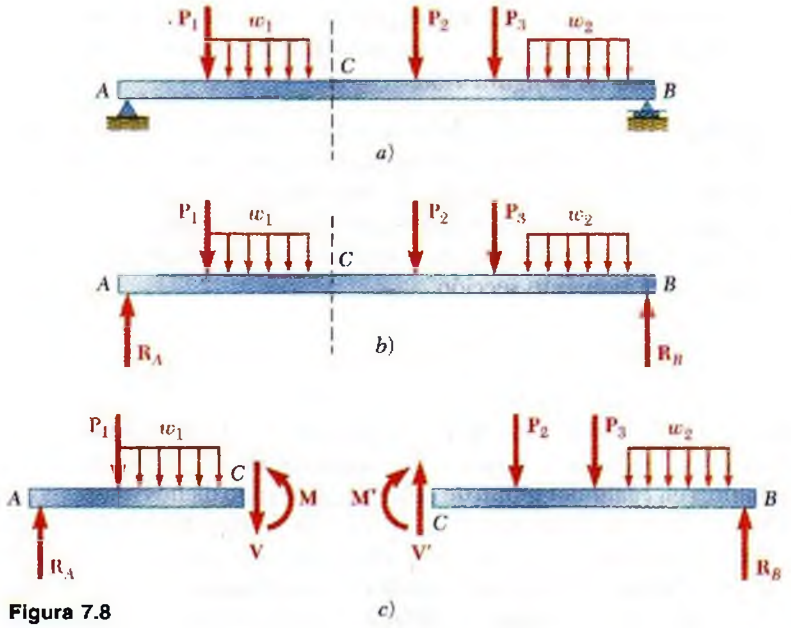


Figura 7.8

rá puede facilitar el cálculo de los valores numéricos de la fuerza cortante y el momento flector, hace que sea necesario indicar sobre qué parte de la viga están actuando las fuerzas internas consideradas. Por tanto, si se van a calcular y a registrar con eficiencia los valores de la fuerza cortante y del momento flector en todos los puntos de la viga, se debe encontrar una forma que permita evitar la especificación cada vez de la porción de la viga que se utilizó como el cuerpo libre. Para lograr esto, se adoptarán las siguientes convenciones:

Al determinar la fuerza cortante en una viga, *siempre se supondrá* que las fuerzas internas **V** y **V′** están dirigidas como se muestra en la figura 7.8*c*. Cuando se obtiene un valor positivo para su magnitud común V, esto indica que la suposición hecha fue correcta y que en realidad las fuerzas cortantes están dirigidas de la forma que se muestra en la figura. Cuando se obtiene un valor negativo para V, esto indica que la suposición hecha fue incorrecta y que las fuerzas cortantes están dirigidas en el sentido opuesto. Por tanto, para definir completamente las fuerzas cortantes en un punto dado de la viga sólo se necesita registrar la magnitud V con un signo positivo o negativo. Por lo general, se hace referencia al escalar V como la *fuerza cortante* en un punto dado de la viga.

En forma similar, *siempre se supondrá* que los pares internos **M** y **M′** están dirigidos como se muestra en la figura 7.8*c*. Cuando se obtiene un valor positivo para su magnitud M, a la cual se hace referencia comúnmente como el momento flector, esto indicará que la suposición hecha fue correcta mientras que un valor negativo indicará que la suposición fue incorrecta. En resumen, con la convención de signos que se acaba de presentar se establece lo siguiente:

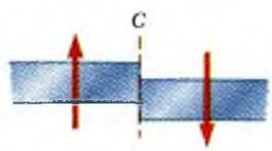
Se dice que la fuerza cortante V y que el momento flector M en un punto dado de una viga son positivos cuando las fuerzas y los pares internos que actúan sobre cada parte de la viga están dirigidos como se muestra en la figura 7.9a.

Estas convenciones son más fáciles de recordar si se observa que:

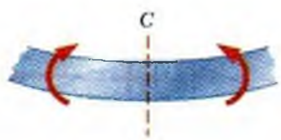
1. *La fuerza cortante en C es positiva cuando las fuerzas* **externas** *(las cargas y las reacciones) que actúan sobre la viga tienden a cortar a lo largo en C como se indica en la figura 7.9b.*



a) Fuerzas internas en la sección (fuerza cortante positiva y momento flector positivo)



b) Efecto de las fuerzas externas (fuerza cortante positiva)



c) Efecto de las fuerzas externas (momento flector positivo)

Figura 7.9

2. *El momento flector en C es positivo cuando las fuerzas* **externas** *que actúan sobre la viga tienden a flexionar a la viga, como se indica en la figura 7.9c.*

También puede ser útil señalar que la situación descrita en la figura 7.9, en la cual los valores de la fuerza cortante y del momento flector son positivos, es precisamente la situación que ocurre en la mitad izquierda de una viga apoyada que soporta una sola carga concentrada que actúa en su punto medio. Este ejemplo en particular se presenta completo en la siguiente sección.

*7.5. DIAGRAMAS DE FUERZA CORTANTE Y DE MOMENTO FLECTOR

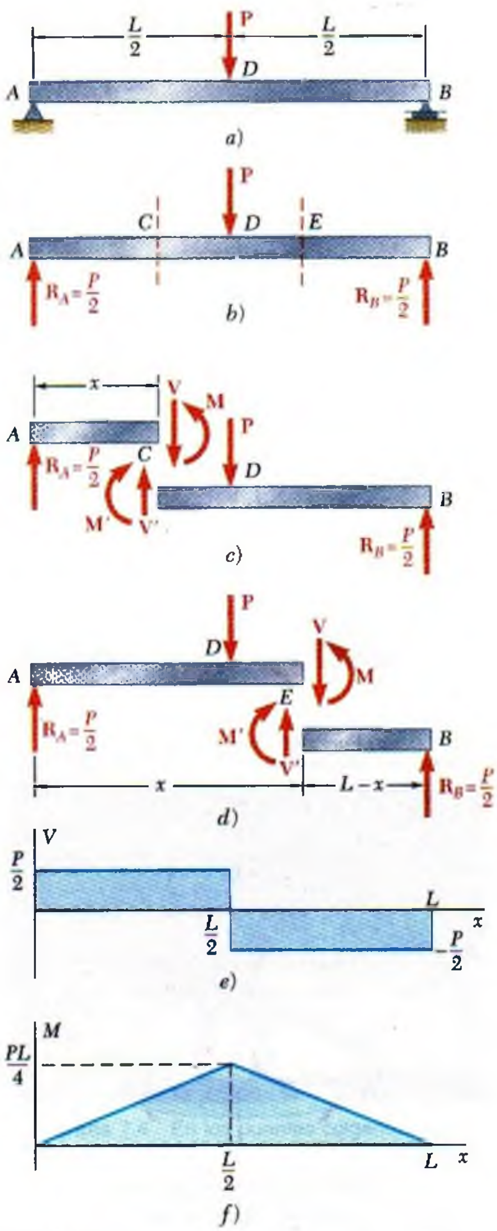


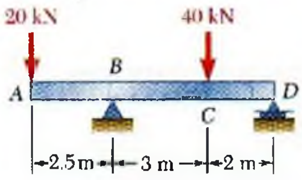
Figura 7.10

Ahora que se han definido claramente la fuerza cortante y el momento flector en lo referente a su magnitud y a su sentido, se pueden registrar sus valores en cualquier punto de una viga graficando dichos valores contra la distancia x medida desde un extremo de la viga. Las gráficas que se obtienen de esta manera reciben el nombre de *diagrama de fuerza cortante* y *diagrama de momento flector*, respectivamente. Como ejemplo, considere una viga apoyada AB que tiene un claro L y que está sometida a una sola carga concentrada **P** que actúa en su punto medio D (figura 7.10*a*). Primero se determinan las reacciones en los apoyos a partir del diagrama de cuerpo libre para la viga completa (figura 7.10*b*); de esta forma, se encuentra que la magnitud de cada reacción es igual a $P/2$.

Después se corta la viga en un punto C localizado entre A y D y se dibujan los diagramas de cuerpo libre para las partes AC y CB (figura 7.10*c*). *Si la fuerza cortante y el momento flector son positivos*, se dirigen las fuerzas internas **V** y **V′** y los pares internos **M** y **M′** como se indica en la figura 7.9*a*. Si se considera el cuerpo libre AC y se escribe que la suma de las componentes verticales y la suma de los momentos con respecto a C de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son iguales a cero, se encuentra que $V = +P/2$ y $M = +Px/2$. Por tanto, la fuerza cortante y el momento flector son positivos; lo anterior se puede corroborar observando que la reacción en A tiende a cortar y a flexionar la viga en C de la forma mostrada en la figura 7.9*b* y *c*. Se puede graficar V y M entre A y D (figura 7.10*e* y *f*); la fuerza cortante tiene un valor constante $V = P/2$, mientras que el momento flector aumenta linealmente desde $M = 0$ en $x = 0$ hasta $M = PL/4$ en $x = L/2$.

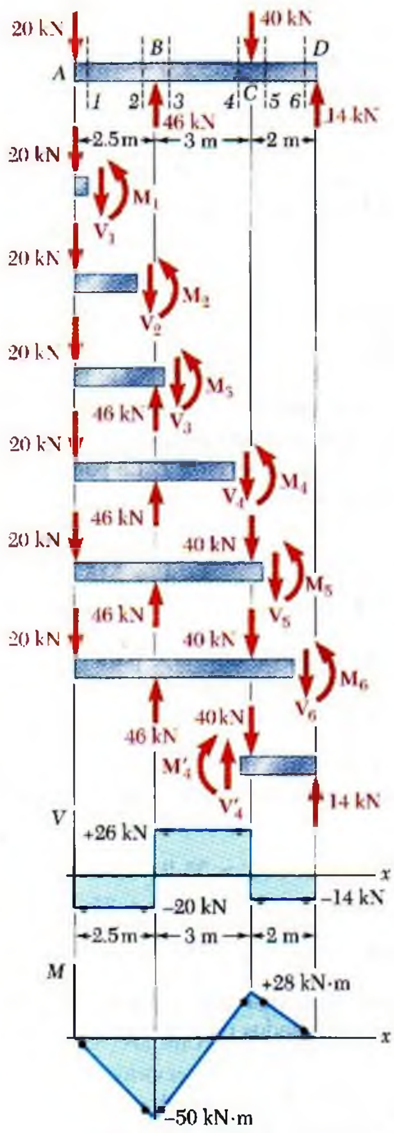
Ahora, si se corta la viga en un punto E localizado entre D y B y se considera el cuerpo libre EB (figura 7.10*d*), se escribe que la suma de las componentes verticales y la suma de los momentos con respecto a E de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son iguales a cero. De esta forma se obtiene $V = -P/2$ y $M = P(L - x)/2$. Por tanto, la fuerza cortante es negativa y el momento flector es positivo; lo anterior se puede corroborar observando que la reacción en B flexiona la viga en E de la forma indicada en la figura 7.9*c* pero tiende a cortarla de manera opuesta a la mostrada en la figura 7.9*b*. Ahora se pueden completar los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la figura 7.10*e* y *f*; la fuerza cortante tiene un valor constante $V = -P/2$ entre D y B, mientras que el momento flector decrece linealmente desde $M = PL/4$ en $x = L/2$ hasta $M = 0$ en $x = L$.

Es necesario señalar que cuando una viga sólo está sometida a cargas concentradas, la fuerza cortante tiene un valor constante entre las cargas y el momento flector varía linealmente entre éstas, pero cuando una viga está sometida a cargas distribuidas, la fuerza cortante y el momento flector varían en forma diferente (véase problema resuelto 7.3).



PROBLEMA RESUELTO 7.2

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga y las condiciones de carga que se muestran en la figura.



SOLUCIÓN

Cuerpo libre: viga completa. A partir del diagrama de cuerpo libre para toda la viga se encuentran las reacciones en B y en D:

$$\mathbf{R}_B = 46\text{ kN}\uparrow \qquad \mathbf{R}_D = 14\text{ kN}\uparrow$$

Fuerza cortante y momento flector. Primero se determinan las fuerzas internas justo a la derecha de la carga de 20 kN aplicada en A. Considerando la porción de la viga que está a la izquierda de la sección *1* como un cuerpo libre y suponiendo que V y M son positivos (de acuerdo con la convención estándar), se escribe

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \quad -20\text{ kN} - V_1 = 0 \qquad V_1 = -20\text{ kN}$$
$$+\circlearrowleft\Sigma M_1 = 0: \quad (20\text{ kN})(0\text{ m}) + M_1 = 0 \qquad M_1 = 0$$

Después, se considera como un cuerpo libre a la porción de la viga ubicada a la izquierda de la sección 2 y se escribe

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \quad -20\text{ kN} - V_2 = 0 \qquad V_2 = -20\text{ kN}$$
$$+\circlearrowleft\Sigma M_2 = 0: \quad (20\text{ kN})(2.5\text{ m}) + M_2 = 0 \qquad M_2 = -50\text{ kN}\cdot\text{m}$$

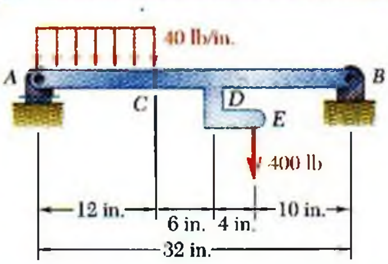
De forma similar, se determinan la fuerza cortante y el momento flector en las secciones *3*, *4*, *5* y *6* a partir de los diagramas de cuerpo libre mostrados en la figura. Así, se obtiene

$$V_3 = +26\text{ kN} \qquad M_3 = -50\text{ kN}\cdot\text{m}$$
$$V_4 = +26\text{ kN} \qquad M_4 = +28\text{ kN}\cdot\text{m}$$
$$V_5 = -14\text{ kN} \qquad M_5 = +28\text{ kN}\cdot\text{m}$$
$$V_6 = -14\text{ kN} \qquad M_6 = 0$$

Para varias de las secciones anteriores, los resultados se obtienen más fácilmente si se considera como un cuerpo libre la parte de la viga que está a la derecha de la sección de interés. Por ejemplo, considerando la porción de la viga que está a la derecha de la sección *4*, se escribe

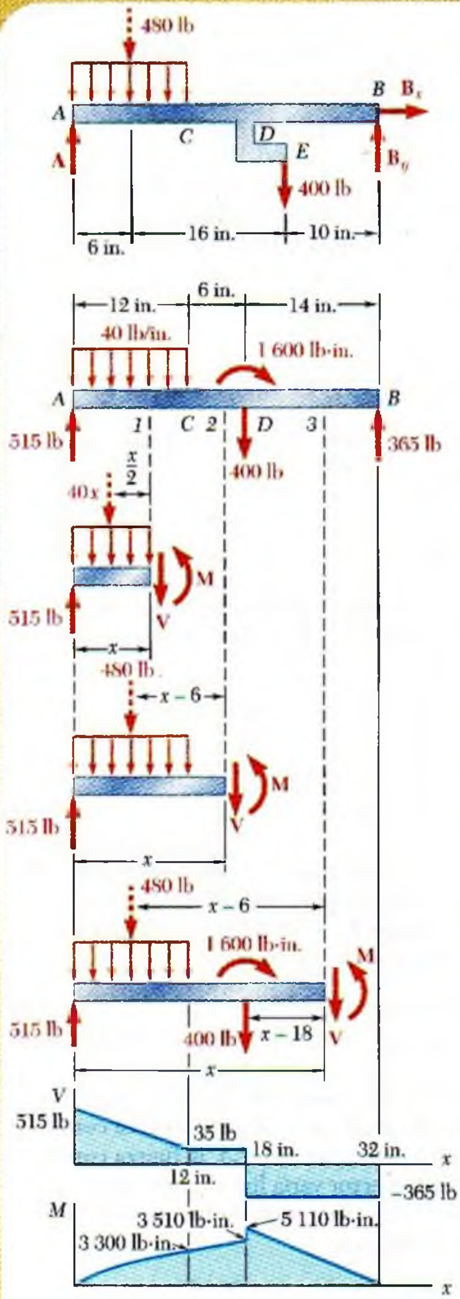
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \quad V_4 - 40\text{ kN} + 14\text{ kN} = 0 \qquad V_4 = +26\text{ kN}$$
$$+\circlearrowleft\Sigma M_4 = 0: \quad -M_4 + (14\text{ kN})(2\text{ m}) = 0 \qquad M_4 = +28\text{ kN}\cdot\text{m}$$

Diagramas de fuerza cortante y de momento flector. Ahora se pueden graficar los seis puntos mostrados en los diagramas de fuerza cortante y de momento flector. Como se señaló en la sección 7.5, la fuerza cortante tiene un valor constante y el momento flector varía linealmente entre cargas concentradas; por tanto, se obtienen los diagramas de fuerza cortante y momento flector que se muestra en el diagrama.



PROBLEMA RESUELTO 7.3

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga AB. La carga distribuida de 40 lb/in. se extiende sobre 12 in. de la viga, desde A hasta C, y la carga de 400 lb se aplica en E.



SOLUCIÓN

Cuerpo libre: viga completa. Se determinan las reacciones considerando la viga completa como un cuerpo libre.

$+\circlearrowleft\Sigma M_A = 0$: $\quad B_y(32 \text{ in.}) - (480 \text{ lb})(6 \text{ in.}) - (400 \text{ lb})(22 \text{ in.}) = 0$

$B_y = +365 \text{ lb} \qquad \mathbf{B}_y = 365 \text{ lb}\uparrow$

$+\circlearrowleft\Sigma M_B = 0$: $\quad (480 \text{ lb})(26 \text{ in.}) + (400 \text{ lb})(10 \text{ in.}) - A(32 \text{ in.}) = 0$

$A = +515 \text{ lb} \qquad \mathbf{A} = 515 \text{ lb}\uparrow$

$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0$: $\quad B_x = 0 \qquad \mathbf{B}_x = 0$

Ahora, la carga de 400 lb se reemplaza por un sistema equivalente fuerza-par que actúa sobre la viga en el punto D.

Fuerza cortante y momento flector. *Desde A hasta C.* Se determinan las fuerzas internas a una distancia x a partir del punto A considerando la parte de la viga que está a la izquierda de la sección *1*. La parte de la carga distribuida que actúa sobre el cuerpo libre se reemplaza por su resultante y se escribe

$+\uparrow\Sigma F_y = 0$: $\quad 515 - 40x - V = 0 \qquad V = 515 - 40x$

$+\circlearrowleft\Sigma M_1 = 0$: $\quad -515x + 40x(\frac{1}{2}x) + M = 0 \qquad M = 515x - 20x^2$

Como el diagrama de cuerpo libre mostrado puede utilizarse para todos los valores de x menores que 12 in., las expresiones obtenidas para V y M son válidas a lo largo de la región $0 < x < 12$ in.

Desde C hasta D. Considerando la parte de la viga que está a la izquierda de la sección *2* y reemplazando nuevamente la carga distribuida por su resultante, se obtiene

$+\uparrow\Sigma F_y = 0$: $\quad 515 - 480 - V = 0 \qquad V = 35 \text{ lb}$

$+\circlearrowleft\Sigma M_2 = 0$: $\quad -515x + 480(x - 6) + M = 0 \qquad M = (2\,880 + 35x) \text{ lb} \cdot \text{in.}$

Estas expresiones son válidas en la región 12 in. $< x <$ 18 in.

Desde D hasta B. Con la porción de la viga que está a la izquierda de la sección 3, se obtienen los siguientes resultados para la región 18 in. $< x <$ 32 in.

$+\uparrow\Sigma F_y = 0$: $\quad 515 - 480 - 400 - V = 0 \qquad V = -365 \text{ lb}$

$+\circlearrowleft\Sigma M_3 = 0$: $\quad -515x + 480(x - 6) - 1\,600 + 400(x - 18) + M = 0$

$M = (11\,680 - 365x) \text{ lb} \cdot \text{in.}$

Diagramas de fuerza cortante y de momento flector. Ahora se pueden graficar los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para toda la viga. Se observa que el par que está aplicado en D cuyo momento es igual a 1 600 lb · in. introduce una discontinuidad en el diagrama de momento flector.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se aprendió a determinar la *fuerza cortante V* y el *momento flector M* en cualquier punto de una viga. También se aprendió a dibujar el *diagrama de fuerza cortante* y el *diagrama de momento flector* para la viga graficando, respectivamente, V y M contra la distancia x medida a lo largo de la viga.

A. *Determinación de la fuerza cortante y el momento flector en una viga.* Para determinar la fuerza cortante V y el momento flector M en un punto dado C de una viga, se deben seguir los siguientes pasos.

1. Dibujar un diagrama de cuerpo libre para la viga completa y utilizarlo para determinar las reacciones en los apoyos de la viga.

2. Cortar la viga en el punto C y, con las cargas originales, seleccionar una de las dos porciones de la viga que se han obtenido.

3. Dibujar el diagrama de cuerpo libre de la porción de la viga que se haya seleccionado, mostrando:

a) Las cargas y las reacciones ejercidas sobre esa parte de la viga, reemplazando cada una de las cargas distribuidas por una carga concentrada equivalente, como se explicó en la sección 5.8.

b) La fuerza cortante y el par flector que representan las fuerzas internas en C. Para facilitar el registro de la fuerza cortante V y del momento flector M después que éstos han sido determinados, se debe seguir la convención indicada en las figuras 7.8 y 7.9. Por tanto, si se usa la parte de la viga ubicada a la *izquierda* de C, se aplica en C una *fuerza cortante* **V** *dirigida hacia abajo y* un *par flector* **M** *dirigido en un sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj*. Si se está utilizando la porción de la viga ubicada a la *derecha de C*, se aplica en C una *fuerza cortante* **V′** *dirigida hacia arriba* y un *par flector* **M′** *dirigido en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj* [problema resuelto 7.2].

4. Escribir las ecuaciones de equilibrio para la porción de la viga que se ha seleccionado. Se resuelve la ecuación $\Sigma F_y = 0$ para V y la ecuación $\Sigma M_C = 0$ para M.

5. Registrar los valores de V y M con el signo obtenido para cada uno de éstos. Un signo positivo para V significa que las fuerzas cortantes en C sobre cada una de las dos porciones de la viga están dirigidas como se muestra en las figuras 7.8 y 7.9; un signo negativo significa que las fuerzas cortantes tienen un sentido opuesto. En forma similar, un signo positivo para M significa que los pares flectores en C están dirigidos como se muestra en las figuras y un signo negativo significa que los pares flectores tienen un sentido opuesto. Además, un signo positivo para M significa que la concavidad de la viga en el punto C está dirigida hacia arriba mientras que un signo negativo significa que dicha concavidad está dirigida hacia abajo.

(continúa)

B. Dibujo de los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para una viga. Estos diagramas se obtienen al graficar, respectivamente, V y M contra la distancia x medida a lo largo de la viga. Sin embargo, en la mayoría de los casos sólo se necesita calcular los valores de V y M en unos cuantos puntos.

1. Para una viga que soporta únicamente cargas concentradas, se observa que [problema resuelto 7.2]:

a) El diagrama de fuerza cortante consiste en segmentos de líneas horizontales. Por tanto, para dibujar el diagrama de fuerza cortante de la viga sólo se necesitará calcular el valor de V justo a la izquierda o justo a la derecha de los puntos donde se aplican las cargas o las reacciones.

b) El diagrama de momento flector consiste de segmentos de líneas rectas oblicuas. Por tanto, para dibujar el diagrama de momento flector de la viga sólo se necesitará calcular el valor de M en los puntos donde se aplican las cargas o las reacciones.

2. Para una viga que soporta cargas uniformemente distribuidas, es necesario señalar [problema resuelto 7.3] que bajo cada una de las cargas distribuidas se tiene lo siguiente:

a) El diagrama de fuerza consiste de un segmento de una línea recta oblicua. Por tanto, sólo se necesita calcular el valor de V donde empieza y termina la carga distribuida.

b) El diagrama de momento flector consiste de un arco de parábola. En la mayoría de los casos sólo se necesita calcular el valor de M donde empieza y termina la carga distribuida.

3. Para una viga con una carga más complicada, es necesario considerar el diagrama de cuerpo libre de una porción de la viga de longitud arbitraria x y determinar V y M como funciones de x. Es posible que se tenga que repetir este procedimiento varias veces puesto que por lo general V y M están representadas con diferentes funciones en distintas partes de la viga [problema resuelto 7.3].

4. Cuando se aplica un par a una viga, la fuerza cortante tiene el mismo valor en ambos lados del punto de aplicación del par pero en el diagrama de momento flector presentará una discontinuidad en dicho punto, incrementándose o disminuyendo en una cantidad igual a la magnitud del par. Observe que un par se puede aplicar directamente a la viga o puede resultar a partir de la aplicación de una carga sobre un elemento curvo que está unido rígidamente a la viga [problema resuelto 7.3].

Problemas

7.29 a 7.32 Para la viga y las cargas mostradas en las figuras, *a*) trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

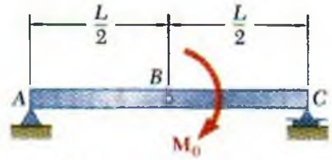


Figura P7.29

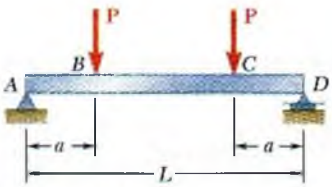


Figura P7.30

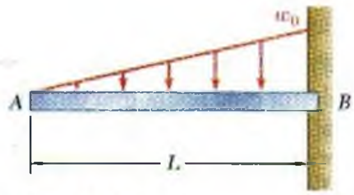


Figura P7.31

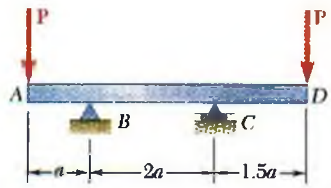


Figura P7.32

7.33 y 7.34 Para la viga y las cargas mostradas en las figuras, *a*) trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

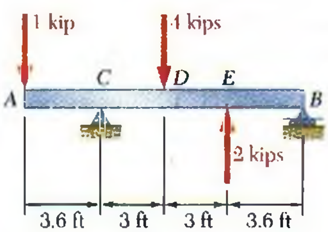


Figura *P7.33*

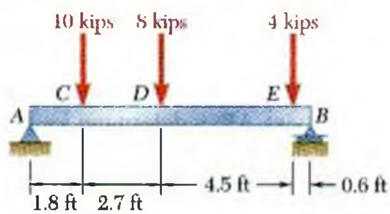


Figura P7.34

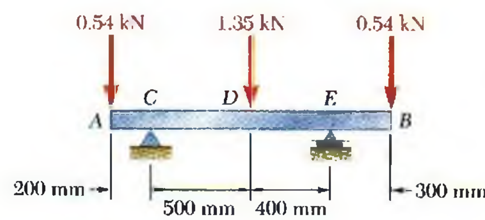


Figura *P7.35*

7.35 y 7.36 Para la viga y las cargas mostradas en las figuras, *a*) trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

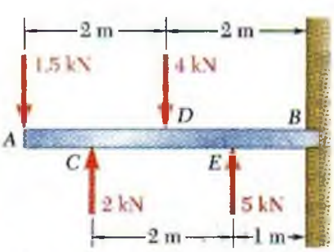


Figura P7.36

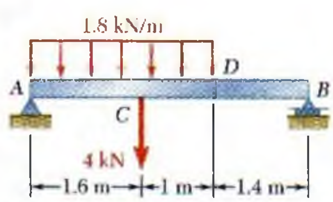


Figura P7.37

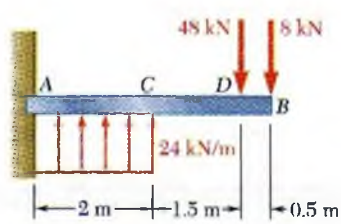


Figura *P7.38*

7.37 y *7.38* Para la viga y las cargas mostradas en las figuras, *a*) trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

7.39 y 7.40 Para la viga y las cargas mostradas en las figuras, *a*) trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

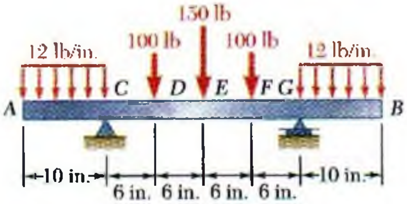


Figura P7.39

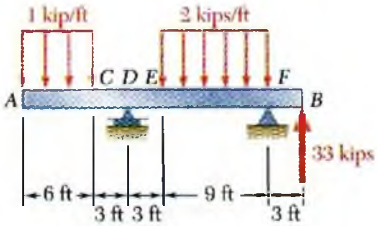


Figura P7.40

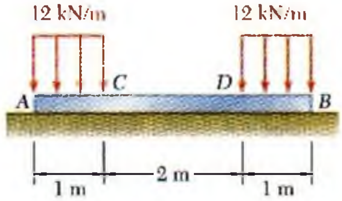


Figura P7.41

7.41 y *7.42* Si se supone que la reacción del suelo sobre la viga *AB* que muestra cada figura está dirigida hacia arriba y es uniformemente distribuida, *a*) trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

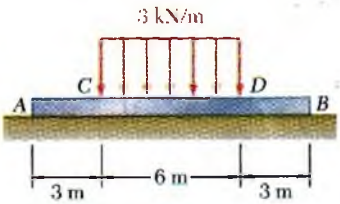


Figura *P7.42*

7.43 Si se supone que la reacción del suelo sobre la viga *AB* que muestra la figura está dirigida hacia arriba y es uniformemente distribuida, *a*) trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

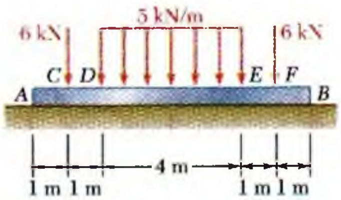


Figura P7.43

7.44 Si la reacción del suelo sobre la viga *AB* que muestra la figura está dirigida hacia arriba y es uniformemente distribuida, y $a = 0.3$ m, *a*) trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

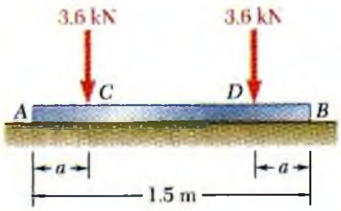


Figura *P7.44*

7.45 y *7.46* Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga *AB*, y determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

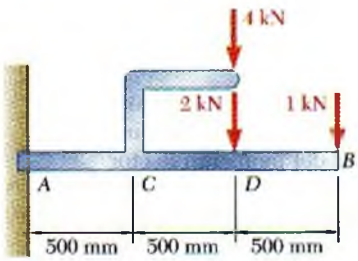


Figura P7.45

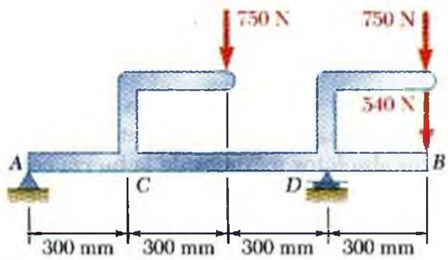


Figura *P7.46*

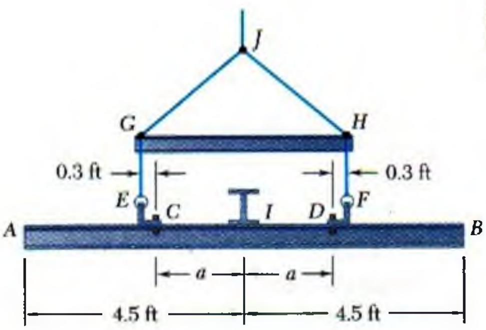


Figura P7.47

7.47 Dos pequeñas secciones de ángulo, *CE* y *DF*, se atornillan a la viga uniforme *AB* con peso de 900 lb, y el elemento estructural se sostiene temporalmente por medio de los cables verticales *EG* y *FH* como indica la figura. Una segunda viga que descansa sobre la viga *AB* en *I* ejerce una fuerza hacia abajo de 810 lb sobre *AB*. Si $a = 0.9$ ft y sin tomar en cuenta el peso de las secciones de ángulo, *a*) trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga *AB*, *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector en la viga.

7.48 Resuelva el problema 7.47 para $a = 1.8$ ft.

7.49 Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga AB, y determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

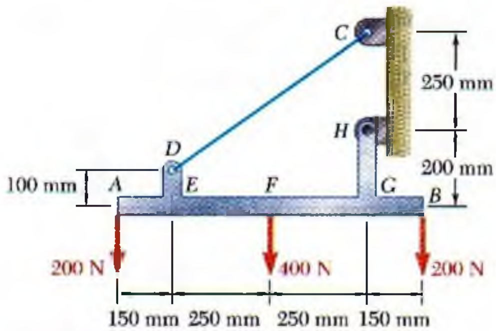


Figura P7.49

7.50 Sin tomar en cuenta el tamaño de la polea colocada en G, *a*) trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga AB que muestra la figura, *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

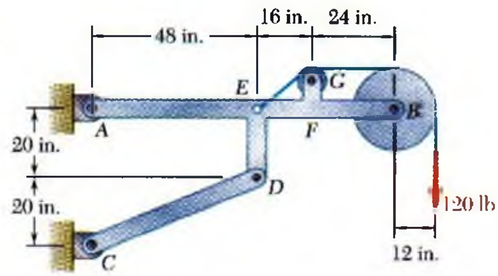


Figura *P7.50*

7.51 Para la viga del problema 7.44, determine *a*) la distancia a para la cual el valor absoluto máximo del momento flector en la viga sea mínimo, *b*) el valor correspondiente de $|M|_{\text{máx}}$. (*Sugerencia*: Trace el diagrama de momento flector e iguale los valores absolutos máximos positivos y negativos que se obtengan en el diagrama.)

7.52 Para el elemento estructural del problema 7.47, determine *a*) la distancia a para la cual el valor absoluto máximo del momento flector en la viga AB sea mínimo, *b*) el valor correspondiente de $|M|_{\text{máx}}$. (Vea la sugerencia del problema 7.51.)

7.53 Para la viga que muestra la figura, determine *a*) la magnitud de P cuyo valor máximo del momento flector sea mínimo, *b*) el valor correspondiente de $|M|_{\text{máx}}$. (Vea la sugerencia del problema 7.51.)

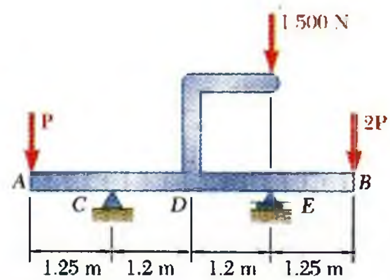


Figura P7.53

7.54 Para la viga y las cargas mostradas, determine *a*) la distancia a para la cual el valor absoluto máximo del momento flector en la viga sea mínimo, *b*) el valor correspondiente de $|M|_{\text{máx}}$. (Vea la sugerencia del problema 7.51.)

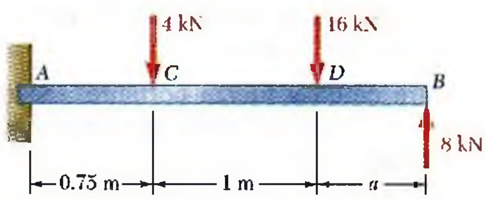


Figura P7.54

7.55 Si $P = Q = 500$ lb, determine *a*) la distancia a para la cual el valor absoluto máximo del momento flector en la viga AB que muestra la figura sea mínimo, *b*) el valor correspondiente de $|M|_{\text{máx}}$. (Vea la sugerencia del problema 7.51.)

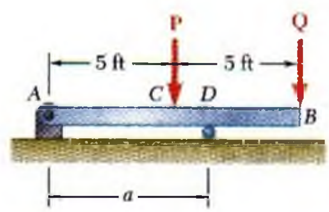


Figura *P7.55*

7.56 Resuelva el problema 7.55 suponiendo que $P = 250$ lb y $Q = 500$ lb.

***7.57** Para reducir el momento flector de la viga en voladizo AB que muestra la figura, se fijan de manera permanente un cable y un contrapeso en el extremo B. Determine la magnitud del contrapeso para la cual el valor absoluto máximo del momento flector en la viga sea lo más pequeño posible, así como el valor correspondiente de $|M|_{máx}$. Considere *a*) el caso en que la carga distribuida se aplica permanentemente sobre la viga, *b*) el caso más general en que la carga distribuida puede aplicarse o removerse.

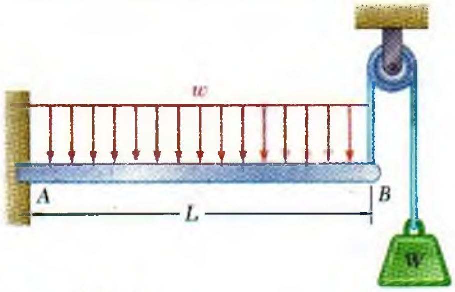


Figura P7.57

*7.6. RELACIONES ENTRE CARGA, FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLECTOR

Si una viga sostiene más de dos o tres cargas concentradas, o cuando soporta cargas distribuidas, es muy probable que el método para graficar las fuerzas cortantes y los momentos flectores descrito en la sección 7.5 se vuelva muy laborioso. La elaboración del diagrama de fuerza cortante y, especialmente, la del diagrama de momento flector, se simplificarán en gran medida si se toman en consideración ciertas relaciones que existen entre la carga, la fuerza cortante y el momento flector.

Considérese una viga simplemente apoyada AB que soporta una carga distribuida w por unidad de longitud (figura 7.11*a*), y sean C y C' dos puntos sobre la viga separados por una distancia Δx entre sí. La fuerza cortante y el momento flector ubicados en C estarán representados, respectivamente, con V y M, las cuales se supondrán positivas; la fuerza cortante y el momento flector localizados en C' serán representados mediante $V + \Delta V$ y $M + \Delta M$.

Ahora se separa el tramo de viga CC' y se traza su diagrama de cuerpo libre (figura 7.11*b*). Las fuerzas ejercidas sobre el cuerpo libre incluyen una carga de magnitud $w\,\Delta x$ y las fuerzas y los pares internos que actúan en C y C'. Como se ha supuesto que la fuerza cortante y el momento flector son positivos, las fuerzas y los pares estarán dirigidos en la forma indicada por la figura.

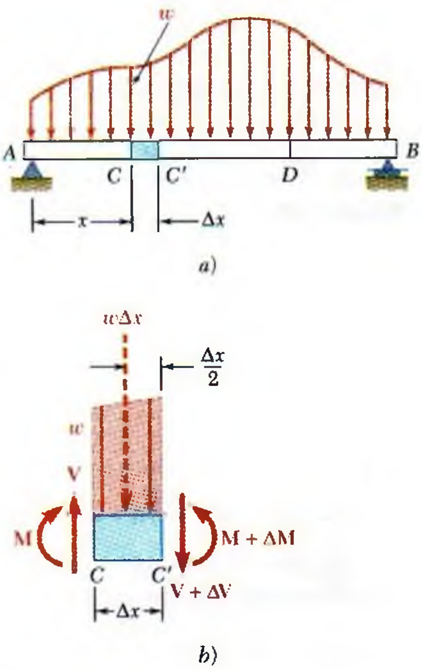


Figura 7.11

Relaciones entre carga y fuerza cortante. Se escribe que la suma de las componentes verticales de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre CC' es igual a cero:

$$V - (V + \Delta V) - w\,\Delta x = 0$$
$$\Delta V = -w\,\Delta x$$

Al dividir ambos lados de la ecuación anterior entre Δx, y haciendo luego que Δx tienda a cero, se obtiene

$$\frac{dV}{dx} = -w \qquad (7.1)$$

La fórmula (7.1) indica que para una viga de la forma que muestra la figura 7.11*a*, la pendiente dV/dx de la curva de fuerza cortante es ne-

gativa; además, el valor absoluto de la pendiente en cualquier punto es igual a la carga por unidad de longitud en dicho punto. Si se integra la ecuación (7.1) entre los puntos C y D, se obtiene

$$V_D - V_C = -\int_{x_C}^{x_D} w\, dx \tag{7.2}$$

$$V_D - V_C = -(\text{área bajo la curva de carga entre } C \text{ y } D) \tag{7.2'}$$

Obsérvese que también se pudo haber obtenido este resultado considerando el equilibrio de la porción CD de la viga, puesto que el área bajo la curva de carga representa la carga total aplicada entre C y D.

Es necesario señalar que la ecuación (7.1) *no es válida* en un punto donde se aplica una carga concentrada; como se vio en la sección 7.5, la curva de fuerza cortante es discontinua en dicho punto. En forma similar, las ecuaciones (7.2) y (7.2′) dejan de ser válidas cuando se aplican cargas concentradas entre C y D, puesto que dichas ecuaciones no toman en consideración el cambio brusco en la fuerza cortante ocasionado por una carga concentrada. Por tanto, las ecuaciones (7.2) y (7.2′) sólo se deben aplicar entre cargas concentradas sucesivas.

Relaciones entre la fuerza cortante y el momento flector. Regresando al diagrama de cuerpo libre de la figura 7.11*b*, ahora se escribe que la suma de los momentos con respecto a C' es igual a cero y se obtiene

$$(M + \Delta M) - M - V\,\Delta x + w\,\Delta x \frac{\Delta x}{2} = 0$$

$$\Delta M = V\,\Delta x - \tfrac{1}{2} w (\Delta x)^2$$

Si se dividen ambos lados de la ecuación anterior entre Δx y se hace que Δx tienda a cero, se obtiene

$$\frac{dM}{dx} = V \tag{7.3}$$

La ecuación (7.3) indica que la pendiente dM/dx de la curva de momento flector es igual al valor de la fuerza cortante. Esto es cierto en cualquier punto donde la fuerza cortante tenga un valor bien definido, es decir, en cualquier punto donde no se aplique una fuerza concentrada. Además, la ecuación (7.3) también muestra que la fuerza cortante es igual a cero en aquellos puntos donde el momento flector es máximo. Esta propiedad facilita el cálculo de los puntos donde es más probable que la viga falle bajo flexión.

Si se integra la ecuación (7.3) entre los puntos C y D, se obtiene

$$M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} V\, dx \tag{7.4}$$

$$M_D - M_C = \text{área bajo la curva de fuerza cortante entre } C \text{ y } D \tag{7.4'}$$

Obsérvese que se debe considerar que el área bajo la curva de fuerza cortante es positiva en aquellos lugares donde la fuerza cortante es positiva y que el área es negativa donde la fuerza cortante es negativa. Las ecuaciones (7.4) y (7.4′) son válidas cuando se aplican cargas concentradas entre C y D, y siempre y cuando se haya dibujado correctamente la curva de fuerza cortante. Sin embargo, dichas fórmulas dejan de ser válidas si se aplica un *par* en un punto localizado entre C y D, puesto que las fórmulas en cuestión no consideran el cambio brusco en el momento flector ocasionado por un par (véase problema resuelto 7.7).

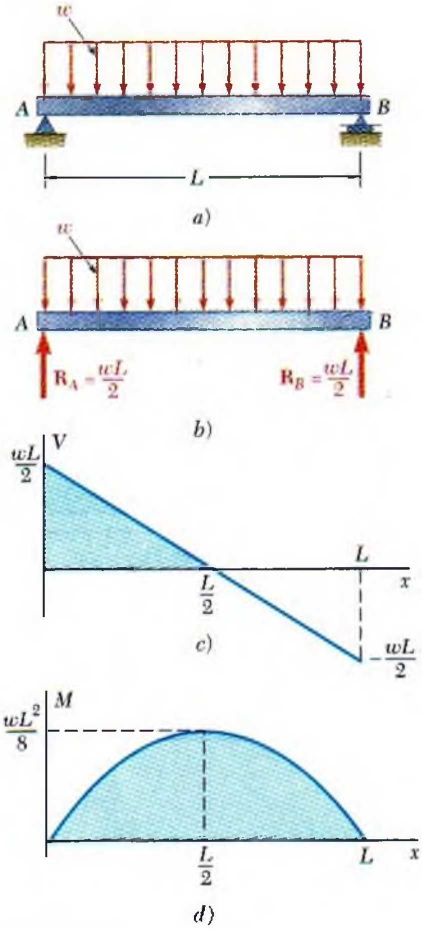


Figura 7.12

Ejemplo. Considere una viga apoyada AB que tiene un claro L y que soporta una carga distribuida de manera uniforme w (figura 7.12*a*). A partir del diagrama de cuerpo libre para toda la viga se determina la magnitud de las reacciones en los apoyos $R_A = R_B = wL/2$ (figura 7.12*b*). Después, se dibuja el diagrama de fuerza cortante. Cerca del extremo A de la viga, la fuerza cortante es igual a R_A, esto es, igual a $wL/2$, como puede corroborarse considerando una porción muy pequeña de la viga como un cuerpo libre. Entonces, utilizando la ecuación (7.2) se puede determinar la fuerza cortante V a cualquier distancia x a partir de A. Así se escribe

$$V - V_A = -\int_0^x w\,dx = -wx$$
$$V = V_A - wx = \frac{wL}{2} - wx = w\left(\frac{L}{2} - x\right)$$

En este sentido, la curva de fuerza cortante es una línea recta oblicua que cruza el eje x en $x = L/2$ (figura 7.12*c*). Ahora considere el momento flector, primero se observa que $M_A = 0$. Entonces, el valor M del momento flector a cualquier distancia x a partir de A se puede obtener a partir de la ecuación (7.4); así se tiene que

$$M - M_A = \int_0^x V dx$$
$$M = \int_0^x w\left(\frac{L}{2} - x\right) dx = \frac{w}{2}(Lx - x^2)$$

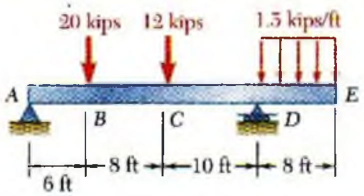
La curva de momento flector es una parábola. El máximo valor del momento flector ocurre cuando $x = L/2$, puesto que V (y, por tanto, dM/dx) es igual a cero para dicho valor de x. Si se sustituye $x = L/2$ en la última ecuación, se obtiene $M_{máx} = wL^2/8$.

En la mayoría de las aplicaciones de ingeniería sólo se necesita conocer el valor del momento flector en unos cuantos puntos específicos. Una vez que se ha dibujado el diagrama de fuerza cortante y después de que se ha determinado el valor de M en uno de los extremos de la viga, se puede obtener el valor del momento flector en cualquier punto, calculando el área bajo la curva de fuerza cortante y utilizando la ecuación (7.4′). Por ejemplo, como $M_A = 0$ para la viga de la figura 7.12, el máximo valor del momento flector para la viga se puede obtener midiendo el área del triángulo sombreado en el diagrama de fuerza cortante:

$$M_{máx} = \frac{1}{2}\frac{L}{2}\frac{wL}{2} = \frac{wL^2}{8}$$

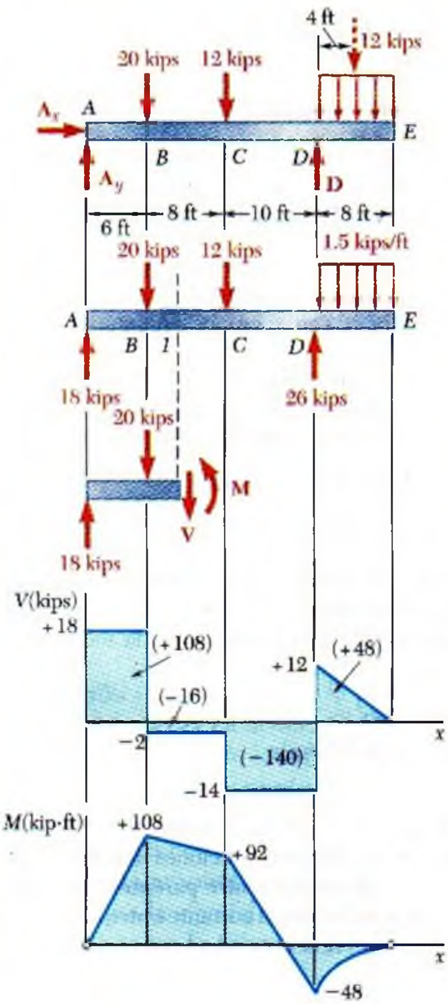
En este ejemplo, la curva de carga es una línea recta horizontal, la curva de fuerza cortante es una línea recta oblicua y la curva de momento flector es una parábola. Si la curva de carga hubiera sido una línea recta oblicua (polinomio de primer grado), la curva de fuerza cortante habría sido una parábola (polinomio de segundo grado) y la curva de momento flector hubiera sido cúbica (polinomio de tercer grado). Las curvas de fuerza cortante y momento flector siempre serán, respectivamente, uno y dos grados mayores que la curva de carga. Por tanto, una vez que se han calculado unos cuantos valores de la fuerza cortante y del momento flector, se deberán poder bosquejar los diagramas de fuerza cortante y momento flector sin tener que determinar las funciones $V(x)$ y $M(x)$. Los bosquejos obtenidos serán más precisos si se hace uso del hecho de que en cualquier punto donde las curvas son continuas, la pendiente de la curva de fuerza cortante es igual a $-w$ y la pendiente de la curva de momento flector es igual a V.

PROBLEMA RESUELTO 7.4



Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga y las condiciones de carga mostradas en la figura.

SOLUCIÓN



Cuerpo libre: viga completa. Si se considera a toda la viga como un cuerpo libre, se determinan las reacciones:

$+\circlearrowleft\Sigma M_A = 0$:
$$D(24 \text{ ft}) - (20 \text{ kips})(6 \text{ ft}) - (12 \text{ kips})(14 \text{ ft}) - (12 \text{ kips})(28 \text{ ft}) = 0$$
$$D = +26 \text{ kips} \qquad \mathbf{D} = 26 \text{ kips} \uparrow$$

$+\uparrow\Sigma F_y = 0$: $\quad A_y - 20 \text{ kips} - 12 \text{ kips} + 26 \text{ kips} - 12 \text{ kips} = 0$
$$A_y = +18 \text{ kips} \qquad \mathbf{A}_y = 18 \text{ kips} \uparrow$$

$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0$: $\quad A_x = 0 \qquad \mathbf{A}_x = 0$

También se debe señalar que tanto en A como en E el momento flector es igual a cero; por tanto, se obtienen dos puntos (indicados por medio de pequeños círculos) del diagrama de momento flector.

Diagrama de fuerza cortante. Como $dV/dx = -w$, se encuentra que la pendiente del diagrama de fuerza cortante es igual a cero (esto es, que la fuerza cortante es constante) entre cargas concentradas y reacciones. La fuerza cortante en cualquier punto se determina dividiendo la viga en dos partes y considerando a cualquiera de dichas partes como un cuerpo libre. Por ejemplo, utilizando la porción de la viga que está a la izquierda de la sección *1*, se obtiene la fuerza cortante entre B y C:

$+\uparrow\Sigma F_y = 0$: $\quad +18 \text{ kips} - 20 \text{ kips} - V = 0 \qquad V = -2 \text{ kips}$

Además, también se encuentra que la fuerza cortante es igual a +12 kilolibras (kips) justo a la derecha del punto D y que la fuerza cortante es igual a cero en el extremo E. Como la pendiente $dV/dx = -w$ es constante entre D y E, el diagrama de fuerza cortante es una línea recta entre estos dos puntos.

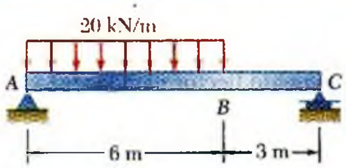
Diagrama de momento flector. Se recuerda que el área bajo la curva de fuerza cortante entre dos puntos es igual al cambio en el momento flector entre esos mismos dos puntos. Por conveniencia, se calcula el área de cada porción del diagrama de fuerza cortante y se indica el valor obtenido en ese mismo diagrama. Como se sabe que el momento flector M_A en el extremo izquierdo es igual a cero, se escribe

$$M_B - M_A = +108 \qquad M_B = +108 \text{ kips} \cdot \text{ft}$$
$$M_C - M_B = -\ 16 \qquad M_C = +\ 92 \text{ kips} \cdot \text{ft}$$
$$M_D - M_C = -140 \qquad M_D = -\ 48 \text{ kips} \cdot \text{ft}$$
$$M_E - M_D = +\ 48 \qquad M_E = 0$$

Como se sabe que M_E es igual a cero, se obtiene una comprobación de los cálculos realizados.

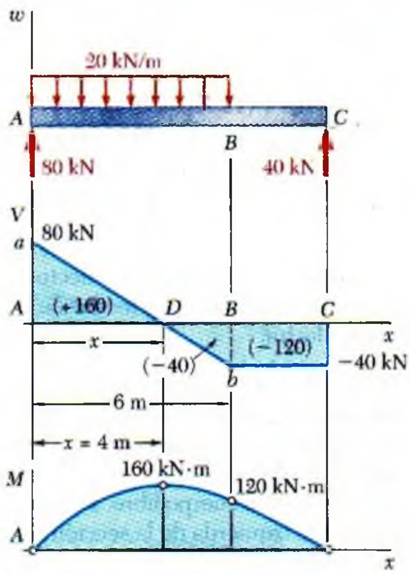
Entre las cargas concentradas y reacciones la fuerza cortante es constante; por tanto, la pendiente dM/dx es constante y se dibuja el diagrama de momento flector conectando los puntos conocidos con líneas rectas. Entre D y E, donde el diagrama de fuerza cortante es una línea recta oblicua, el diagrama de momento flector es una parábola.

A partir de los diagramas para V y M se observa que $V_{máx} = 18$ kips y $M_{máx} = 108$ kips · ft.



PROBLEMA RESUELTO 7.5

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga y las condiciones de carga mostradas en la figura y determine la ubicación y magnitud del momento flector máximo.



SOLUCIÓN

Cuerpo libre: viga completa. Si se considera toda la viga como un cuerpo libre, se obtienen las reacciones

$$\mathbf{R}_A = 80 \text{ kN} \uparrow \qquad \mathbf{R}_C = 40 \text{ kN} \uparrow$$

Diagrama de fuerza cortante. La fuerza cortante justo a la derecha del punto A es $V_A = +80$ kN. Como el cambio en la fuerza cortante entre dos puntos es igual al *negativo* del área bajo la curva de carga entre los mismos dos puntos, se obtiene V_B escribiendo

$$V_B - V_A = -(20 \text{ kN/m})(6 \text{ m}) = -120 \text{ kN}$$
$$V_B = -120 + V_A = -120 + 80 = -40 \text{ kN}$$

Como la pendiente $dV/dx = -w$ es constante entre A y B, el diagrama de fuerza cortante entre estos dos puntos está representado por una línea recta. Entre B y C, el área bajo la curva de carga es igual a cero; por tanto,

$$V_C - V_B = 0 \qquad V_C = V_B = -40 \text{ kN}$$

y la fuerza cortante es constante entre B y C.

Diagrama de momento flector. Se observa que el momento flector en cada uno de los extremos de la viga es igual a cero. Para determinar el máximo momento flector se tiene que localizar la ubicación de la sección D de la viga donde $V = 0$. Así se escribe

$$V_D - V_A = -wx$$
$$0 - 80 \text{ kN} = -(20 \text{ kN/m})x$$

y, resolviendo para x: $x = 4$ m ◀

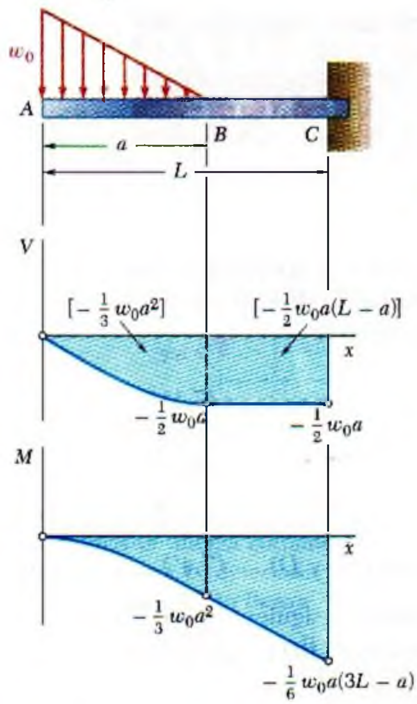
El máximo momento flector ocurre en el punto D donde se tiene que $dM/dx = V = 0$. Se calculan las áreas de las distintas porciones del diagrama de fuerza cortante y se indican los valores obtenidos (entre paréntesis) en ese mismo diagrama. Como el área del diagrama de fuerza cortante entre dos puntos es igual al cambio en el momento flector entre esos mismos dos puntos, se escribe

$$M_D - M_A = +160 \text{ kN} \cdot \text{m} \qquad M_D = +160 \text{ kN} \cdot \text{m}$$
$$M_B - M_D = -\ 40 \text{ kN} \cdot \text{m} \qquad M_B = +120 \text{ kN} \cdot \text{m}$$
$$M_C - M_B = -120 \text{ kN} \cdot \text{m} \qquad M_C = 0$$

El diagrama de momento flector consta de un arco de parábola seguido por un segmento de línea recta; la pendiente de la parábola en A es igual al valor de V en dicho punto.

El máximo momento flector es igual a

$$M_{\text{máx}} = M_D = +160 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad ◀$$



PROBLEMA RESUELTO 7.6

Elabore los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga en voladizo que se muestra en la figura.

SOLUCIÓN

Diagrama de fuerza cortante. Se encuentra que en el extremo libre de la viga $V_A = 0$. Por otra parte, entre A y B, el área bajo la curva de carga es igual a $\frac{1}{2}w_0a$. Con la información anterior, se encuentra el valor de V_B escribiendo

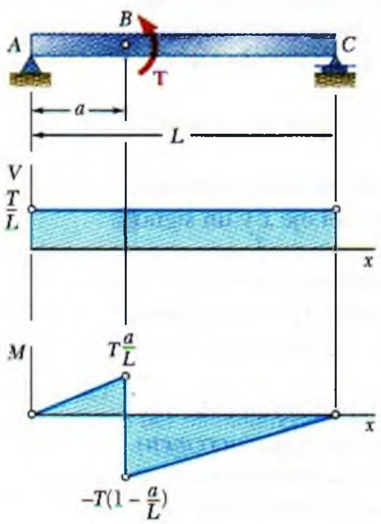
$$V_B - V_A = -\tfrac{1}{2}w_0a \qquad V_B = -\tfrac{1}{2}w_0a$$

Entre B y C, la viga no soporta ninguna carga externa; por tanto $V_C = V_B$. En A, se tiene que $w = w_0$, y de acuerdo con la ecuación (7.1), la pendiente de la curva de fuerza cortante está dada por $dV/dx = -w_0$, mientras que en B la pendiente es $dV/dx = 0$. Entre A y B, la carga decrece linealmente y el diagrama de fuerza cortante es parabólico. Entre B y C, $w = 0$ y el diagrama de fuerza cortante es una línea horizontal.

Diagrama de momento flector. Se observa que en el extremo libre de la viga $M_A = 0$. Se calcula el área bajo la curva de fuerza cortante y se escribe

$$M_B - M_A = -\tfrac{1}{3}w_0a^2 \qquad M_B = -\tfrac{1}{3}w_0a^2$$
$$M_C - M_B = -\tfrac{1}{2}w_0a(L-a)$$
$$M_C = -\tfrac{1}{6}w_0a(3L-a)$$

El bosquejo del diagrama de momento flector se completa recordando que $dM/dx = V$. Se encuentra que entre A y B el diagrama está representado por una curva cúbica con pendiente cero en A, y entre B y C está representado con una línea recta.



PROBLEMA RESUELTO 7.7

Sobre la viga sencilla apoyada AC actúa un par de magnitud T que se aplica en el punto B. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga.

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre: viga completa. Se toma toda la viga como un cuerpo libre y se obtiene

$$\mathbf{R}_A = \frac{T}{L}\uparrow \qquad \mathbf{R}_C = \frac{T}{L}\downarrow$$

Diagramas de fuerza cortante y momento flector. La fuerza cortante en cualquier sección es constante e igual a T/L. Como el par está aplicado en B, el diagrama de momento flector es discontinuo en dicho punto; así el momento flector decrece bruscamente en una cantidad igual a T.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se aprendió a utilizar las relaciones que existen entre la carga, la fuerza cortante y el momento flector para simplificar la tarea de dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector. Estas relaciones son

$$\frac{dV}{dx} = -w \qquad (7.1)$$

$$\frac{dM}{dx} = V \qquad (7.3)$$

$$V_D - V_C = -(\text{área bajo la curva de carga entre } C \text{ y } D) \qquad (7.2')$$

$$M_D - M_C = (\text{área bajo la curva de fuerza cortante entre } C \text{ y } D) \qquad (7.4')$$

Tomando en cuenta las relaciones anteriores, se puede utilizar el siguiente procedimiento para dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector para una viga.

1. ***Dibujar un diagrama de cuerpo libre para toda la viga*** y utilizarlo para determinar las reacciones en sus apoyos.

2. ***Dibujar el diagrama de fuerza cortante.*** Al igual que en la lección anterior, esto se puede llevar a cabo cortando la viga en varios puntos y considerando el diagrama de cuerpo libre de una de las partes de la viga que se obtienen de esta forma [problema resuelto 7.3]. Sin embargo, se puede considerar uno de los siguientes procedimientos alternativos.

a) ***La fuerza cortante V en cualquier punto de la viga es igual a la suma de las reacciones y de las cargas que se encuentran a la izquierda de dicho punto;*** una fuerza que actúa hacia arriba se considera como positiva y una fuerza que actúa hacia abajo se considera como negativa.

b) ***Para una viga que soporta una carga distribuida,*** se puede comenzar a partir de un punto donde se conoce el valor de V y utilizar consecutivamente la ecuación (7.2′) para encontrar el valor de V en todos los demás puntos de interés.

3. ***Dibujar el diagrama de momento flector*** utilizando el siguiente procedimiento.

a) ***Se calcula el área bajo cada porción de la curva de fuerza cortante,*** asignándole un signo positivo a las áreas localizadas por encima del eje x y un signo negativo a las áreas localizadas por debajo del eje x.

b) ***Se aplica consecutivamente la ecuación (7.4′)*** [problemas resueltos 7.4 y 7.5], comenzando a partir del extremo izquierdo de la viga, donde $M = 0$ (excepto si en ese extremo se aplica un par o si la viga es una viga en voladizo con su extremo izquierdo fijo).

c) Se debe tener cuidado de mostrar una discontinuidad en el diagrama de momento flector ***en el punto en el que se aplica un par sobre la viga***, *incrementando* el valor de M en dicho punto en una cantidad igual a la magnitud del par, si este último tiene un sentido a *favor del movimiento de las manecillas del reloj* o *disminuyendo* el valor de M en una cantidad igual a la magnitud del par, si este úl-

timo tiene un sentido *contrario al movimiento de las manecillas del reloj* [problema resuelto 7.7].

4. ***Determinar la ubicación y la magnitud de*** $|M|_{max}$. El máximo valor absoluto del momento flector ocurre en uno de los dos puntos en los que $dM/dx = 0$, esto es, de acuerdo con la ecuación (7.3), en un punto donde V es igual a cero o cambia de signo. Por tanto, se tiene que:

a) Se determina a partir del diagrama de fuerza cortante, el valor de $|M|$ ***en el que V cambia de signo;*** esto ocurrirá en los puntos donde actúan cargas concentradas [problema resuelto 7.4].

b) Se determinan los puntos en los que $V = 0$ ***y los valores correspondientes de*** $|M|$; esto ocurrirá bajo una carga distribuida. Para encontrar la distancia x entre el punto C, donde empieza la carga distribuida, y un punto D, donde la fuerza cortante es igual a cero, se emplea la ecuación (7.2′); aquí, para V_C se usa el valor conocido de la fuerza cortante en el punto C, para V_D se usa el valor de cero y se expresa el área bajo la curva de carga como una función de x [problema resuelto 7.5].

5. ***La calidad de los dibujos de los diagramas se puede mejorar*** si se recuerda que, de acuerdo con las ecuaciones (7.1) y (7.3), en cualquier punto dado, la pendiente de la curva V es igual a $-w$ y la pendiente de la curva M es igual a V. En particular, en los dibujos se deben mostrar claramente los puntos en los que la pendiente de las curvas es cero.

6. ***Por último, para vigas que soportan una carga distribuida que está expresada como una función*** $w(x)$, se debe recordar que la fuerza cortante V se puede obtener integrando la función $-w(x)$ y el momento flector M puede obtenerse integrando $V(x)$ [ecuaciones (7.3) y (7.4)].

Problemas

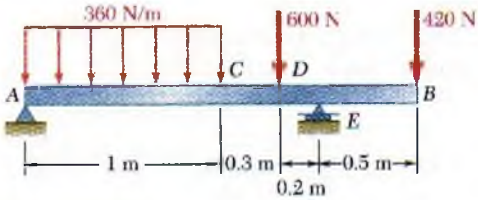


Figura P7.64

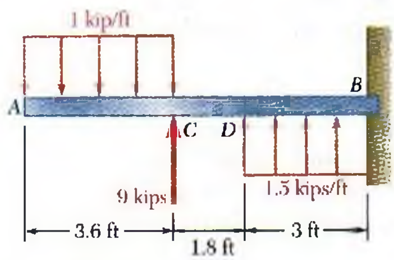


Figura P7.65

7.58 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.29.

7.59 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.30.

7.60 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.31.

7.61 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.32.

7.62 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.34.

7.63 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.35.

7.64 y 7.65 Para la viga y las cargas mostradas en cada figura, *a*) trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

7.66 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.37.

7.67 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.38.

7.68 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.39.

7.69 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.40.

7.70 y *7.71* Para la viga y las cargas mostradas en cada figura, *a*) trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

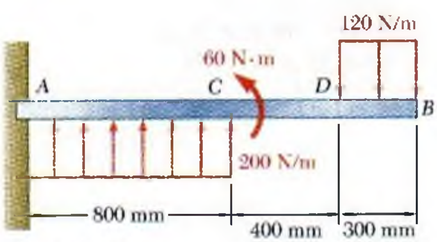


Figura P7.70

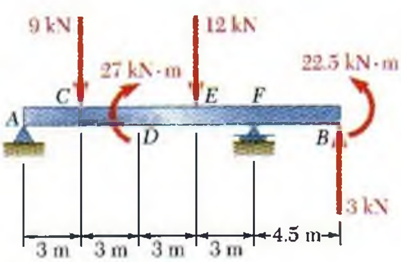


Figura *P7.71*

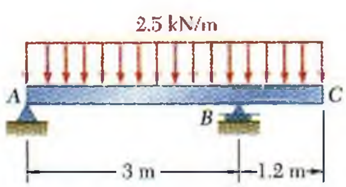


Figura P7.72

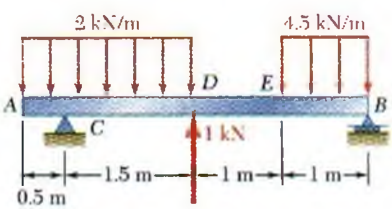


Figura *P7.73*

7.72 y *7.73* Para la viga y las cargas que se muestran en cada figura, *a*) trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, *b*) determine la magnitud y la ubicación del momento flector máximo.

7.74 Para la viga mostrada en la figura, trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y determine el valor absoluto máximo del momento flector sabiendo que *a*) $P = 7$ kips, *b*) $P = 10$ kips.

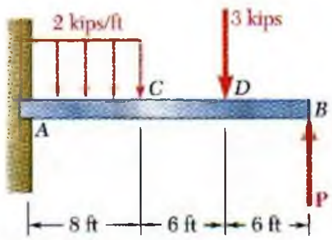


Figura P7.74

7.75 Para la viga mostrada en la figura, trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y determine la magnitud y la ubicación del valor absoluto máximo del momento flector.

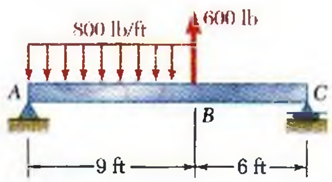


Figura P7.75

7.76 Para la viga y las cargas mostradas en la figura, *a*) trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, *b*) determine la magnitud y la ubicación del valor absoluto máximo del momento flector.

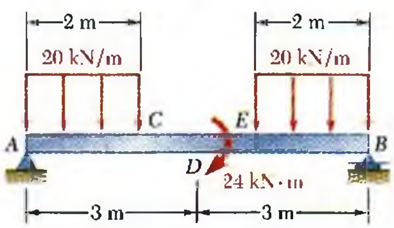


Figura P7.76

7.77 Resuelva el problema 7.76 suponiendo que el par de 24 kN · m se aplica en *D* en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

7.78 Para la viga *AB* mostrada en la figura, *a*) trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, *b*) determine la magnitud y la ubicación del valor absoluto máximo del momento flector.

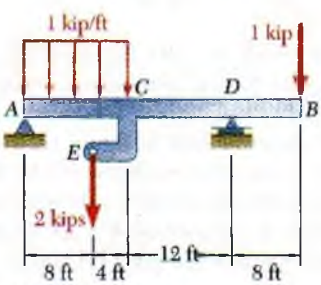


Figura P7.78

7.79 Resuelva el problema 7.78 suponiendo que la fuerza de 2 kips aplicada en *E* está dirigida hacia arriba.

7.80 y 7.81 Para la viga y las cargas mostradas en cada figura, *a*) obtenga las ecuaciones de las curvas de la fuerza cortante y del momento flector, *b*) trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, *c*) determine la magnitud y la ubicación del momento flector máximo.

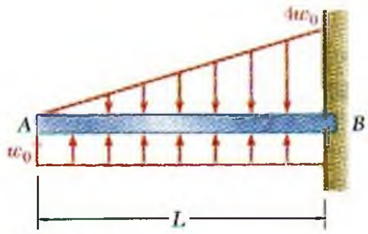


Figura P7.80

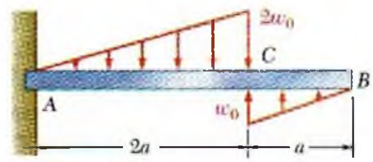


Figura P7.81

7.82 Para la viga mostrada en la figura, *a*) trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, *b*) determine la magnitud y la ubicación del momento flector máximo. (*Sugerencia*: Obtenga las ecuaciones de las curvas de la fuerza cortante y del momento flector para el tramo *CD* de la viga.)

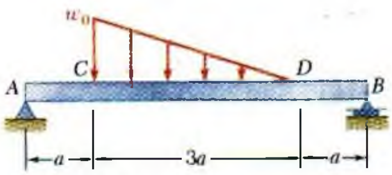


Figura P7.82

7.83 La acumulación de nieve produce una carga distribuida sobre la superficie, dicha carga puede aproximarse mediante la curva de carga cúbica mostrada por la figura. Obtenga las ecuaciones de las curvas de la fuerza cortante y del momento flector y determine el momento flector máximo.

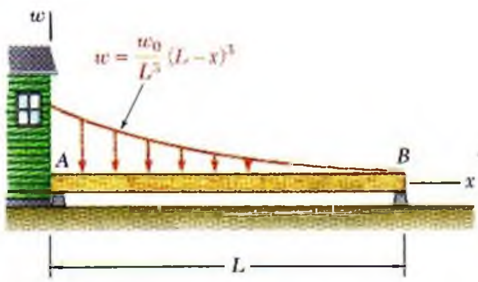


Figura *P7.83*

7.84 La viga *AB* mostrada en la figura se somete a una carga uniformemente distribuida de 1 000 N/m y a dos fuerzas desconocidas **P** y **Q**. Si el cálculo experimental del valor del momento flector es de −395 N · m en *A*, y de −215 N · m en *C*, *a*) determine **P** y **Q**, *b*) trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga.

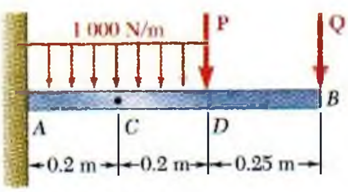


Figura *P7.84*

***7.85** Resuelva el problema 7.84 suponiendo que la carga uniformemente distribuida de 1 000 N/m se extiende a lo largo de toda la viga *AB*.

***7.86** La viga *AB* mostrada en la figura se somete a una carga uniformemente distribuida y a dos fuerzas desconocidas **P** y **Q**. Si el cálculo experimental del valor del momento flector es de +2.7 kN · m *C* y +2.5 kN · m en *D*, cuando *a* = 2 m, *a*) determine **P** y **Q**, *b*) trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga.

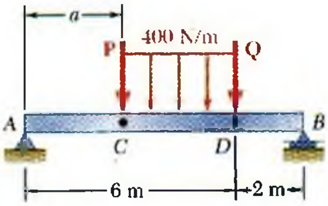


Figura P7.86

***7.87** Resuelva el problema 7.86 cuando *a* = 1.35 m.

*7.7. CABLES CON CARGAS CONCENTRADAS

Los cables se utilizan en muchas aplicaciones de ingeniería como puentes colgantes, líneas de transmisión, teleféricos, contravientos para torres altas, etc. Los cables pueden dividirse en dos categorías de acuerdo con las cargas que actúan sobre ellos: 1) cables que soportan cargas concentradas y 2) cables que soportan cargas distribuidas. En esta sección se examinarán sólo los cables de la primera categoría.

Considere un cable unido a dos puntos fijos A y B que soporta n cargas concentradas verticales $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$ (figura 7.13*a*). Se supone que el cable es *flexible*, esto es, que su resistencia a la flexión es pequeña y se puede despreciar. Además, también se supone que el *peso del cable es susceptible de ser ignorado* en comparación con las cargas que soporta. Por tanto, cualquier porción del cable entre dos cargas consecutivas se puede considerar como un elemento sujeto a dos fuerzas y, por consiguiente, las fuerzas internas en cualquier punto del cable se reducen a una *fuerza de tensión dirigida a lo largo del cable*.

Se supone que cada una de las cargas se encuentra en una línea vertical dada, esto es, que la distancia horizontal desde el apoyo A hasta cada una de las cargas es conocida; además, también se supone que se conocen las distancias horizontal y vertical entre los apoyos. Se busca determinar la forma del cable, esto es, la distancia vertical desde el apoyo A hasta cada uno de los puntos $C_1, C_2, \ldots, C_n$, y también se desea encontrar la tensión T en cada uno de los segmentos del cable.



Fotografía 7.3 Como el peso del cable del transporte para esquiadores que se muestra en la foto es despreciable comparado con el peso de las sillas y los esquiadores, los métodos de esta sección pueden usarse para determinar la fuerza en cualquier punto del cable.

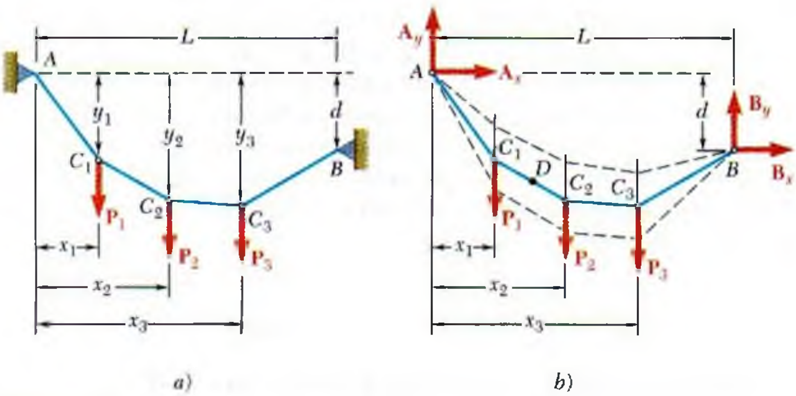
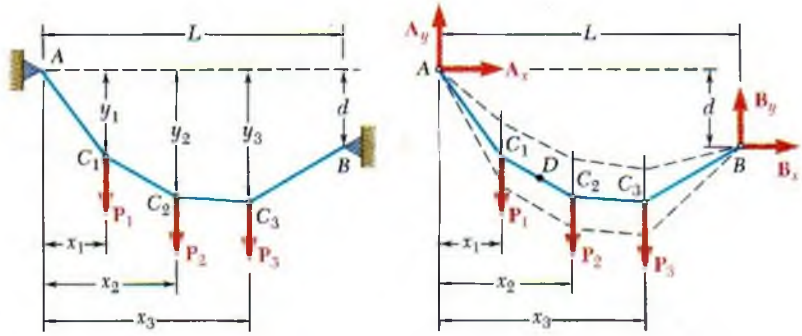


Figura 7.13

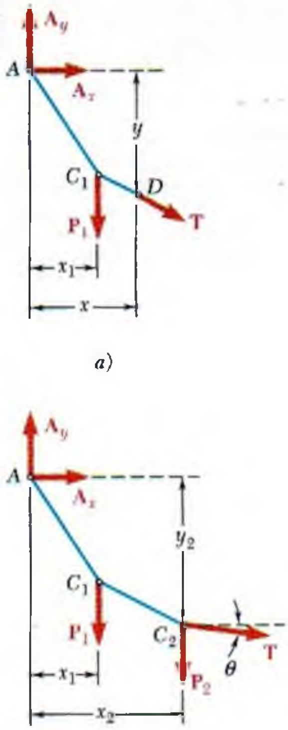
Primero se dibuja un diagrama de cuerpo libre para todo el cable (figura 7.13*b*). Como la pendiente de las porciones del cable unidas en A y B no se conoce, cada una de las reacciones en A y B deben representarse con dos componentes. Por tanto, están involucradas cuatro incógnitas y las tres ecuaciones de equilibrio que se tienen disponibles no son suficientes para determinar las reacciones en A y B.[1] De esta manera, se debe obtener una ecuación adicional considerando el equilibrio de una porción del cable. Lo anterior es posible si se conocen las coordenadas x y y de un punto D del cable. Dibujando el diagrama de

[1]Es obvio que el cable no es un cuerpo rígido; por tanto, las ecuaciones de equilibrio representan *condiciones necesarias pero no suficientes* (véase sección 6.11).



a) b)

Figura 7.13 (*repetida*)



a)

b)

Figura 7.14

cuerpo libre del segmento AD del cable (figura 7.14*a*) y escribiendo $\Sigma M_D = 0$, se obtiene una relación adicional entre las componentes escalares A_x y A_y y se pueden determinar las reacciones en A y B. Sin embargo, el problema continuaría siendo indeterminado si no se conocieran las coordenadas de D, a menos que se proporcionara otra relación entre A_x y A_y (o entre B_x y B_y). Como se indica por medio de las líneas discontinuas en la figura 7.13*b*, el cable podría colgar en varias formas posibles.

Una vez que se han determinado A_x y A_y se puede encontrar fácilmente la distancia vertical desde A hasta cualquier punto del cable. Por ejemplo, considerando el punto C_2 se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la porción AC_2 del cable (figura 7.14*b*). Si se escribe $\Sigma M_{C_2} = 0$, se obtiene una ecuación que se puede resolver para y_2. Al escribir $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ se obtienen las componentes de la fuerza **T** que representa la tensión en la porción del cable que está a la derecha de C_2. Se observa que $T \cos \theta = -A_x$; por tanto, *la componente horizontal de la fuerza de tensión siempre es la misma en cualquier punto del cable.* Se concluye que la tensión T es máxima cuando $\cos \theta$ es mínimo, esto es, en la porción del cable que tiene el mayor ángulo de inclinación θ. Obviamente, dicha porción del cable debe ser adyacente a uno de los apoyos del cable.

*7.8. CABLES CON CARGAS DISTRIBUIDAS

Considere un cable que está unido a dos puntos fijos A y B y que soporta una *carga distribuida* (figura 7.15*a*). En la sección anterior se vio que para un cable que soporta cargas concentradas, la fuerza interna en cualquier punto es una fuerza de tensión dirigida a lo largo del cable. En el caso de un cable que soporta una carga distribuida, éste cuelga tomando la forma de una curva y la fuerza interna en el punto D es una fuerza de tensión **T** *dirigida a lo largo de la tangente de la curva*. En esta sección se aprenderá a determinar la tensión en cualquier punto de un cable que soporta una carga distribuida dada. En las secciones siguientes se determinará la forma que adopta el cable para dos tipos particulares de cargas distribuidas.

Considerando el caso más general de carga distribuida, se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la porción del cable que se extiende desde el punto más bajo C hasta un punto D del cable (figura 7.15*b*). Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son la fuerza de tensión $\mathbf{T}_0$ en C, la cual es horizontal, la fuerza de tensión **T** en D, la cual está

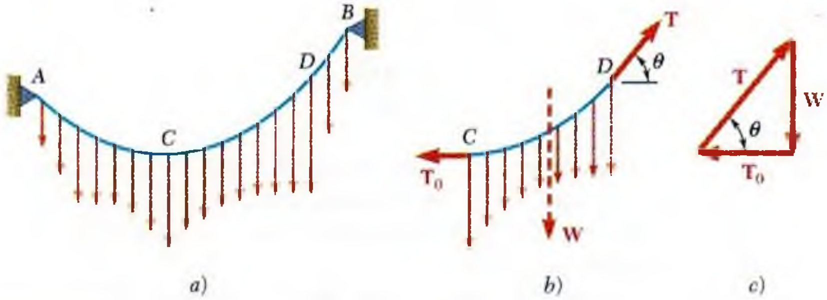


Figura 7.15

dirigida a lo largo de la tangente al cable en D y la resultante **W** de la fuerza distribuida, soportada por la porción CD del cable. Si se dibuja el triángulo de fuerzas correspondiente (figura 7.15*c*), se obtienen las siguientes relaciones:

$$T \cos \theta = T_0 \qquad T \operatorname{sen} \theta = W \tag{7.5}$$

$$T = \sqrt{T_0^2 + W^2} \qquad \tan \theta = \frac{W}{T_0} \tag{7.6}$$

A partir de las relaciones (7.5), es evidente que la componente horizontal de la fuerza de tensión **T** es la misma en cualquier punto y que la componente vertical de **T** es igual a la magnitud W de la carga medida a partir del punto más bajo. Las relaciones (7.6) muestran que la tensión T es mínima en el punto más bajo y máxima en uno de los dos puntos de apoyo.

*7.9. CABLE PARABÓLICO

Ahora suponga que el cable AB soporta una carga distribuida de manera *uniforme a lo largo de la horizontal* (figura 7.16*a*). Se puede suponer que los cables de los puentes colgantes están cargados de esta forma puesto que el peso del cable es pequeño en comparación con el peso de la calzada. La carga por unidad de longitud (*medida en forma horizontal*) se representa con w y se expresa en N/m o en lb/ft. Seleccionando ejes coordenados con su origen en el punto más bajo C del cable, se encuentra que la magnitud W de la carga total soportada por el segmento del cable que se extiende desde C hasta el punto D de coordenadas x y y está dada por $W = wx$. De esta forma, las relaciones (7.6) que definen la magnitud y la dirección de la fuerza en D, se convierten en

$$T = \sqrt{T_0^2 + w^2x^2} \qquad \tan \theta = \frac{wx}{T_0} \tag{7.7}$$

Además, la distancia desde D hasta la línea de acción de la resultante **W** es igual a la mitad de la distancia horizontal que hay desde C hasta D (figura 7.16*b*). Si se suman momentos con respecto a D, se escribe

$$+\circlearrowleft \Sigma M_D = 0: \qquad wx\frac{x}{2} - T_0 y = 0$$

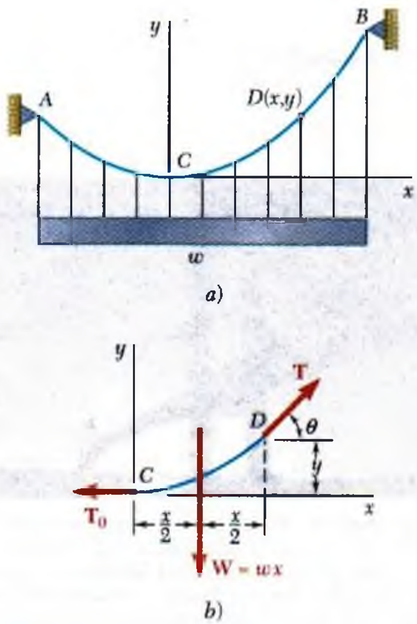


Figura 7.16

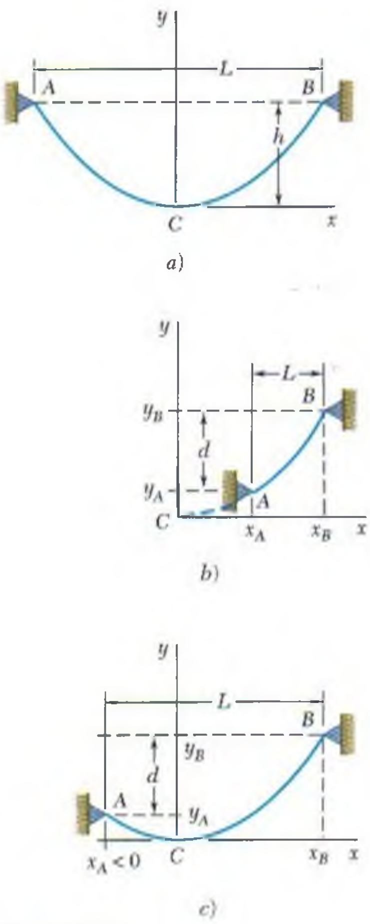


Figura 7.17



Fotografía 7.4 En los puentes colgantes para cruzar ríos y estuarios la calzada está sostenida por cables. El puente Verazani-Narrows, el cual conecta Staten Island y Brooklin en la ciudad de Nueva York, tiene el claro más largo de todos los puentes en Estados Unidos.

y, resolviendo para y, se obtiene

$$y = \frac{wx^2}{2T_0} \tag{7.8}$$

Ésta es la ecuación de una *parábola* con un eje vertical y con su vértice en el origen del sistema de coordenadas. Por tanto, la curva formada por cables que están cargados uniformemente a lo largo de la horizontal es una parábola.[†]

Cuando los apoyos A y B del cable tienen la misma elevación, la distancia L entre los apoyos se conoce como el *claro* del cable y la distancia vertical h desde los apoyos hasta el punto más bajo se llama la *flecha* del cable (figura 7.17*a*). Si se conocen el claro y la flecha del cable y si la carga por unidad de longitud horizontal w está dada, se puede encontrar la tensión mínima T_0 sustituyendo $x = L/2$ y $y = h$ en la ecuación (7.8). Entonces, las ecuaciones (7.7) proporcionarán la tensión y la pendiente en cualquier punto del cable y la ecuación (7.8) definirá la forma del cable.

Cuando los apoyos tienen elevaciones diferentes, no se conoce la posición del punto más bajo del cable y se deben determinar las coordenadas x_A, y_A y x_B, y_B de los apoyos. Con ese propósito, se expresa que las coordenadas de A y B satisfacen la ecuación (7.8) y que $x_B - x_A = L$ y $y_B - y_A = d$, donde L y d representan, respectivamente, las distancias horizontal y vertical entre los dos apoyos (figura 7.17*b* y *c*).

La longitud del cable desde su punto más bajo C hasta su apoyo B se puede obtener a partir de la fórmula

$$s_B = \int_0^{x_B} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \tag{7.9}$$

Si se obtiene la diferencial de la ecuación (7.8) se obtiene la derivada $dy/dx = wx/T_0$; si se sustituye este resultado en la ecuación (7.9) y se utiliza el teorema del binomio para expandir el radical en una serie infinita, se obtiene

$$s_B = \int_0^{x_B} \sqrt{1 + \frac{w^2x^2}{T_0^2}}\, dx = \int_0^{x_B}\left(1 + \frac{w^2x^2}{2T_0^2} - \frac{w^4x^4}{8T_0^4} + \cdots\right) dx$$

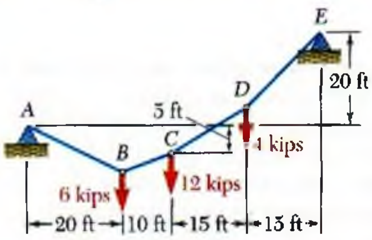
$$s_B = x_B\left(1 + \frac{w^2x_B^2}{6T_0^2} - \frac{w^4x_B^4}{40T_0^4} + \cdots\right)$$

y, como $wx_B^2/2T_0 = y_B$,

$$s_B = x_B\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{y_B}{x_B}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{y_B}{x_B}\right)^4 + \cdots\right] \tag{7.10}$$

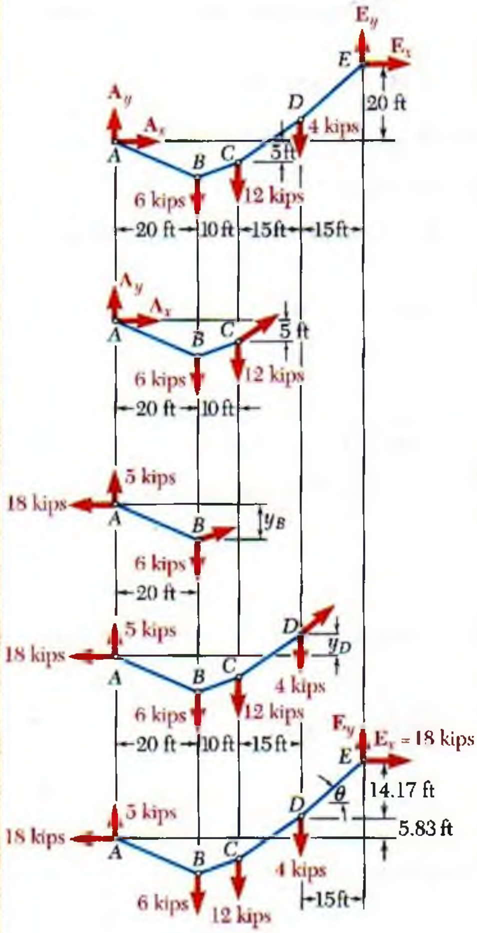
La serie converge para valores de la relación y_B/x_B menores que 0.5; en la mayoría de los casos, dicha relación es menor y sólo es necesario calcular los dos primeros términos de la serie.

[†] Los cables que cuelgan bajo la acción de su propio peso no están cargados uniformemente a lo largo de la horizontal y, por tanto, no forman una parábola. Sin embargo, cuando el cable está lo suficientemente tenso, el error que se comete al suponer una forma parabólica para cables que cuelgan bajo la acción de su propio peso es pequeño. En la siguiente sección se presentará una exposición completa sobre este tipo de cables.



PROBLEMA RESUELTO 7.8

El cable AE soporta tres cargas verticales en los puntos indicados. Si el punto C está a 5 ft por debajo del apoyo izquierdo, determine: *a*) la elevación de los puntos B y D, y *b*) la pendiente máxima y la tensión máxima en el cable.



SOLUCIÓN

Reacciones en los apoyos. Las componentes de reacción $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$ se determinan de la siguiente forma:

Cuerpo libre: todo el cable

$+\circlearrowleft \Sigma M_E = 0$:

$$A_x(20 \text{ ft}) - A_y(60 \text{ ft}) + (6 \text{ kips})(40 \text{ ft}) + (12 \text{ kips})(30 \text{ ft}) + (4 \text{ kips})(15 \text{ ft}) = 0$$
$$20A_x - 60A_y + 660 = 0$$

Cuerpo libre: ABC

$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0: \qquad -A_x(5 \text{ ft}) - A_y(30 \text{ ft}) + (6 \text{ kips})(10 \text{ ft}) = 0$$
$$-5A_x - 30A_y + 60 = 0$$

Si se resuelven en forma simultánea las dos ecuaciones, se obtiene

$$A_x = -18 \text{ kips} \qquad \mathbf{A}_x = 18 \text{ kips} \leftarrow$$
$$A_y = +5 \text{ kips} \qquad \mathbf{A}_y = 5 \text{ kips} \uparrow$$

***a*) Elevación de los puntos *B* y *D*.**

Cuerpo libre: AB. Considerando la porción AB del cable como un cuerpo libre, se escribe

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \qquad (18 \text{ kips})y_B - (5 \text{ kips})(20 \text{ ft}) = 0$$

$y_B = 5.56$ ft por debajo de A ◀

Cuerpo libre: ABCD. Con el uso de la porción $ABCD$ del cable como un cuerpo libre, se escribe

$+\circlearrowleft \Sigma M_D = 0$:

$$-(18 \text{ kips})y_D - (5 \text{ kips})(45 \text{ ft}) + (6 \text{ kips})(25 \text{ ft}) + (12 \text{ kips})(15 \text{ ft}) = 0$$

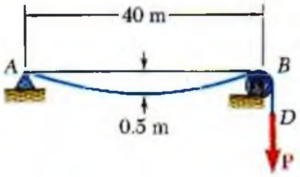
$y_D = 5.83$ ft por encima de A ◀

***b*) Pendiente y tensión máximas.** Se observa que la pendiente máxima ocurre en la porción DE. Como la componente horizontal de la tensión es constante e igual a 18 kilolibras, se escribe

$$\tan \theta = \frac{14.17}{15 \text{ ft}} \qquad \theta = 43.4° \text{ ◀}$$

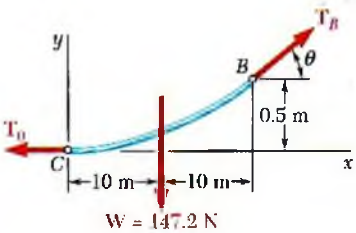
$$T_{\text{máx}} = \frac{18 \text{ kips}}{\cos \theta} \qquad T_{\text{máx}} = 24.8 \text{ kips ◀}$$

PROBLEMA RESUELTO 7.9



Un cable ligero está unido a un apoyo en A, pasa sobre una polea pequeña en B y soporta una carga $\mathbf{P}$. Si se sabe que la flecha del cable es de 0.5 m y que la masa por unidad de longitud del cable es de 0.75 kg/m, determine: *a*) la magnitud de la carga $\mathbf{P}$, *b*) la pendiente del cable en B y *c*) la longitud total del cable desde A hasta B. Como la relación entre la flecha y el claro es pequeña, suponga que el cable es parabólico. Además, se ignora el peso del tramo del cable que va desde B hasta D.

SOLUCIÓN



***a*) Carga P.** Se representa con C al punto más bajo del cable y se dibuja el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la porción CB del cable. Suponiendo que la carga está uniformemente distribuida a lo largo de la horizontal, se escribe

$$w = (0.75 \text{ kg/m})(9.81 \text{ m/s}^2) = 7.36 \text{ N/m}$$

La carga total para el tramo CB del cable está dada por

$$W = wx_B = (7.36 \text{ N/m})(20 \text{ m}) = 147.2 \text{ N}$$

y se aplica justo a la mitad entre C y B. Sumando momentos con respecto a B, se escribe

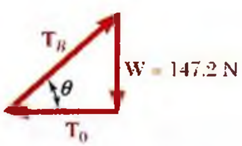
$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \quad (147.2 \text{ N})(10 \text{ m}) - T_0(0.5 \text{ m}) = 0 \qquad T_0 = 2\,944 \text{ N}$$

A partir del triángulo de fuerzas se obtiene

$$T_B = \sqrt{T_0^2 + W^2}$$
$$= \sqrt{(2\,944 \text{ N})^2 + (147.2 \text{ N})^2} = 2\,948 \text{ N}$$

Como la tensión en ambos lados de la polea es la misma, se encuentra que

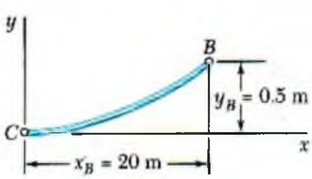
$$P = T_B = 2\,948 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$



***b*) Pendiente del cable en *B*.** Además, a partir del triángulo de fuerzas se obtiene que

$$\tan\theta = \frac{W}{T_0} = \frac{147.2 \text{ N}}{2\,944 \text{ N}} = 0.05$$

$$\theta = 2.9° \quad \blacktriangleleft$$



***c*) Longitud del cable.** Aplicando la ecuación (7.10) entre C y B, se escribe

$$s_B = x_B\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{y_B}{x_B}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$= (20 \text{ m})\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{0.5 \text{ m}}{20 \text{ m}}\right)^2 + \cdots\right] = 20.00833 \text{ m}$$

La longitud del cable entre A y B es el doble de este valor,

$$\text{Longitud} = 2s_B = 40.0167 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los problemas propuestos correspondientes a esta sección se tendrán que aplicar las ecuaciones de equilibrio a *cables que se encuentran en un plano vertical*. Se supone que un cable no puede resistir flexión, por tanto, la fuerza de tensión en el cable siempre está dirigida a lo largo del mismo.

A. En la primera parte de esta lección se consideraron cables sujetos a cargas concentradas. Como no se toma en cuenta el peso del cable, éste permanece recto entre las cargas.

La solución de un problema constará de los siguientes pasos:

1. Dibujar un diagrama de cuerpo libre para todo el cable mostrando las cargas y las componentes horizontal y vertical de la reacción en cada uno de los apoyos. Se usa este diagrama de cuerpo libre para escribir las ecuaciones de equilibrio correspondientes.

2. Se enfrentará una situación en la cual se tienen cuatro componentes desconocidas y sólo se cuenta con tres ecuaciones de equilibrio (véase la figura 7.13). Por tanto, se debe encontrar alguna información adicional, como la *posición* de un punto sobre el cable o la *pendiente* del cable en un punto dado.

3. Después de que se ha identificado el punto del cable donde existe información adicional, se corta el cable en dicho punto y se dibuja el diagrama de cuerpo libre correspondiente a una de las dos secciones del cable que se han obtenido de esta manera.

a) Si se conoce la posición del punto donde se ha cortado el cable, escribiendo $\Sigma M = 0$ con respecto a dicho punto para el nuevo cuerpo libre, se obtendrá la ecuación adicional que se requiere para resolver las cuatro componentes desconocidas de las reacciones [problema resuelto 7.8].

b) Si se conoce la pendiente de la porción del cable que se ha cortado, escribiendo $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ para el nuevo cuerpo libre, se obtendrán dos ecuaciones de equilibrio que, junto con las tres ecuaciones originales, pueden resolverse para las cuatro componentes de reacción y para la tensión del cable en el punto donde éste fue cortado.

4. Para encontrar la elevación en un punto dado del cable y la pendiente y la tensión en el mismo una vez que se han encontrado las reacciones en los apoyos, se debe cortar el cable en dicho punto y dibujar un diagrama de cuerpo libre para una de las dos secciones que se han obtenido de esta manera. Si se escribe $\Sigma M = 0$ con respecto al punto en cuestión se obtiene su elevación. Al escribir $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ se obtienen las componentes de la fuerza de tensión, a partir de las cuales se encuentra fácilmente la magnitud y la dirección de esta última.

(*continúa*)

5. ***Para un cable que soporta sólo cargas verticales,*** se observa *que la componente horizontal de la fuerza de tensión es la misma en cualquier punto.* Se concluye que, para un cable como éste, *la tensión máxima ocurre en la parte más inclinada del cable.*

B. ***En la segunda parte de esta sección se consideraron cables que soportan una carga uniformemente distribuida a lo largo de la horizontal.*** En este caso la forma del cable es parabólica.

La solución de un problema requerirá de uno o más de los siguientes conceptos:

1. ***Si se coloca el origen del sistema de coordenadas en el punto más bajo del cable*** y se dirigen los ejes x y y, respectivamente, hacia la derecha y hacia arriba, se encuentra que *la ecuación de la parábola* es

$$y = \frac{wx^2}{2T_0} \qquad (7.8)$$

La tensión mínima en el cable ocurre en el origen, donde el cable es horizontal y la tensión máxima ocurre en el apoyo donde la pendiente es máxima.

2. ***Si los apoyos del cable tienen la misma elevación,*** la flecha h del cable es la distancia vertical desde el punto más bajo del cable hasta la línea horizontal que une a los dos apoyos. Para resolver un problema que involucra un cable parabólico de este tipo, se debe escribir la ecuación (7.8) para uno de los apoyos; dicha ecuación se puede resolver para una incógnita.

3. ***Si los apoyos del cable tienen elevaciones distintas,*** se deberá escribir la ecuación (7.8) para cada uno de los apoyos (véase la figura 7.17).

4. ***Para encontrar la longitud del cable*** desde el punto más bajo hasta uno de los apoyos, se puede utilizar la ecuación (7.10). En la mayoría de los casos sólo se deberán calcular los dos primeros términos de la serie.

En el problema resuelto 7.9 se consideró un cable colgando bajo su propio peso. Se observa que, para los cables en tensión, sus pesos por unidad de longitud en la dirección horizontal son aproximadamente constantes. Ésta fue la condición externa de carga de los cables analizados en la sección 7.9. Por tanto, si w se toma ahora como el peso por unidad de longitud de los cables, es posible aplicar los resultados obtenidos para este tipo de cargas externas al caso especial de cables *en tensión* colgando bajo sus propios pesos.

Problemas

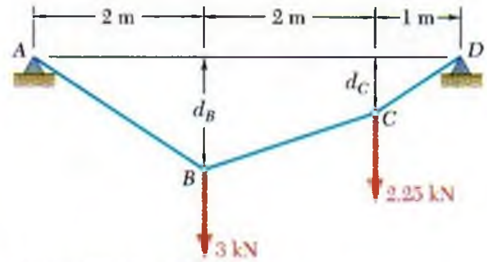


Figura P7.88 y P7.89

7.88 Para las dos cargas sostenidas por el cable *ABCD* como indica la figura, y sabiendo que $d_C = 0.75$ m, determine *a*) la distancia d_B, *b*) las componentes de la reacción en *A*, *c*) el valor máximo de la tensión en el cable.

7.89 Para las dos cargas sostenidas por el cable *ABCD* como indica la figura, y sabiendo que el valor máximo de la tensión en el cable es de 3.6 kN, determine *a*) la distancia d_B, *b*) la distancia d_C.

7.90 El cable *ABCDE* soporta las tres cargas que muestra la figura. Si $d_C = 12$ ft, determine *a*) las componentes de la reacción en *E*, *b*) el valor máximo de la tensión en el cable.

7.91 El cable *ABCDE* soporta las tres cargas que muestra la figura. Determine la distancia d_C si el valor máximo de la tensión en el cable es de 5 kips.

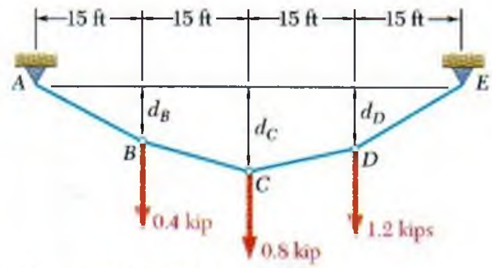


Figura *P7.90* y P7.91

7.92 El cable *ABCDE* soporta las tres cargas que muestra la figura. Si $d_C = 1.8$ m, determine *a*) la reacción en *E*, *b*) las distancias d_B y d_D.

7.93 El cable *ABCDE* soporta las tres cargas que muestra la figura. Determine *a*) la distancia d_C para la cual el tramo *CD* del cable permanece en posición horizontal, *b*) las reacciones correspondientes en los apoyos.

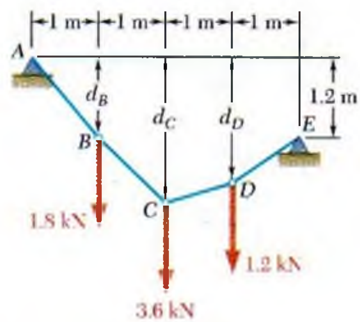


Figura P7.92 y P7.93

7.94 Una tubería de petróleo está sostenida cada 6 ft mediante suspensores verticales fijados al cable como indica la figura. Debido al peso combinado de la tubería y su contenido, cada suspensor experimenta una tensión de 400 lb. Si $d_C = 12$ ft, determine *a*) la tensión máxima en el cable, *b*) la distancia d_D.

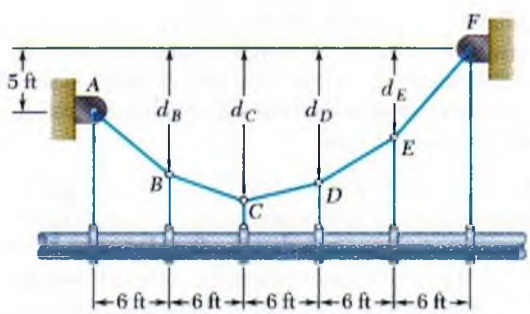


Figura P7.94

7.95 Resuelva el problema 7.94 suponiendo que $d_C = 9$ ft.

7.96 El cable *ABC* sostiene las dos cajas que muestra la figura. Si $b = 9$ ft, determine *a*) la magnitud requerida de la fuerza horizontal **P**, *b*) la distancia correspondiente *a*.

7.97 El cable *ABC* sostiene las dos cajas que muestra la figura. Determine las distancias *a* y *b* cuando se aplica una fuerza horizontal **P** de 25 lb de magnitud en *C*.

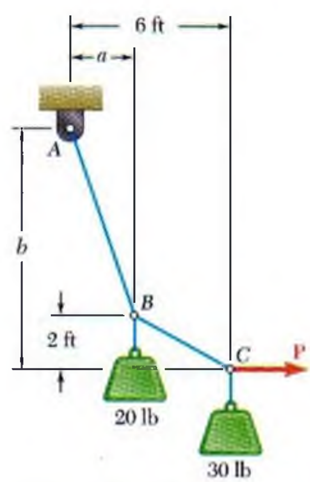


Figura P7.96 y P7.97

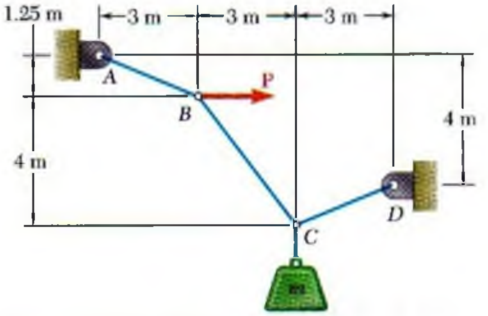


Figura P7.98 y *P7.99*

7.98 Un cable *ABCD* se mantiene en la posición que indica la figura gracias a una fuerza **P** aplicada en *B* y a un bloque fijo puesto en *C*. Si la fuerza **P** tiene magnitud de 1.32 kN, determine *a*) la reacción en *A*, *b*) la masa *m* requerida del bloque, *c*) la tensión en cada tramo del cable.

7.99 Un cable *ABCD* se mantiene en la posición que indica la figura gracias a una fuerza **P** aplicada en *B* y a un bloque fijo puesto en *C*. Si la masa *m* del bloque es de 150 kg, determine *a*) la reacción en *D*, *b*) la fuerza **P** requerida, *c*) la tensión en cada tramo del cable.

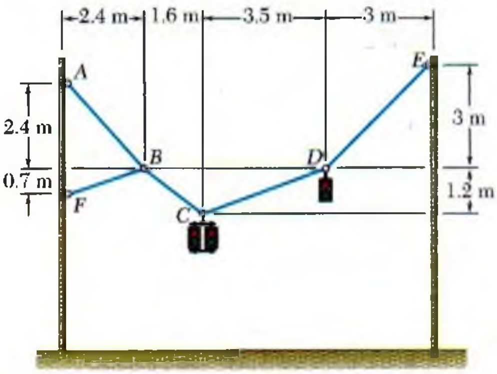


Figura *P7.100* y P7.101

7.100 Dos semáforos están suspendidos temporalmente del cable *ABCDE*. Si el semáforo ubicado en *D* tiene una masa de 34 kg, determine *a*) la masa del semáforo localizado en *C*, *b*) la tensión requerida en el cable *BF* para mantener el sistema en la posición que indica la figura.

7.101 Dos semáforos se hallan suspendidos temporalmente del cable *ABCDE*. Si el semáforo ubicado en *C* tiene una masa de 55 kg, determine *a*) la masa del semáforo localizado en *D*, *b*) la tensión requerida en el cable *BF* para mantener el sistema en la posición que indica la figura.

7.102 Un alambre eléctrico que tiene masa por unidad de longitud de 0.6 kg/m está atado entre dos aisladores de la misma altura y separados por 60 m. Si la flecha del alambre mide 1.5 m, determine *a*) la tensión máxima en el alambre, *b*) la longitud del alambre.

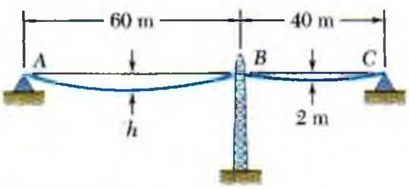


Figura P7.103

7.103 En la figura se muestran dos cables del mismo diámetro que se atan a la torre de transmisión en el punto *B*. Como la torre es delgada, la componente horizontal de la resultante de las fuerzas ejercidas por los cables en *B* debe ser cero. Si la masa por unidad de longitud de los cables es de 0.4 kg/m, determine *a*) la flecha requerida *h*, *b*) la tensión máxima en cada cable.

7.104 Cada cable del puente Golden Gate sostiene una carga w = 11.1 kips/ft a lo largo de la horizontal. Si el claro *L* mide 4 150 ft y la flecha *h* es de 464 ft, determine para cada cable *a*) la tensión máxima, *b*) la longitud.

7.105 El claro central del puente George Washington, tal como se construyó originalmente, consiste en una vía uniforme suspendida por cuatro cables. La carga uniforme que sostiene cada cable a lo largo de la horizontal era w = 9.75 kips/ft. Si el claro *L* mide 3 500 ft y la flecha *h* es de 316 ft, determine para la configuración original *a*) la tensión máxima en cada cable, *b*) la longitud de cada cable.

7.106 Para marcar la posición de las barandillas sobre los postes de una cerca, el propietario de un terreno ata una cuerda al poste situado en *A*, pasa la cuerda por un pedazo corto de tubo fijo al poste colocado en *B*, y ata el extremo libre de la cuerda a una cubeta llena de ladrillos que tiene un peso total de 60 lb. Si el peso por unidad de longitud de la cuerda es de 0.02 lb/ft y se supone que *A* y *B* están a la misma altura, determine *a*) la flecha *h*, *b*) la pendiente de la cuerda en *B*. No tome en cuenta el efecto de la fricción.

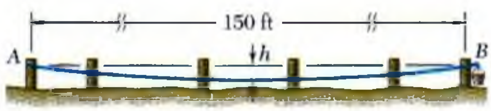


Figura P7.106

7.107 Un barco pequeño se ata a un embarcadero con una cuerda de 5 m de longitud como indica la figura. Si la corriente ejerce una fuerza de 300 N dirigida desde la proa hasta la popa sobre el casco del barco, y la masa por unidad de longitud de la cuerda es de 2.2 kg/m, determine *a*) la tensión máxima en la cuerda, *b*) la flecha *h*. [*Sugerencia*: Aplique únicamente los primeros dos términos de la ecuación (7.10).]

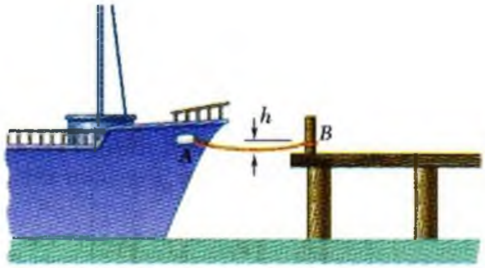


Figura *P7.107*

7.108 El claro central del puente Verrazano-Narrows consiste en dos vías suspendidas por cuatro cables. El diseño del puente toma en cuenta el efecto de cambios extremos de temperatura, los cuales generan que en el centro del claro la flecha varíe desde h_w = 386 ft en invierno hasta h_s = 394 ft en verano. Si el claro es L = 4 260 ft, determine el cambio en la longitud de los cables debido a variaciones extremas de temperatura.

7.109 La masa total del cable *ACB* es de 10 kg. Suponiendo que la masa de este cable está distribuida uniformemente a lo largo de la horizontal, determine *a*) la flecha *h*, *b*) la pendiente del cable en *A*.

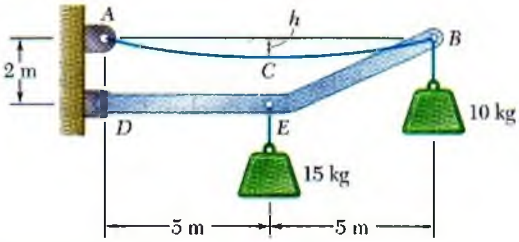


Figura *P7.109*

7.110 Cada cable de los claros laterales del puente Golden Gate sostiene una carga w = 10.2 kips/ft a lo largo de la horizontal. Si para los claros laterales la distancia máxima vertical *h* desde cada cable hasta la línea recta *AB* es de 30 ft, y ésta se localiza en el punto medio del claro como indica la figura, determine *a*) la tensión máxima en cada cable, *b*) la pendiente en *B*.

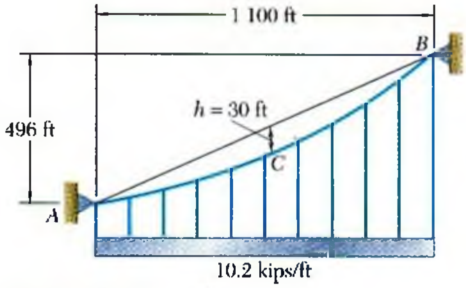


Figura P7.110

7.111 Antes de ser alimentada dentro de una imprenta localizada al lado derecho de *D*, una hoja continua de papel cuyo peso por unidad de longitud es de 0.18 lb/ft pasa por los rodillos colocados en *A* y *B*. Suponiendo que la curva formada por la hoja es parabólica, determine *a*) la ubicación del punto más bajo *C*, *b*) la tensión máxima en la hoja.

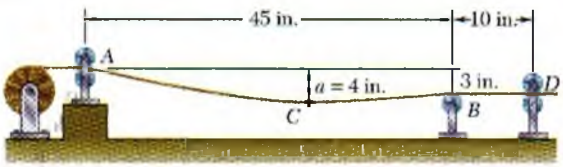


Figura P7.111

7.112 La cadena *AB* mostrada en la figura sostiene la viga horizontal uniforme cuya masa por unidad de longitud es de 85 kg/m. Si la tensión máxima en el cable no excede los 8 kN, determine *a*) la distancia horizontal *a* desde *A* hasta el punto más bajo de la cadena *C*, *b*) la longitud aproximada de la cadena.

7.113 La cadena *AB* mostrada en la figura tiene longitud de 6.4 m y sostiene la viga horizontal uniforme cuya masa por unidad de longitud es de 85 kg/m. Determine *a*) la distancia horizontal *a* desde *A* hasta el punto más bajo de la cadena *C*, *b*) la tensión máxima en la cadena.

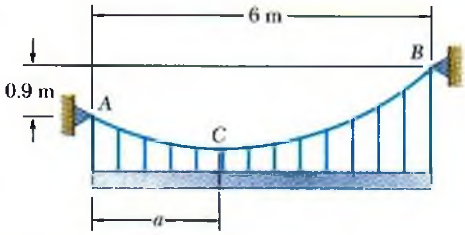


Figura P7.112 y P7.113

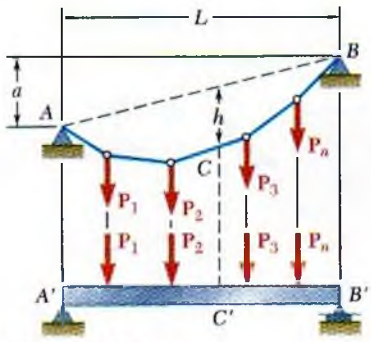


Figura P7.114

***7.114** El cable AB de claro L y una viga simplemente apoyada $A'B'$ que tiene el mismo claro se someten a las mismas cargas verticales mostradas en la figura. Demuestre que la magnitud del momento flector en un punto C' de la viga es igual al producto T_0h, donde T_0 es la magnitud de la componente horizontal de la fuerza de tensión presente en el cable y h es la distancia vertical entre el punto C y una línea recta que une a los puntos de apoyo A y B.

7.115 a 7.118 Utilice la propiedad establecida en el problema 7.114 para resolver cada problema que se indica a continuación, resolviendo primero el problema correspondiente relacionado con la viga.

7.115 Problema 7.89*a*.
7.116 Problema 7.92*b*.
7.117 Problema 7.94*b*.
7.118 Problema 7.95*b*.

***7.119** Muestre que la curva formada por un cable que tiene una carga distribuida $w(x)$ está definida por la ecuación diferencial $d^2y/dx^2 = w(x)/T_0$, donde T_0 es la tensión presente en el punto más bajo.

***7.120** Utilice la propiedad establecida en el problema 7.119 para determinar la curva formada por un cable de claro L y pandeo h que tiene una carga distribuida $w = w_0 \cos(\pi x/L)$, donde x se mide a partir del punto medio del claro. También determine los valores máximo y mínimo de la tensión presente en el cable.

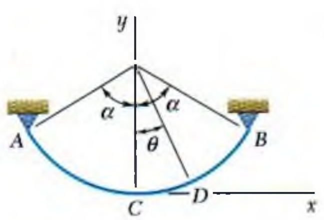


Figura P7.121

***7.121** Si el peso por unidad de longitud del cable AB es $w_0/\cos^2\theta$, demuestre que la curva formada por este cable es un arco circular. (*Sugerencia*: Use la propiedad establecida en el problema 7.119.)

*7.10. CATENARIA

Ahora considérese un cable AB que soporta una carga *uniformemente distribuida a lo largo del mismo cable* (figura 7.18*a*). Los cables que cuelgan bajo la acción de su propio peso están cargados de esta forma. La carga por unidad de longitud, medida a lo largo del cable, se representa con w y se expresa en N/m o en lb/ft. La magnitud W de la carga total soportada por un tramo del cable de longitud s, el cual se extiende desde el punto más bajo C hasta un punto D, está dada por $W = ws$. Al sustituir este valor de W en la ecuación (7.6), se obtiene la tensión presente en el punto D.

$$T = \sqrt{T_0^2 + w^2s^2}$$

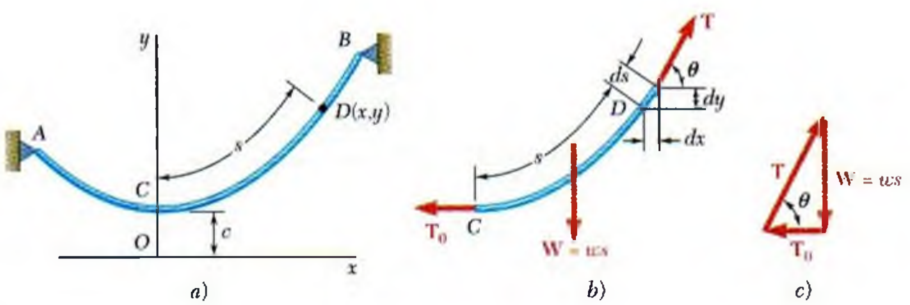


Figura 7.18

Para simplificar los cálculos subsecuentes, se introduce la constante $c = T_0/w$. Entonces se escribe

$$T_0 = wc \qquad W = ws \qquad T = w\sqrt{c^2 + s^2} \tag{7.11}$$

En la figura 7.18*b* se muestra el diagrama de cuerpo libre para la porción *CD* del cable. Sin embargo, este diagrama no puede utilizarse para obtener directamente la ecuación de la curva que adopta el cable puesto que no se conoce la distancia horizontal desde *D* hasta la línea de acción de la resultante **W** de la carga. Para obtener dicha ecuación, primero se escribe que la proyección horizontal de un pequeño elemento de cable de longitud ds es $dx = ds \cos \theta$. Se observa a partir de la figura 7.18*c* que $\theta = T_0/T$ y con las ecuaciones (7.11), se escribe

$$dx = ds \cos \theta = \frac{T_0}{T} ds = \frac{wc\, ds}{w\sqrt{c^2 + s^2}} = \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2/c^2}}$$

Si se selecciona el origen O del sistema de coordenadas a una distancia directamente por debajo de C (figura 7.18*a*) y se integra desde $C(0, c)$ hasta $D(x, y)$, se obtiene[†]

$$x = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2/c^2}} = c\left[\operatorname{senh}^{-1}\frac{s}{c}\right]_0^s = c \operatorname{senh}^{-1}\frac{s}{c}$$

Esta ecuación, que relaciona la longitud s de la porción *CD* del cable y la distancia horizontal x, se puede escribir de la siguiente forma:

$$s = c \operatorname{senh}\frac{x}{c} \tag{7.15}$$

Ahora se puede obtener la relación entre las coordenadas x y y escribiendo $dy = dx \tan \theta$. Observe que a partir de la figura 7.18*c* que $\tan \theta = W/T_0$ y con las ecuaciones (7.11) y (7.15), se escribe

$$dy = dx \tan \theta = \frac{W}{T_0} dx = \frac{s}{c} dx = \operatorname{senh}\frac{x}{c} dx$$

[†]Esta integral se puede encontrar en todas las tablas de integrales estándar. La función

$$z = \operatorname{senh}^{-1} u$$

(que se lee "arco seno hiperbólico de u") es el *inverso* de la función $u = \operatorname{senh} z$ (que se lee "seno hiperbólico de z"). Esta función y la función $v = \cosh z$ (que se lee "coseno hiperbólico de z") están definidas de la siguiente forma:

$$u = \operatorname{senh} z = \tfrac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \qquad v = \cosh z = \tfrac{1}{2}(e^z + e^{-z})$$

Los valores numéricos de las funciones senh z y cosh z se encuentran en las *tablas de funciones hiperbólicas*. Además, estas funciones también se pueden calcular en la mayoría de las calculadoras, ya sea directamente o a partir de las definiciones que se acaban de presentar. Se recomienda al estudiante consultar cualquier libro de cálculo para una descripción completa de las propiedades de estas funciones. En esta sección sólo se utilizan las siguientes propiedades, las cuales se pueden derivar directamente a partir de las definiciones que se presentaron con anterioridad:

$$\frac{d \operatorname{senh} z}{dz} = \cosh z \qquad \frac{d \cosh z}{dz} = \operatorname{senh} z \tag{7.12}$$

$$\operatorname{senh} 0 = 0 \qquad \cosh 0 = 1 \tag{7.13}$$

$$\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1 \tag{7.14}$$



Fotografía 7.5 En esta sección se exponen las fuerzas sobre los apoyos y las fuerzas internas en los cables de las líneas eléctricas que se muestran en la fotografía.

Si se integran desde $C(0, c)$ hasta $D(x, y)$ y con las ecuaciones (7.12) y (7.13), se obtiene la siguiente expresión

$$y - c = \int_0^x \operatorname{senh}\frac{x}{c}\,dx = c\left[\cosh\frac{x}{c}\right]_0^x = c\left(\cosh\frac{x}{c} - 1\right)$$

$$y - c = c\cosh\frac{x}{c} - c$$

la cual se reduce a

$$y = c\cosh\frac{x}{c} \tag{7.16}$$

Ésta es la ecuación de una *catenaria* con eje vertical. La ordenada c del punto más bajo C recibe el nombre de *parámetro* de la catenaria. Elevando al cuadrado ambos lados de las ecuaciones (7.15) y (7.16), restándolas y tomando en cuenta la ecuación (7.14), se obtiene la siguiente relación entre y y s:

$$y^2 - s^2 = c^2 \tag{7.17}$$

Al resolver la ecuación (7.17) para s^2 y llevando este resultado a la última de las relaciones (7.11.), se pueden escribir dichas relaciones de la siguiente forma:

$$T_0 = wc \qquad W = ws \qquad T = wy \tag{7.18}$$

La última relación indica que la tensión en cualquier punto D del cable es proporcional a la distancia vertical desde D hasta la línea horizontal que representa al eje x.

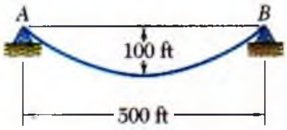
Cuando los apoyos A y B del cable tienen la misma elevación, la distancia L entre los apoyos recibe el nombre de *claro* del cable y la distancia vertical h desde los apoyos hasta el punto más bajo C se conoce como la *flecha* del cable. Estas definiciones son las mismas que las proporcionadas para el caso de cables parabólicos, pero se debe señalar que, debido a la forma en que se seleccionaron los ejes coordenados, ahora la flecha h está dada por

$$h = y_A - c \tag{7.19}$$

También se debe señalar que ciertos problemas sobre catenarias involucran ecuaciones trascendentales, las cuales deben resolverse por medio de aproximaciones sucesivas (véase problema resuelto 7.10). Sin embargo, cuando el cable está bastante tenso, se puede suponer que la carga está uniformemente distribuida *a lo largo de la horizontal* y la catenaria puede reemplazarse por una parábola. Esto simplifica en gran medida la solución del problema y el error que se introduce es pequeño.

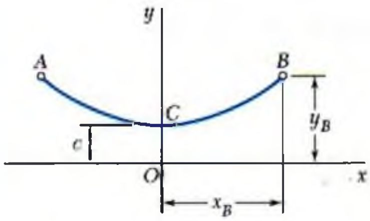
Cuando los apoyos A y B tienen distintas elevaciones, no se conoce la posición del punto más bajo del cable. Entonces, el problema puede resolverse en forma similar a la señalada para cables parabólicos, expresando que el cable debe pasar a través de los apoyos, que $x_B - x_A = L$ y que $y_B - y_A = d$, donde L y d representan, respectivamente, las distancias horizontal y vertical entre los dos apoyos.

PROBLEMA RESUELTO 7.10



Un cable uniforme que pesa 3 lb/ft se suspende entre dos puntos A y B, como se muestra en la figura. Determine *a*) los valores de la tensión máxima y mínima en el cable y *b*) la longitud del cable.

SOLUCIÓN



Ecuación del cable. El origen de las coodenadas se coloca a una distancia c por debajo del punto más bajo del cable. De esta forma, la ecuación del cable está dada por la ecuación (7.16),

$$y = c \cosh \frac{x}{c}$$

Las coordenadas del punto B son las siguientes

$$x_B = 250 \text{ ft} \qquad y_B = 100 + c$$

Si se sustituyen estas coordenadas en la ecuación del cable, se obtiene

$$100 + c = c \cosh \frac{250}{c}$$

$$\frac{100}{c} + 1 = \cosh \frac{250}{c}$$

El valor de c se determina suponiendo valores de prueba sucesivos, como se muestra en la siguiente tabla:

c	$\frac{250}{c}$	$\frac{100}{c}$	$\frac{100}{c} + 1$	$\cosh \frac{250}{c}$
300	0.833	0.333	1.333	1.367
350	0.714	0.286	1.286	1.266
330	0.758	0.303	1.303	1.301
328	0.762	0.305	1.305	1.305

Tomando $c = 328$, se tiene que

$$y_B = 100 + c = 428 \text{ ft}$$

***a*) Valores máximo y mínimo de la tensión.** Con las ecuaciones (7.18), se obtiene

$$T_{mín} = T_0 = wc = (3 \text{ lb/ft})(328 \text{ ft}) \qquad T_{mín} = 984 \text{ lb} \blacktriangleleft$$

$$T_{máx} = T_B = wy_B = (3 \text{ lb/ft})(428 \text{ ft}) \qquad T_{máx} = 1\,284 \text{ lb} \blacktriangleleft$$

***b*) Longitud del cable.** La mitad de la longitud del cable se encuentra al resolver la ecuación (7.17):

$$y_B^2 - s_{CB}^2 = c^2 \qquad s_{CB}^2 = y_B^2 - c^2 = (428)^2 - (328)^2 \qquad s_{CB} = 275 \text{ ft}$$

Por tanto, la longitud total del cable está dada por

$$s_{AB} = 2s_{CB} = 2(275 \text{ ft}) \qquad s_{AB} = 550 \text{ ft} \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En la última sección de este capítulo se aprendió a resolver los problemas que involucran a un *cable que soporta una carga uniformemente distribuida a lo largo del mismo*. La forma que adopta el cable es la de una catenaria y está definida por la ecuación:

$$y = c \cosh \frac{x}{c} \qquad (7.16)$$

1. ***Es necesario recordar que el origen de las coordenadas para una catenaria está localizado a una distancia c directamente por debajo del punto más bajo de la catenaria.*** La longitud del cable desde el origen hasta cualquier punto se expresa como

$$s = c \operatorname{senh} \frac{x}{c} \qquad (7.15)$$

2. ***Primero se deben identificar todas las cantidades conocidas y desconocidas.*** Entonces se considera cada una de las ecuaciones que fueron presentadas en la sección (ecuaciones 7.15 a 7.19) y se resuelve una ecuación que contiene sólo una incógnita. Se sustituye el valor encontrado de esta forma en otra ecuación y se resuelve esta última para otra incógnita.

3. ***Si se proporciona la flecha h,*** se utiliza la ecuación (7.19) para reemplazar y por $h + c$ en la ecuación (7.16) si x es conocida [problema resuelto 7.10], o en la ecuación (7.17) si se conoce s, y se resuelve la ecuación obtenida para la constante c.

4. ***Muchos de los problemas que se encontrarán involucran una solución por medio de prueba y error*** de una ecuación que involucra a un seno o a un coseno hiperbólicos. El trabajo se puede simplificar llevando un registro de los cálculos realizados en una tabla, como se hizo en el problema resuelto 7.10. Por supuesto, también se puede usar una técnica de solución numérica basada en una computadora o calculadora.

5. ***Es necesario tener en cuenta que la ecuación definitoria puede tener más de una solución.*** Para ayudar a visualizar esta posibilidad, se recomienda primero graficar la ecuación y después resolverla para su raíz o sus raíces. Si hay más de una raíz, se debe determinar cuál de éstas corresponde a soluciones físicamente posibles.

Problemas

7.122 Dos escaladores, separados por una distancia de 10 m, permanecen de pie mientras sostienen los extremos de la cuerda de 12 m de longitud como indica la figura. Si la masa por unidad de longitud de la cuerda es de 0.07 kg/m, determine *a*) la flecha h, *b*) la magnitud de la fuerza ejercida sobre la mano de un escalador.

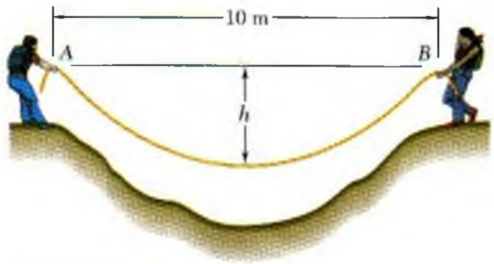


Figura P7.122

7.123 Una cadena de 60 ft de longitud y 120 lb de peso se suspende entre dos puntos que están a la misma altura. Si la flecha es de 24 ft, determine *a*) la distancia entre los apoyos, *b*) la tensión máxima en la cadena.

7.124 Un cable de tranvía aéreo, cuya longitud es de 500 ft y pesa 2.8 lb/ft, está suspendido entre dos puntos ubicados a la misma altura. Si la flecha es de 125 ft, determine *a*) la distancia horizontal entre los soportes, *b*) la tensión máxima en el cable.

7.125 Un cable de transmisión eléctrica de 130 m de longitud y masa por unidad de longitud de 3.4 kg/m se suspende entre dos puntos que tienen la misma altura. Si la flecha es de 30 m, determine la distancia horizontal entre los apoyos, así como la tensión máxima en el cable.

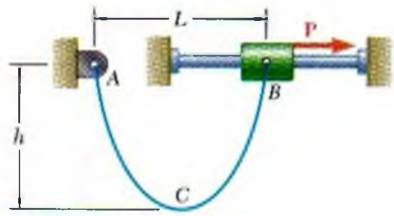


Figura *P7.126* y P7.127

7.126 En la figura se muestra un alambre, con longitud de 30 m y masa por unidad de longitud de 0.3 kg/m, que se une a un apoyo fijo en A y a un collarín en B. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine *a*) la fuerza **P** para la cual $h = 12$ m, *b*) el claro correspondiente L.

7.127 En la figura se muestra un alambre, con longitud de 30 m y masa por unidad de longitud de 0.3 kg/m, el cual se une a un apoyo fijo en A y a un collarín en B. Si la magnitud de la fuerza horizontal aplicada al collarín es $P = 30$ N, determine *a*) la flecha h, *b*) el claro correspondiente L.

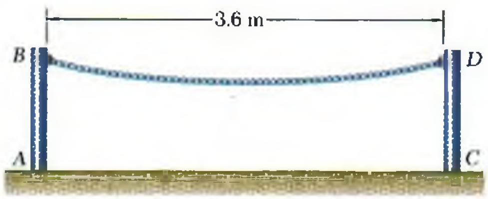


Figura P7.128

7.128 Un camino de acceso está cerrado por medio de una cadena de 3.8 m de longitud que atraviesa la calle. Si la masa por unidad de longitud de la cadena es de 3.72 kg/m, determine *a*) la flecha h, *b*) la magnitud de la componente horizontal de la fuerza que ejerce la cadena sobre el poste AB.

7.129 Un alambre de 90 m de longitud se suspende de dos puntos que están a la misma altura separados por una distancia de 60 m. Si la tensión máxima es de 300 N, determine *a*) la flecha h, *b*) la masa total del alambre.

7.130 Determine la flecha de una cadena de 45 ft de largo que está unida a dos puntos situados a la misma altura pero separados por una distancia de 20 ft.

7.131 Una cuerda de 10 ft de longitud se une a los apoyos A y B como indica la figura. Determine *a*) el claro de la cuerda tal que sea igual a la flecha de la cuerda, *b*) el ángulo correspondiente θ_B.

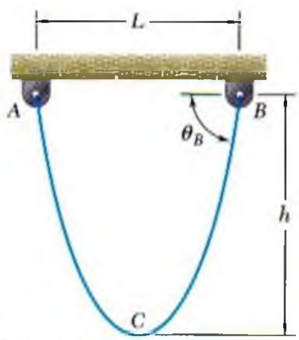


Figura P7.131

7.132 Un cable que tiene masa por unidad de longitud de 3 kg/m se suspende entre dos puntos situados a la misma altura y separados por una distancia de 48 m. Determine la flecha mínima permisible del cable si la tensión máxima no debe superar los 1 800 N.

7.133 Una cadena de 24 ft de longitud con masa por unidad de longitud de 2.73 lb/ft se une a una viga en *A* y pasa por una pequeña polea en *B* como indica la figura. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine los valores de la distancia *a* para los cuales la cadena está en equilibrio.

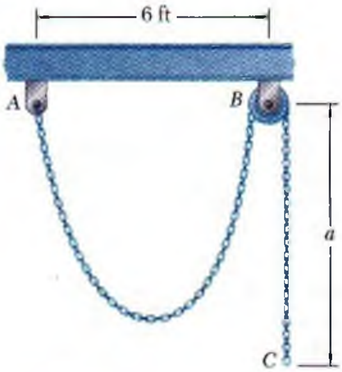


Figura P7.133

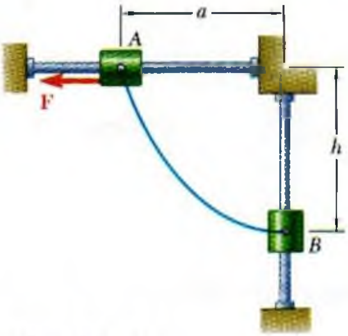


Figura *P7.134*

7.134 El cable *AB*, con longitud de 10 ft y peso de 20 lb, se une a los collarines instalados en *A* y *B*, los cuales pueden desplazarse libremente sobre las varillas que muestra la figura. Sin tomar en cuenta el peso de los collarines, determine *a*) la magnitud de la fuerza horizontal **F** de modo que $h = a$, *b*) el valor correspondiente de *h* y *a*, *c*) la tensión máxima presente en el cable.

7.135 Un contrapeso *D*, de 40 kg de masa, se une a un cable que pasa por una pequeña polea colocada en *A* y está unido a un apoyo en el punto *B*. Si $L = 15$ m y $h = 5$ m, determine *a*) la longitud del cable de *A* a *B*, *b*) la masa por unidad de longitud del cable. No tome en cuenta la masa del cable de *A* a *D*.

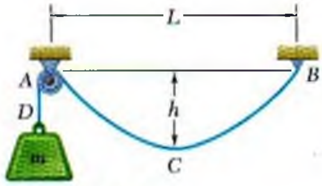


Figura P7.135

7.136 Como indica la figura, a la izquierda del punto *B* un cable muy largo *ABDE* descansa sobre una superficie horizontal rugosa. Si el peso del cable por unidad de longitud es de 1.5 lb/ft, determine la fuerza **F** cuando $a = 10.8$ ft.

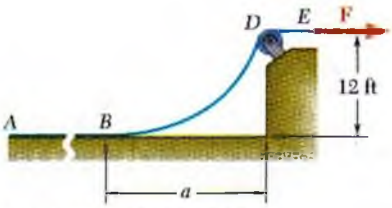


Figura P7.136 y P7.137

7.137 Como indica la figura, a la izquierda del punto *B* un cable muy largo *ABDE* descansa sobre una superficie horizontal rugosa. Si el peso del cable por unidad de longitud es de 1.5 lb/ft, determine la fuerza **F** cuando $a = 18$ ft.

7.138 Un cable uniforme cuya masa por unidad de longitud es de 4 kg/m, se mantiene en la posición que indica la figura mediante la fuerza **P** aplicada en B. Si $P = 800$ N y $\theta_A = 60°$, determine *a*) la ubicación del punto B, *b*) la longitud del cable.

7.139 Un cable uniforme cuya masa por unidad de longitud es de 4 kg/m, se mantiene en la posición mostrada en la figura mediante la fuerza **P** aplicada en B. Si $P = 600$ N y $\theta_A = 60°$, determine *a*) la ubicación del punto B, *b*) la longitud del cable.

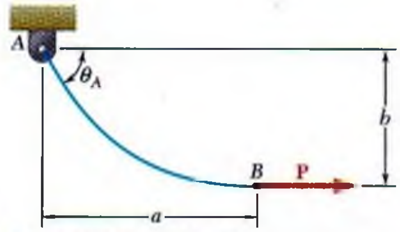


Figura P7.138 y P7.139

7.140 Un cable eléctrico cuelga entre un poste y una casa. Si la masa por unidad de longitud del cable es de 2.1 kg/m, determine *a*) la distancia desde la casa hasta el punto más bajo, C, del cable, *b*) la tensión máxima en el cable.

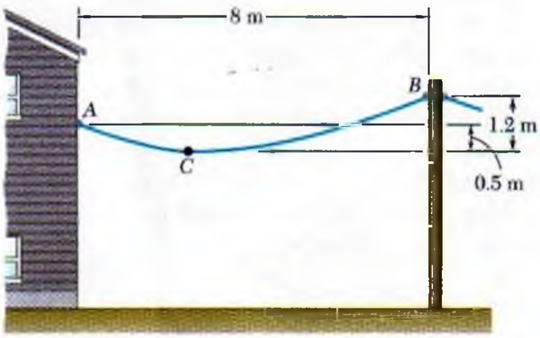


Figura P7.140

7.141 El cable ACB mostrado en la figura pesa 0.3 lb/ft. Si el punto más bajo del cable se localiza a una distancia $a = 6$ ft por debajo del apoyo A, determine *a*) la ubicación del punto más bajo, C, *b*) la tensión máxima en el cable.

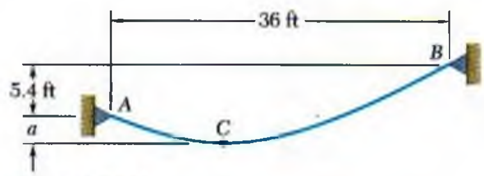


Figura P7.141

7.142 Denote con θ el ángulo formado por un cable uniforme y la horizontal y demuestre que en cualquier punto *a*) $s = c \tan \theta$, *b*) $y = c \sec \theta$.

7.143 *a*) Determine el claro horizontal máximo permisible para un cable uniforme, cuya masa por unidad de longitud es m', si la tensión en éste no debe exceder un valor dado T_m. *b*) Utilice el resultado del inciso *a*) para determinar el claro máximo de un alambre de acero para el cual $m' = 0.34$ kg/m y $T_m = 32$ kN.

***7.144** Un cable con peso por unidad de longitud de 2 lb/ft se sostiene en la forma que muestra la figura. Si el claro L es de 18 ft, determine los dos valores de la flecha h para los cuales la tensión máxima es de 80 lb.

***7.145** Para el cable mostrado en la figura, determine la relación entre la flecha y el claro para la cual la tensión máxima en el cable AB es igual al total de su peso.

***7.146** En la figura se muestra un cable de peso w por unidad de longitud que se sostiene entre dos puntos situados a la misma altura y separados por una distancia L. Determine *a*) la relación entre la flecha y el claro para la cual la tensión máxima $T_{máx}$ sea lo más pequeña posible, *b*) los valores correspondientes de θ_B y $T_{máx}$.

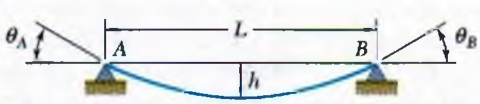


Figura *P7.144, P7.145* y P7.146

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 7

En este capítulo se aprendió a determinar las fuerzas internas que mantienen unidas a las diversas partes de un elemento dado en una estructura.

Fuerzas en elementos rectos sujetos a dos fuerzas

Al considerar primero un *elemento recto sujeto a dos fuerzas AB* [sección 7.2], se recuerda que un elemento de este tipo está sometido en A y B a fuerzas iguales y opuestas $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$ que están dirigidas a lo largo de AB (figura 7.19*a*). Si se corta el elemento AB en C y se dibuja el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la parte AC, se concluye que las fuerzas internas que existían en el elemento AB en C son equivalentes a una *fuerza axial* $-\mathbf{F}$ igual y opuesta a $\mathbf{F}$ (figura 7.19*b*). Se observa que en el caso de un elemento sujeto a dos fuerzas que no es recto, las fuerzas internas se reducen a un sistema fuerza-par y no a una sola fuerza.

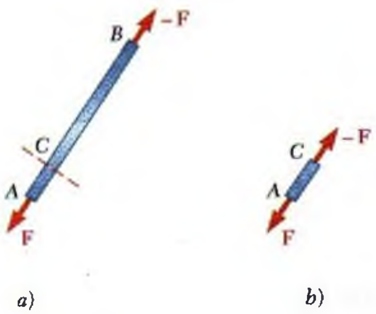


Figura 7.19

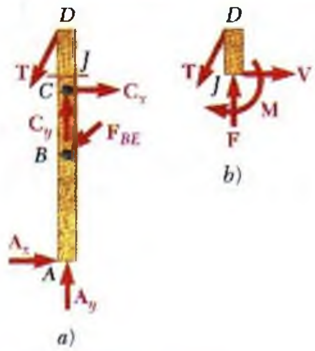


Figura 7.20

Fuerzas en elementos sujetos a fuerzas múltiples

Si se considera después un *elemento sujeto a fuerzas múltiples AD* (figura 7.20*a*), se corta en J y se dibuja el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la parte JD, se concluye que las fuerzas internas en J son equivalentes a un sistema fuerza-par que consta de la *fuerza axial*, $\mathbf{F}$, la *fuerza cortante* $\mathbf{V}$ y un par $\mathbf{M}$ (figura 7.20*b*). La magnitud de la fuerza cortante mide la *fuerza cortante* en el punto J y se hace referencia al momento del par como el *momento flector* en J. Puesto que, si se hubiera considerado el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la parte AJ, se hubiera obtenido un sistema fuerza-par igual y opuesto es necesario especificar qué porción del elemento AD se utilizó cuando se registraron las respuestas [problema resuelto 7.1].

Fuerzas en vigas

La mayor parte del capítulo se dedicó al análisis de las fuerzas internas en dos tipos importantes de estructuras de ingeniería: las *vigas* y los *cables*. Las *vigas* comúnmente son elementos prismáticos rectos y largos diseñados para soportar cargas que se aplican en varios puntos a largo del elemento. En general, las cargas son perpendiculares al eje de la viga y sólo producen *corte* y *flexión* en ésta. Las cargas pueden estar *concentradas* en puntos específicos o *dis-*

tribuidas a lo largo de toda la longitud o a lo largo de una porción de la viga. La viga misma puede estar apoyada de varias formas; puesto que en este libro sólo se consideran vigas estáticamente determinadas, el análisis se limitó a *vigas simplemente apoyadas*, *vigas con volados* y *vigas en voladizo* [sección 7.3].

Fuerza cortante y momento flector en una viga

Para obtener la *fuerza cortante* V y el *momento flector* M en un punto dado C de una viga, primero se determinan las reacciones en los apoyos considerando toda la viga como un cuerpo libre. Entonces, se corta a la viga en C y se usa el diagrama de cuerpo libre correspondiente a una de las dos partes obtenidas de esta manera para determinar los valores de V y M. Para evitar cualquier confusión en relación con el sentido de la fuerza cortante **V** y el par **M** (los cuales actúan en direcciones opuestas en las dos porciones de la viga), se adoptó la convención de signos que se ilustra en la figura 7.21 [sección 7.4]. Una vez que se han determinado los valores de la fuerza cortante y el momento flector en unos cuantos puntos seleccionados de la viga, usualmente es posible dibujar un *diagrama de fuerza cortante* y un *diagrama de momento flector* que representan, respectivamente, la fuerza cortante y el momento flector en cualquier punto de la viga [sección 7.5]. Cuando una viga sólo está sometida a cargas concentradas, la fuerza cortante tiene un valor constante entre las cargas y el momento flector varía linealmente entre éstas [problema resuelto 7.2]. Por otra parte, cuando una viga está sometida a cargas distribuidas, la fuerza cortante y el momento flector varían en forma diferente [problema resuelto 7.3].



Fuerzas internas en la sección
(fuerza cortante y momento flector positivo)

Figura 7.21

Relaciones entre carga, fuerza cortante y momento flector

La construcción de los diagramas de fuerza cortante y momento flector se facilita si se toman en consideración las siguientes relaciones. Representando con w la carga distribuida por unidad de longitud (la cual se supone positiva si está dirigida hacia abajo), se tiene que [sección 7.5]:

$$\frac{dV}{dx} = -w \qquad (7.1)$$

$$\frac{dM}{dx} = V \qquad (7.3)$$

o, después de integrar las ecuaciones anteriores,

$$V_D - V_C = -(\text{área bajo la curva de carga entre } C \text{ y } D) \qquad (7.2')$$

$$M_D - M_C = \text{área bajo la curva de fuerza cortante entre } C \text{ y } D \qquad (7.4')$$

La ecuación (7.2′) hace que sea posible dibujar el diagrama de fuerza cortante de una viga a partir de la curva que representa a la carga distribuida que actúa sobre dicha viga y del valor de V en un extremo de la misma. En forma análoga, la ecuación (7.4′) hace que sea posible dibujar el diagrama de momento flector a partir del diagrama de fuerza cortante y del valor de M en un extremo de la viga. Sin embargo, las cargas concentradas introducen discontinuidades en el diagrama de fuerza cortante y los pares concentrados implican discontinuidades en el diagrama de momento flector, ninguno de éstos están tomados en consideración en las ecuaciones (7.2′) y (7.4′) [problemas resueltos 7.4 y 7.7]. Por último, a partir de la ecuación (7.3) se observa que los puntos de la viga donde el momento flector es máximo o mínimo son también los puntos donde la fuerza cortante es igual a cero [problema resuelto 7.5].

Cables con cargas concentradas

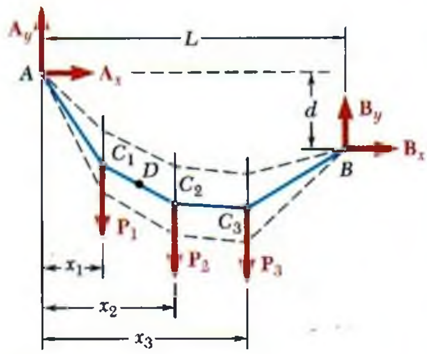


Figura 7.22

Cables con cargas distribuidas

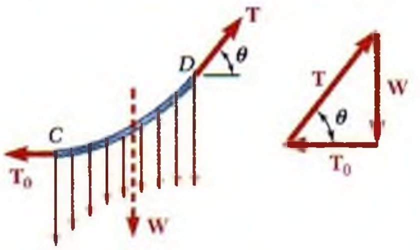


Figura 7.23

Cable parabólico

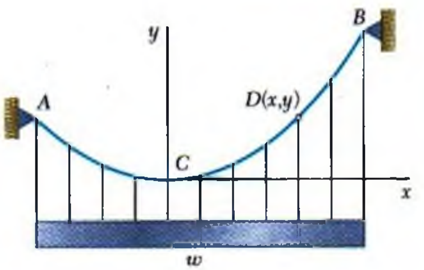


Figura 7.24

Catenaria

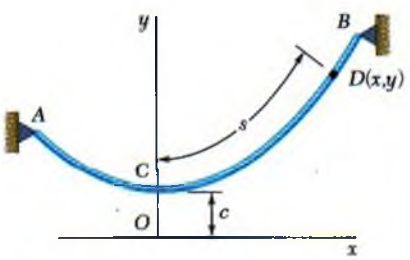


Figura 7.25

La segunda mitad del capítulo estuvo dedicada al análisis de *cables flexibles*. Primero se consideró un cable con un peso despreciable que soporta *cargas concentradas* [sección 7.7]. Al suponer todo el cable AB como un cuerpo libre (figura 7.22) se observó que las tres ecuaciones de equilibrio que están disponibles no son suficientes para determinar las cuatro incógnitas que representan a las reacciones en los apoyos A y B. Sin embargo, si se conocen las coordenadas de un punto D del cable, se puede obtener una ecuación adicional considerando el diagrama de cuerpo libre para la porción AD o DB del cable. Una vez que se han determinado las reacciones en los apoyos, se puede encontrar la elevación de cualquier punto del cable y la tensión en cualquier porción del mismo a partir del diagrama de cuerpo libre apropiado [problema resuelto 7.8]. Se señaló que la componente horizontal de la fuerza $\mathbf{T}$ que representa a la tensión es la misma en cualquier punto del cable.

Después se consideraron cables que soportan *cargas distribuidas* [sección 7.8]. Utilizando como cuerpo libre un tramo del cable CD que se extiende desde el punto más bajo C hasta un punto arbitrario D del cable (figura 7.23), se observó que la componente horizontal de la fuerza de tensión $\mathbf{T}$ en D es constante e igual a la tensión T_0 en C, mientras que su componente vertical es igual al peso W de la porción de cable CD. La magnitud y la dirección de $\mathbf{T}$ se obtuvieron a partir del triángulo de fuerzas:

$$T = \sqrt{T_0^2 + W^2} \qquad \tan\theta = \frac{W}{T_0} \tag{7.6}$$

En el caso de una carga *uniformemente distribuida a lo largo de la horizontal* —como en el caso de un puente colgante (figura 7.24)— la carga soportada por la porción CD está dada por $W = wx$, donde w es la carga constante por unidad de longitud horizontal [sección 7.9]. También se encontró que la forma de la curva adoptada por el cable es una *parábola* cuya ecuación está dada por

$$y = \frac{wx^2}{2T_0} \tag{7.8}$$

y que la longitud del cable se puede encontrar utilizando la expansión en series dada en la ecuación (7.10) [problema resuelto 7.9].

En el caso de *una carga uniformemente distribuida a lo largo del mismo cable* —por ejemplo, un cable colgando bajo su propio peso (figura 7.25)— la carga soportada por la porción CD está dada por $W = ws$, donde s es la longitud medida a lo largo del cable y w es la carga constante por unidad de longitud [sección 7.10]. Se seleccionó el origen O de los ejes coordenados a una distancia $c = T_0/w$ por debajo de C, y se derivaron las relaciones

$$s = c \operatorname{senh} \frac{x}{c} \tag{7.15}$$

$$y = c \cosh \frac{x}{c} \tag{7.16}$$

$$y^2 - s^2 = c^2 \tag{7.17}$$

$$T_0 = wc \qquad W = ws \qquad T = wy \tag{7.18}$$

las cuales pueden emplearse para resolver problemas que involucran cables que cuelgan bajo la acción de su propio peso [problema resuelto 7.10]. La ecuación (7.16) define la forma adoptada por el cable y es la ecuación de una *catenaria*.

Problemas de repaso

7.147 Una barra semicircular está cargada como indica la figura. Determine las fuerzas internas en el punto J si $\theta = 30°$.

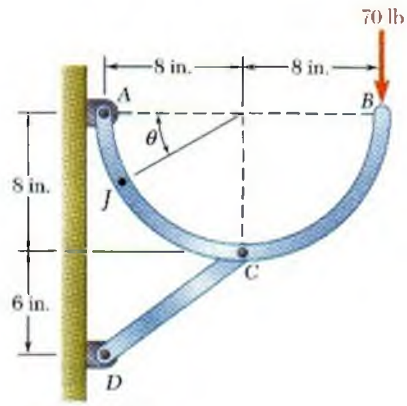


Figura P7.147

7.148 Si el radio de cada polea mide 7.2 in., y sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine las fuerzas internas en el punto J del armazón que muestra la figura.

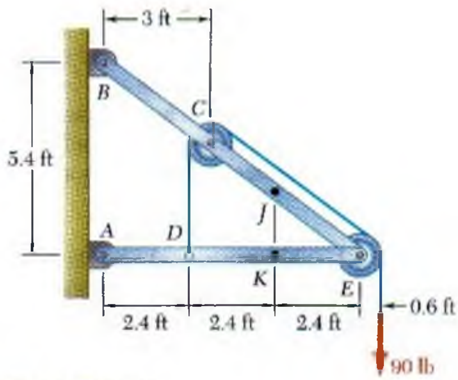


Figura P7.148

7.149 Para la barra en forma de un cuarto de círculo con peso W y sección transversal uniforme, sostenida como indica la figura, determine el momento flector en el punto J cuando $\theta = 30°$.

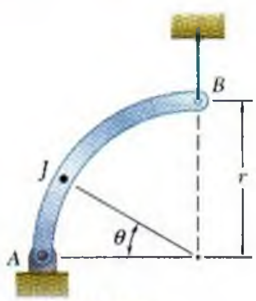


Figura *P7.149*

7.150 Para la viga y las cargas mostradas en la figura, *a*) trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

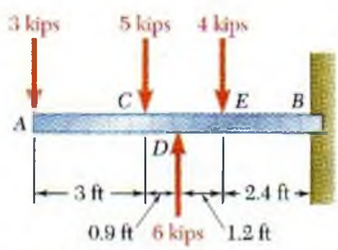


Figura P7.150

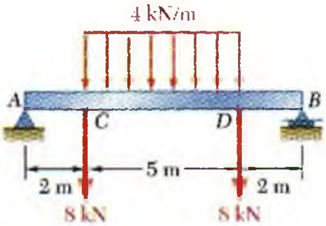


Figura P7.151

7.151 Para la viga y las cargas mostradas en la figura, *a*) trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

7.152 Para la viga de la figura, determine *a*) la magnitud *P* de las dos fuerzas que actúan hacia arriba para las cuales el valor máximo del momento flector sea mínimo, *b*) el valor correspondiente de $|M|_{máx}$. (Vea la sugerencia del problema 7.51.)

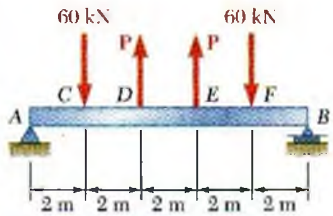


Figura *P7.152*

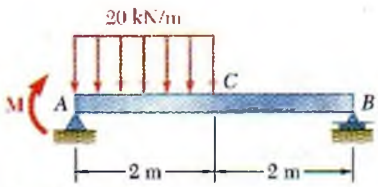


Figura P7.153

7.153 Para la viga de la figura, trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, también determine la magnitud y la ubicación del valor absoluto máximo del momento flector sabiendo que *a*) $M = 0$, *b*) $M = 12$ kN · m.

7.154 Para la viga y las cargas mostradas en la figura, *a*) obtenga las ecuaciones de las curvas de la fuerza cortante y del momento flector, *b*) trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, *c*) determine la magnitud y la ubicación del momento flector máximo.

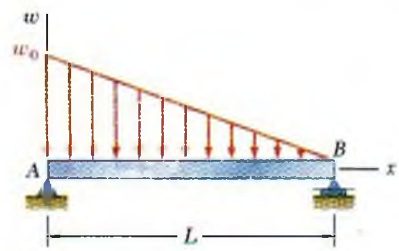


Figura P7.154

7.155 La viga *AB* descansa sobre el suelo y sostiene la carga parabólica indicada por la figura. Suponiendo que las reacciones del suelo están uniformemente distribuidas y dirigidas hacia arriba, *a*) escriba las ecuaciones para las curvas de la fuerza cortante y del momento flector, *b*) determine el momento flector máximo.

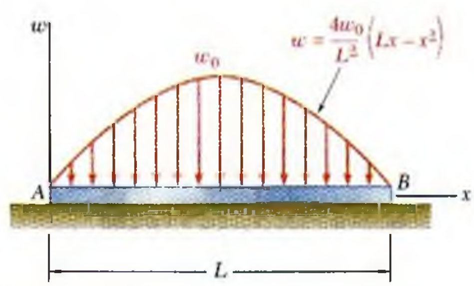


Figura *P7.155*

7.156 Si $d_C = 4$ m, determine *a*) la reacción en *A*, *b*) la reacción en *E*.

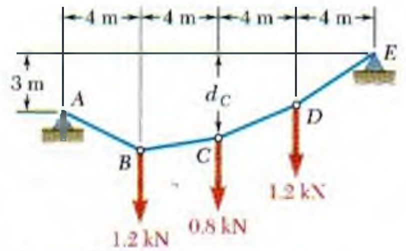


Figura P7.156

7.157 Una tubería de vapor que pesa 50 lb/ft y pasa entre dos edificios, los cuales están separados por una distancia de 60 ft, se sostiene mediante un sistema de cables como el mostrado en la figura. Si el peso del cable es equivalente a una carga uniformemente distribuida de 7.5 lb/ft, determine *a*) la ubicación del punto *C* más bajo del cable, *b*) la tensión máxima en el cable.

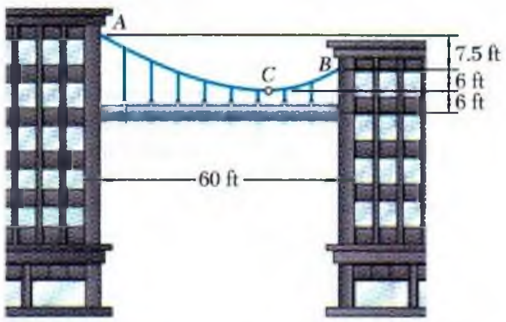


Figura P7.157

7.158 Una cinta de medición tiene 200 ft de longitud y pesa 4 lb. Si la cinta se tiende entre dos puntos situados a la misma altura y se estira hasta que la tensión en cada extremo es de 16 lb, determine la distancia horizontal existente entre los extremos de la cinta. No tome en cuenta la elongación de la cinta debida a la tensión.

Problemas de computadora

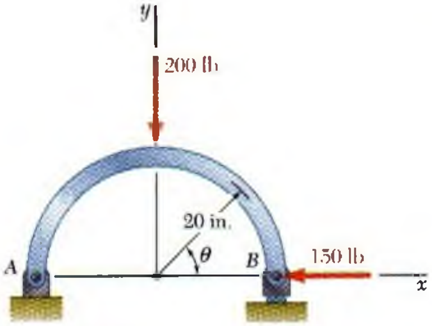


Figura P7.C1

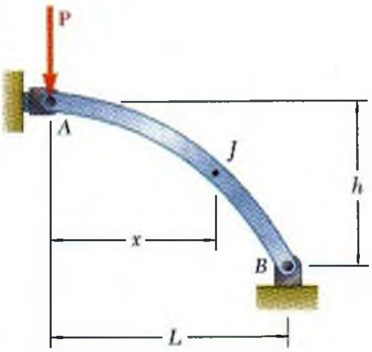


Figura P7.C2

7.C1 Un elemento semicircular de radio igual a 20 in. está cargado como indica la figura. Grafique las fuerzas internas (fuerza axial, fuerza cortante y momento flector) como funciones de θ para $0 < \theta < 90°$.

7.C2 El eje del elemento curvo AB es una parábola cuyo vértice se encuentra en A y para la cual $L = nh$. Si se aplica en A una carga vertical **P** de magnitud igual a 1.2 kN, determine las fuerzas internas y el momento flector en un punto arbitrario J. Grafique las fuerzas internas y el momento flector como funciones de x para $0.25L \leq x \leq 0.75L$ cuando $L = 400$ mm y *a*) $n = 2$, *b*) $n = 3$, *c*) $n = 4$.

7.C3 El piso de un puente consiste en tablones angostos apoyados sobre dos soportes simples de viga, uno de los cuales se muestra en la figura. Como parte del diseño del puente, se desea simular el efecto que tendrá sobre la viga un camión de 12 kN en movimiento. La distancia entre los ejes del camión es de 1.8 m, y se supone que su peso se distribuye de igual manera sobre las cuatro ruedas. *a*) Utilice un programa de computadora para calcular y graficar la magnitud y ubicación del momento flector máximo en la viga como una función de x para -0.9 m $\leq x \leq 3$ m, en incrementos de 0.15 m. *b*) Utilice incrementos más pequeños, si es necesario, para calcular el valor máximo del momento flector que ocurre en la viga cuando el camión se mueve sobre el puente, y determine el valor correspondiente de x.

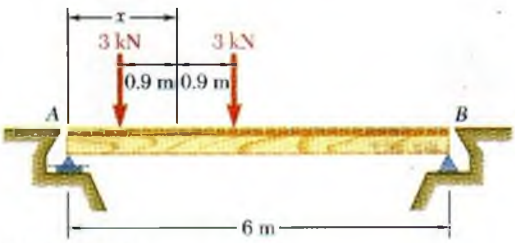


Figura P7.C3

7.C4 Determine las ecuaciones para las curvas de la fuerza cortante y del momento flector de las vigas 1 y 2 que se muestran en la figura, suponiendo que $w_0 = 15$ kN/m y $L = 3$ m. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para cada viga.

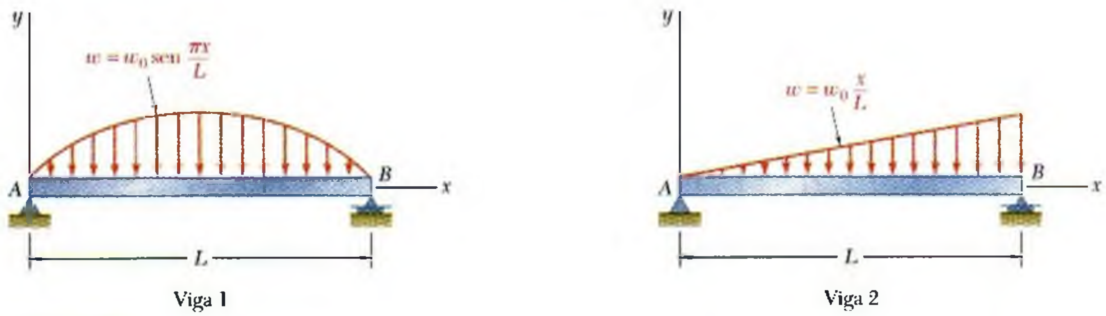


Figura P7.C4

7.C5 En la figura se muestra una viga AB articulada en el punto B y sostenida mediante un rodillo colocado en D, la cual se debe diseñar con eficiencia máxima para soportar una carga distribuida uniformemente a partir de su extremo A hasta su punto central C. Como parte del proceso de diseño, use un programa de cómputo para determinar la distancia a desde el extremo A hasta el punto D, que es donde el rodillo debe colocarse para minimizar en la viga el valor absoluto del momento flector M. (*Sugerencia*: Un análisis preliminar breve mostrará que el rodillo debe colocarse debajo de la carga para que el valor máximo negativo de M ocurra en D, mientras que su valor máximo positivo tenga lugar en algún punto situado entre D y C. Por tanto, se debe trazar el diagrama de momento flector y después igualar el valor absoluto máximo positivo del momento flector con el valor absoluto máximo negativo obtenido.)

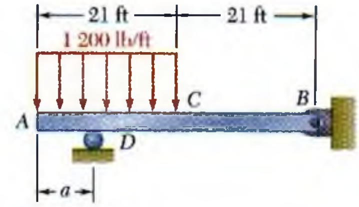


Figura P7.C5

7.C6 El cable AB soporta una carga uniformemente distribuida a lo largo de la horizontal como indica la figura. La parte más baja del cable se localiza a una distancia $a = 3.6$ m por debajo del apoyo A, y el apoyo B se encuentra a una distancia $b = na$ por encima de A. *a*) Determine la tensión máxima en el cable como una función de n. *b*) Grafique la tensión máxima en el cable para $2 \leq n \leq 6$.

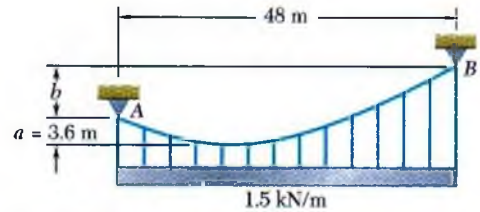


Figura P7.C6

7.C7 Utilice un programa computacional para resolver el problema 7.127 con valores de P entre 0 y 75 N usando incrementos de 5 N.

7.C8 Una instalación típica para líneas de transmisión consiste en un cable de longitud s_{AB}, de masa por unidad de longitud m', suspendido como indica la figura entre dos puntos que tienen la misma altura. Use un programa de cómputo para elaborar una tabla que pueda ser usada en el diseño de futuras instalaciones. La tabla debe contener las cantidades adimensionales h/L, s_{AB}/L, $T_0/m'gL$ y $T_{máx}/m'gL$ para valores de c/L desde 0.2 hasta 0.5, usando incrementos de 0.025, y desde 1 hasta 4, en incrementos de 0.5.

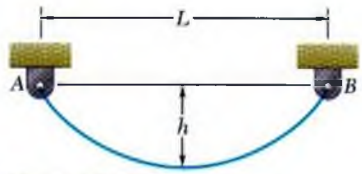


Figura P7.C8

7.C9 El electricista mostrado en la figura está instalando un cable eléctrico que pesa 0.2 lb/ft. Conforme el electricista sube lentamente por la escalera, el cable se desenrolla del carrete de modo que la tensión T_B en el punto B del cable es de 1.2 lb. Sabiendo que $h = 4$ ft cuando el electricista está parado sobre el suelo, grafique la magnitud de la fuerza ejercida por el cable sobre la mano del trabajador como una función de h para 4 ft $\leq h \leq$ 16 ft.

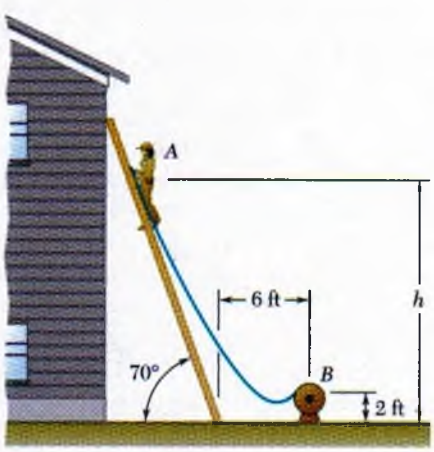
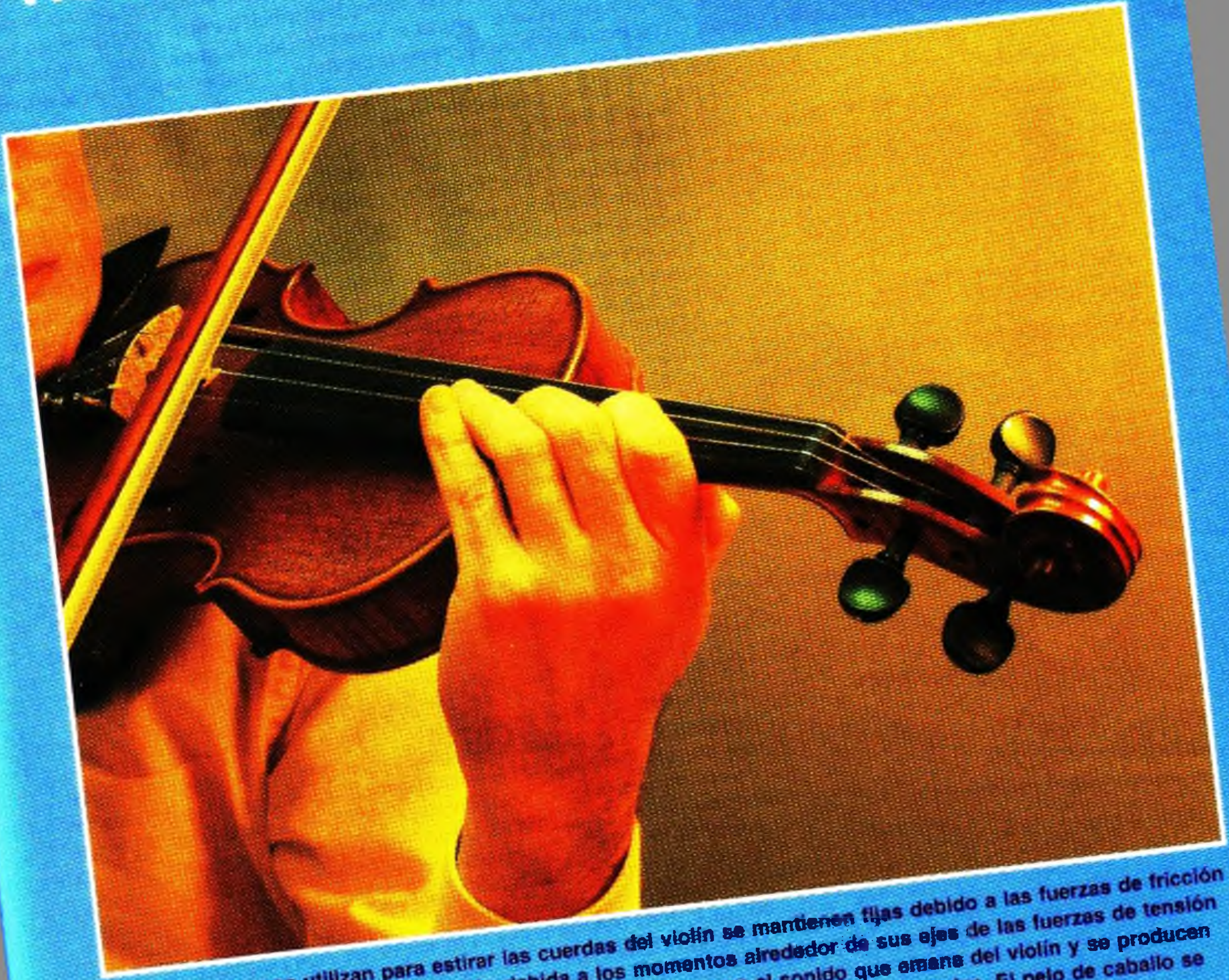


Figura P7.C9

CAPÍTULO 8

Fricción



Las clavijas que se utilizan para estirar las cuerdas del violín se mantienen fijas debido a las fuerzas de fricción estática, las cuales impiden la rotación debida a los momentos alrededor de sus ejes de las fuerzas de tensión ejercidas por las cuerdas. Las vibraciones de las cuerdas crean el sonido que emana del violín y se producen por fuerzas de fricción cinética ejercidas entre el arco de pelo de caballo y las cuerdas. El pelo de caballo se recubre de colofonia para incrementar estas fuerzas de fricción.

8 FRICCIÓN

8.1. INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores se supuso que las superficies en contacto eran *superficies sin fricción* o *superficies rugosas*. Si éstas eran superficies sin fricción, la fuerza que cada una de las superficies ejercía sobre la otra era normal a las superficies y las dos se podían mover de manera libre una respecto a la otra. Si éstas eran superficies rugosas, se supuso que se podían presentar fuerzas tangenciales para impedir el movimiento de una superficie con respecto a la otra.

El anterior fue un punto de vista muy simplificado. En realidad, no existen superficies sin fricción perfectas. Cuando dos superficies están en contacto, siempre se presentan fuerzas tangenciales, llamadas *fuerzas de fricción*, cuando se trata de mover una de las superficies con respecto a la otra. Por otra parte, estas fuerzas de fricción están limitadas en magnitud y no impedirán el movimiento si se aplican fuerzas lo suficientemente grandes. Por tanto, la distinción entre superficies sin fricción y superficies rugosas es una cuestión de grado. Esto se estudiará con más detalle en el presente capítulo, el cual está dedicado al estudio de la fricción y a su aplicación en situaciones de ingeniería comunes.

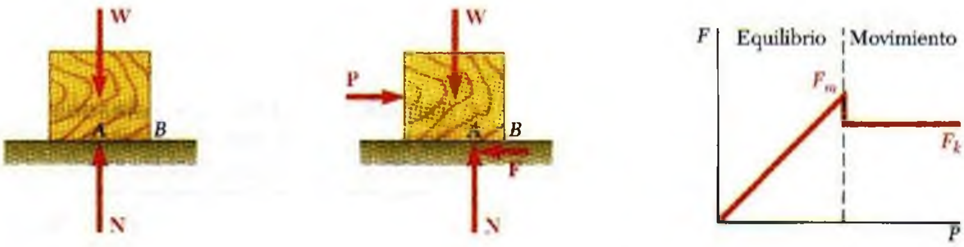
Existen dos tipos de fricción: la *fricción seca*, que algunas veces es llamada *fricción de Coulomb*, y la *fricción de fluidos*. La fricción de fluidos se desarrolla entre capas de fluido que se mueven a diferentes velocidades, y es de gran importancia en problemas que involucran el flujo de fluidos a través de tuberías y orificios o cuando se trabaja con cuerpos que están sumergidos en fluidos en movimiento. Además, la fricción en fluidos también es básica en el análisis del movimiento de *mecanismos lubricados*. Este tipo de problemas se consideran en los libros sobre mecánica de fluidos. El presente estudio está limitado a la fricción seca, esto es, a problemas que involucran cuerpos rígidos que están en contacto a lo largo de superficies *que no están lubricadas*.

En la primera parte del capítulo se analiza el equilibrio de distintos cuerpos rígidos y estructuras de fricción seca en las superficies que están en contacto. Más adelante se estudian ciertas aplicaciones de ingeniería específicas en las cuales la fricción seca juega un papel importante: cuñas, tornillos de rosca cuadrada, chumaceras, cojinetes de empuje, resistencia a la rodadura y fricción en bandas.

8.2. LEYES DE LA FRICCIÓN SECA. COEFICIENTES DE FRICCIÓN

Las leyes de la fricción seca se pueden ejemplificar mediante el siguiente experimento. Un bloque de peso **W** se coloca sobre una superficie horizontal plana (figura 8.1*a*). Las fuerzas que actúan sobre el bloque son su peso **W** y la reacción de la superficie. Como el peso no tiene una componente horizontal, la reacción de la superficie tampoco la tiene; por tanto, la reacción es *normal* a la superficie y está representada por **N** en la figura 8.1*a*. Ahora, suponga que se aplica sobre el bloque una fuerza horizontal **P** (figura 8.1*b*). Si **P** es pequeña, el bloque no se moverá; por tanto, debe existir alguna otra fuerza horizontal que equilibre a **P**. Esta otra fuerza es la *fuerza de fricción estática* **F**, la cual es en realidad la resultante de diversas fuerzas que actúan sobre toda la superficie de contacto entre el bloque y el plano. No se conoce con exactitud la naturaleza de estas fuerzas, pero generalmente se supone que las mismas se deben a irregularidades de las superficies en contacto y, en cierta medida, a la atracción molecular.

Si se incrementa la fuerza **P**, también se incrementa la fuerza de fricción **F**, la cual continúa oponiéndose a **P** hasta que su magnitud alcanza un cierto *valor máximo* F_m (figura 8.1*c*). Si **P** se incrementa aún



a) *b*) *c*)

Figura 8.1

más, la fuerza de fricción ya no la puede equilibrar y el bloque comienza a deslizarse.[1] En cuanto empieza a moverse el bloque, la magnitud de **F** disminuye de F_m a un valor menor F_k. Lo anterior se debe a que existe una menor interpenetración entre las irregularidades de las superficies en contacto cuando dichas superficies se mueven una con respecto a la otra. A partir del momento en que el bloque empieza a moverse, éste continúa deslizándose con una velocidad que va aumentando mientras que la fuerza de fricción, representada por $\mathbf{F}_k$ y denominada *fuerza de fricción cinética*, permanece constante.

La evidencia experimental muestra que el máximo valor F_m de la fuerza de fricción estática es proporcional a la componente normal N de la reacción de la superficie. Así, se tiene que

$$F_m = \mu_s N \qquad (8.1)$$

donde μ_s es una constante llamada *coeficiente de fricción estática*. De forma similar, la magnitud F_k de la fuerza de fricción cinética puede expresarse de la siguiente forma:

$$F_k = \mu_k N \qquad (8.2)$$

donde μ_k es una constante denominada *coeficiente de fricción cinética*. Los coeficientes de fricción μ_s y μ_k no dependen del área de las superficies en contacto, sino que dependen en gran medida de la naturaleza de las superficies en contacto. Como dichos coeficientes también dependen de la condición exacta de las superficies, sus valores casi nunca se conocen con una precisión mayor a 5 por ciento. En la tabla 8.1 se presentan valores aproximados de los coeficientes de fricción estática para distintas superficies secas. Los valores correspon-

[1]Es necesario señalar que, conforme se incrementa la magnitud F de la fuerza de fricción desde 0 hasta F_m, el punto de aplicación A de la resultante **N** de las fuerzas de contacto normales se mueve hacia la derecha, de manera que los pares formados, respectivamente, por **P** y **F** y por **W** y **N** permanecen en equilibrio. Si **N** alcanza el punto B antes que F alcance su valor máximo F_m, el bloque se volcará con respecto a B antes de que pueda comenzar a deslizarse (véanse problemas 8.15 y 8.16)

dientes de fricción cinética son alrededor de 25 por ciento menores. Como los coeficientes de fricción son cantidades adimensionales, los valores proporcionados en la tabla 8.1 se pueden utilizar tanto con unidades del SI como con las unidades de uso común en Estados Unidos.

Tabla 8.1. **Valores aproximados de los coeficientes de fricción estática para superficies secas**

Metal sobre metal	0.15-0.60
Metal sobre madera	0.20-0.60
Metal sobre piedra	0.30-0.70
Metal sobre cuero	0.30-0.60
Madera sobre madera	0.25-0.50
Madera sobre cuero	0.25-0.50
Piedra sobre piedra	0.40-0.70
Tierra sobre tierra	0.20-1.00
Hule sobre concreto	0.60-0.90

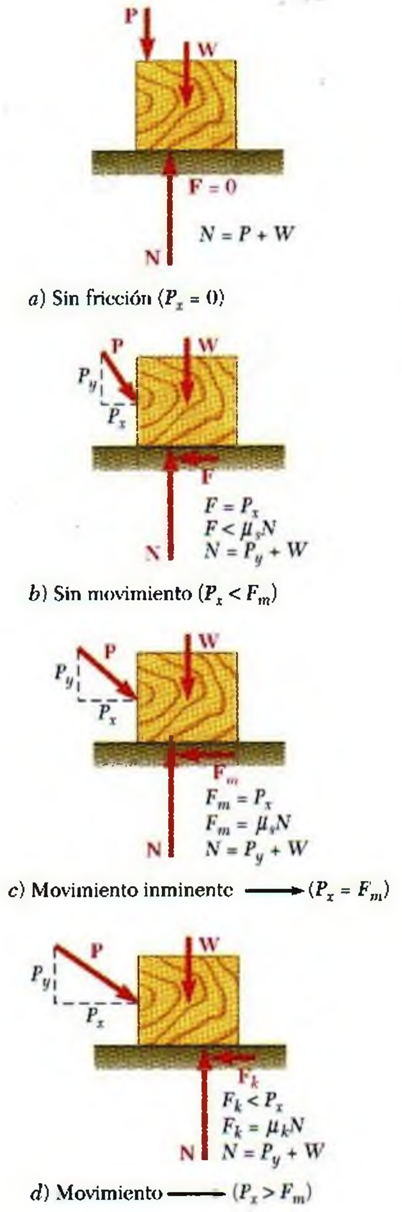


Figura 8.2

Con base en la descripción que se expuso en los párrafos anteriores es posible afirmar que pueden ocurrir cuatro situaciones diferentes cuando un cuerpo rígido está en contacto con una superficie horizontal:

1. Las fuerzas aplicadas sobre el cuerpo no tienden a moverlo a lo largo de la superficie de contacto; por tanto, no hay fuerza de fricción (figura 8.2*a*).

2. Las fuerzas aplicadas tienden a mover al cuerpo a lo largo de la superficie de contacto pero no son lo suficientemente grandes para ponerlo en movimiento. La fuerza de fricción **F** que se ha desarrollado puede encontrarse resolviendo las ecuaciones de equilibrio para el cuerpo. Como no hay evidencia de que **F** ha alcanzado su valor máximo, *no se puede utilizar* la ecuación $F_m = \mu_s N$ para determinar la fuerza de fricción (figura 8.2*b*).

3. Las fuerzas aplicadas hacen que el cuerpo esté a punto de comenzar a deslizarse, en este momento se dice que el *movimiento es inminente*. La fuerza de fricción **F** ha alcanzado su valor máximo F_m y, junto con la fuerza normal **N**, equilibra las fuerzas aplicadas. Se *pueden utilizar* tanto las ecuaciones de equilibrio como la ecuación $F_m = \mu_s N$. También es necesario señalar que la fuerza de fricción tiene un sentido opuesto al sentido del movimiento inminente (figura 8.2*c*).

4. El cuerpo se desliza bajo la acción de las fuerzas aplicadas y ya no se pueden aplicar las ecuaciones de equilibrio. Sin embargo, ahora **F** es igual a $\mathbf{F}_k$ y se puede utilizar la ecuación $F_k = \mu_k N$. El sentido de $\mathbf{F}_k$ es opuesto al sentido del movimiento (figura 8.2*d*).

8.3. ÁNGULOS DE FRICCIÓN

Algunas veces es conveniente reemplazar la fuerza normal **N** y la fuerza de fricción **F** por su resultante **R**. Considere un bloque de peso **W** que descansa sobre una superficie horizontal plana. Si no se aplica una fuerza horizontal al bloque, la resultante **R** se reduce a la fuerza normal **N** (figura 8.3*a*). Sin embargo, si la fuerza aplicada **P** tiene una componente horizontal $\mathbf{P}_x$ que tiende a mover el bloque, la fuerza **R** tendrá una componente horizontal **F** y, por tanto, formará un ángulo ϕ con la normal a la superficie (figura 8.3*b*). Si se incrementa $\mathbf{P}_x$ hasta que el movimiento se vuelva inminente, el ángulo entre **R** y la vertical aumenta y alcanza un valor máximo (figura 8.3*c*). Este valor recibe el nombre de ***ángulo de fricción estática*** y se representa con ϕ_s. Con base en la geometría de la figura 8.3*c*, se observa que

$$\tan \phi_s = \frac{F_m}{N} = \frac{\mu_s N}{N}$$

$$\tan \phi_s = \mu_s \tag{8.3}$$

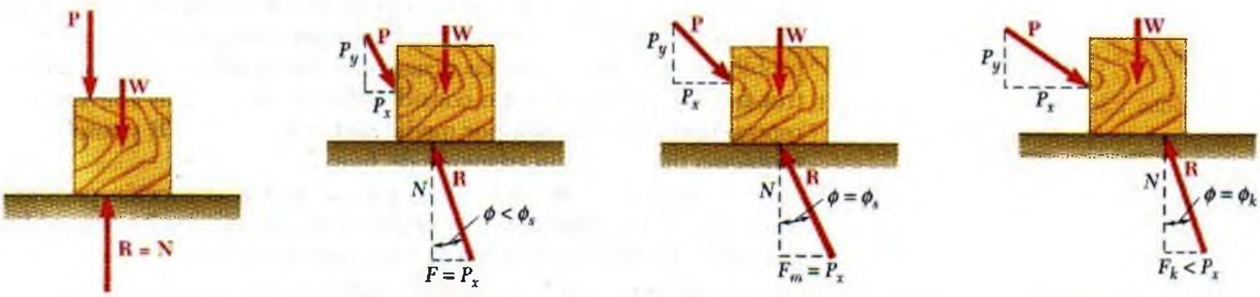
Si en realidad llega a ocurrir el movimiento, la magnitud de la fuerza de fricción decae a F_k; en forma similar, el ángulo ϕ entre **R** y **N** decae a un valor menor ϕ_k, llamado ***ángulo de fricción cinética*** (figura 8.3*d*). Con base en la geometría de la figura 8.3*d*, se escribe

$$\tan \phi_k = \frac{F_k}{N} = \frac{\mu_k N}{N}$$

$$\tan \phi_k = \mu_k \tag{8.4}$$

Se demostrará con otro ejemplo cómo el ángulo de fricción se puede utilizar con ventaja para el análisis de cierto tipo de problemas. Considérese un bloque que descansa sobre una tabla y que está sujeto a las fuerzas correspondientes a su peso **W** y a la reacción **R** de la tabla. Se le puede dar a la tabla cualquier inclinación que se desee. Si la tabla permanece horizontal, la fuerza **R** ejercida por la tabla sobre el bloque es perpendicular a la tabla y equilibra al peso **W** (figura 8.4*a*). Si se le da a la tabla un pequeño ángulo de inclinación θ, la fuerza **R** se desviará de la perpendicular a la tabla por el mismo ángulo θ y continuará equilibrando a **W** (figura 8.4*b*); entonces, **R** tendrá una componente normal **N** de magnitud $N = W \cos \theta$ y una componente tangencial **F** de magnitud $F = W \operatorname{sen} \theta$.

Si se continúa incrementando el ángulo de inclinación el movimiento será inminente en poco tiempo. En ese momento, el ángulo



a) Sin fricción   *b*) Sin movimiento   *c*) Movimiento inminente →   *d*) Movimiento →

Figura 8.3

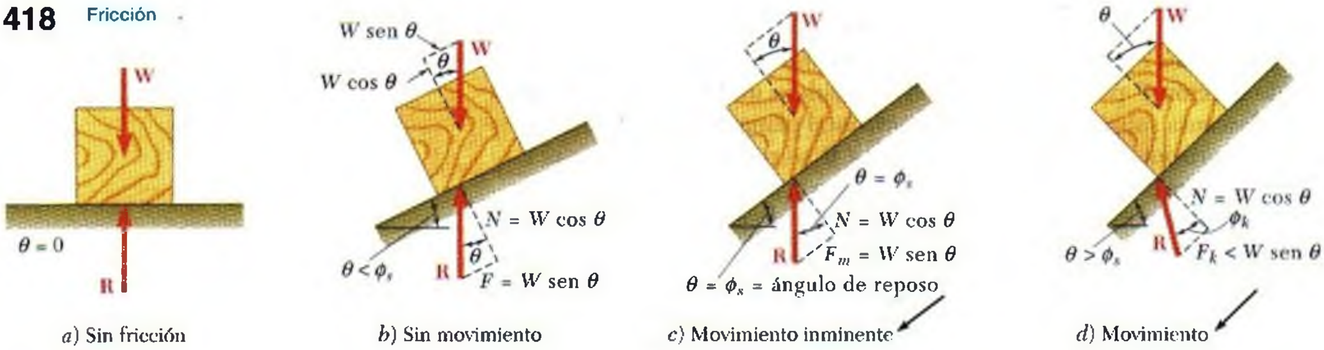


Figura 8.4



Fotografía 8.1 El coeficiente de fricción estática entre un paquete y la banda transportadora inclinada debe ser lo suficientemente grande para permitir que los paquetes sean transportados sin resbalar.

entre **R** y la normal habrá alcanzado su valor máximo ϕ_s (figura 8.4*c*). El valor del ángulo de inclinación correspondiente al movimiento inminente recibe el nombre de *ángulo de reposo*. Obviamente, el ángulo de reposo es igual al ángulo de fricción estática ϕ_s. Si se incrementa aún más el ángulo de inclinación θ, comienza el movimiento y el ángulo entre **R** y la normal decae al valor menor ϕ_k (figura 8.4*d*). La reacción **R** ya no es vertical y las fuerzas que actúan sobre el bloque están desequilibradas.

8.4. PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN FRICCIÓN SECA

En muchas aplicaciones de ingeniería se encuentran problemas que involucran fricción seca. Algunos tratan con situaciones simples como la del bloque que se desliza sobre un plano, que se describió en la sección anterior. Otros involucran situaciones más complicadas como en el problema resuelto 8.3; muchos tratan con la estabilidad de cuerpos rígidos en movimiento acelerado y serán estudiados en la parte de dinámica. Además, cierto número de máquinas y mecanismos comunes pueden analizarse aplicando las leyes de fricción seca. Éstos incluyen cuñas, tornillos, chumaceras, cojinetes de empuje y transmisiones de banda, los cuales serán estudiados en las secciones siguientes.

Los *métodos* que deben utilizarse para resolver problemas que involucran fricción seca son los mismos que se emplearon en los capítulos anteriores. Si un problema involucra sólo un movimiento de traslación, sin que sea posible una rotación, usualmente se puede tratar al cuerpo bajo consideración como si fuera una partícula y, por tanto, se pueden usar los métodos del capítulo 2. Si el problema involucra una posible rotación, el cuerpo se debe considerar como un cuerpo rígido y se pueden emplear los métodos del capítulo 4. Si la estructura que se estudia está hecha de varias partes, se debe utilizar el principio de acción y reacción como se hizo en el capítulo 6.

Si actúan más de tres fuerzas sobre el cuerpo bajo consideración (incluyendo las reacciones en las superficies de contacto), la reacción en cada superficie será representada por sus componentes **N** y **F** y el problema se resolverá con las ecuaciones de equilibrio. Si sólo actúan tres fuerzas sobre el cuerpo considerado, puede ser más conveniente representar cada reacción por medio de la fuerza única **R** y resolver el problema dibujando un triángulo de fuerzas.

La mayoría de los problemas que involucran la fricción pertenecen a uno de los siguientes *tres grupos*: en el *primer grupo* de problemas todas las fuerzas aplicadas están dadas y los coeficientes de fricción se conocen; en estos casos, se desea determinar si el cuerpo considerado permanecerá en reposo o se deslizará. La fuerza de fricción **F** *requerida para mantener el equilibrio* es desconocida (su mag-

nitud *no* es igual a $\mu_s N$) y debe determinarse, junto con la fuerza normal **N**, dibujando un diagrama de cuerpo libre y *resolviendo las ecuaciones de equilibrio* (figura 8.5*a*). Después, se compara el valor encontrado de la magnitud F de la fuerza de fricción con el valor máximo $F_m = \mu_s N$. Si F es menor o igual que F_m, el cuerpo permanecerá en reposo. Si el valor de F encontrado es mayor que F_m no se puede mantener el equilibrio y ocurre el movimiento; entonces, la magnitud real de la fuerza de fricción es $F_k = \mu_k N$.

En los problemas del *segundo grupo*, todas las fuerzas aplicadas están dadas y se sabe que el movimiento es inminente; se desea determinar el valor del coeficiente de fricción estática. Aquí, nuevamente se determina la fuerza de fricción y la fuerza normal dibujando un diagrama de cuerpo libre y resolviendo las ecuaciones de equilibrio (figura 8.5*b*). Como se sabe, el valor encontrado para F es el valor máximo F_m, se puede encontrar el coeficiente de fricción al escribir y resolver la ecuación $F_m = \mu_s N$.

En los problemas del *tercer grupo* se proporciona el coeficiente de fricción estática y se sabe que el movimiento en una dirección dada es inminente; se desea determinar la magnitud o la dirección de una de las fuerzas aplicadas. La fuerza de fricción se debe mostrar en el diagrama de cuerpo libre con un *sentido opuesto al del movimiento inminente* y con una magnitud $F_m = \mu_s N$ (figura 8.5*c*). Entonces se pueden escribir las ecuaciones de equilibrio y se puede determinar la fuerza deseada.

Como se señaló antes, cuando sólo están involucradas tres fuerzas puede ser más conveniente representar la reacción de la superficie por medio de una sola fuerza **R** y resolver el problema dibujando un triángulo de fuerzas. Una solución de este tipo se emplea en el problema resuelto 8.2.

Cuando dos cuerpos A y B están en contacto (figura 8.6*a*), las fuerzas de fricción ejercidas, respectivamente, por A sobre B y por B sobre A son iguales y opuestas (tercera ley de Newton). Al dibujar el diagrama de cuerpo libre correspondiente a uno de los cuerpos es importante incluir la fuerza de fricción apropiada con su sentido correcto. Por tanto, siempre se debe tener presente la siguiente regla: *el sentido de la fuerza de fricción que actúa sobre A es opuesta al sentido del movimiento (o al del movimiento inminente) de A visto desde B* (figura 8.6*b*).[†] El sentido de la fuerza de fricción que actúa sobre B se determina en forma similar (figura 8.6*c*). Observe que el movimiento de A visto desde B es un movimiento *relativo*. Por ejemplo, si el cuerpo A está fijo y el cuerpo B está en movimiento, el cuerpo A tendrá un movimiento relativo con respecto a B. Además, si tanto B como A se están moviendo hacia abajo pero B se mueve más rápido que A, se observará que, visto desde B, el cuerpo A se mueve hacia arriba.

[†] En este sentido, es *el mismo que el del movimiento de B visto desde A*.

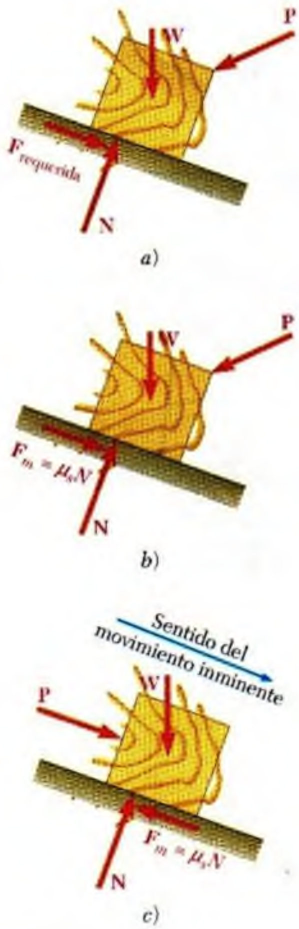


Figura 8.5

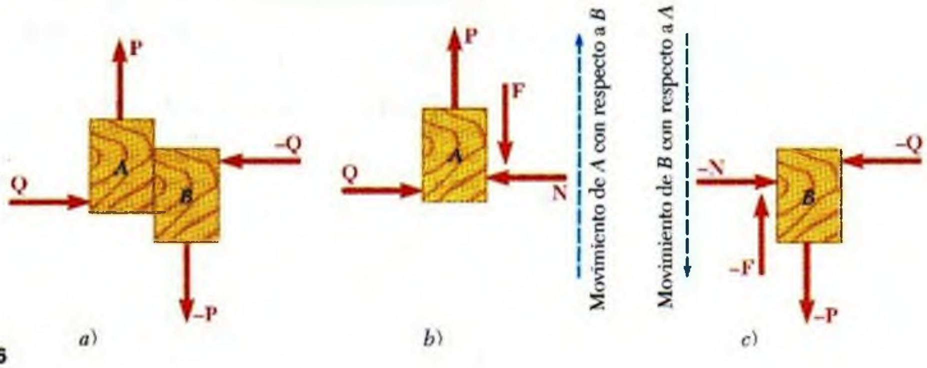
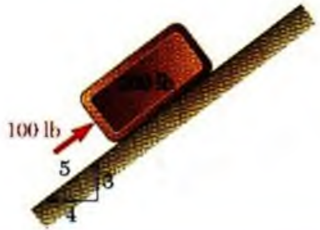
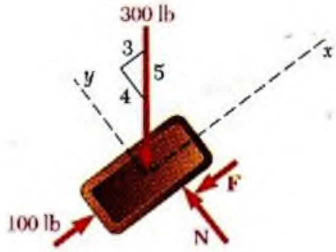


Figura 8.6



PROBLEMA RESUELTO 8.1

Como se muestra en la figura, una fuerza de 100 lb actúa sobre un bloque de 300 lb que está colocado sobre un plano inclinado. Los coeficientes de fricción entre el bloque y el plano son $\mu_s = 0.25$ y $\mu_k = 0.20$. Determine si el bloque está en equilibrio y encuentre el valor de la fuerza de fricción.



SOLUCIÓN

Fuerza requerida para mantener el equilibrio. Primero se determina el valor de la fuerza de fricción *requerida para mantener el equilibrio*. Si **F** está dirigida hacia abajo y hacia la izquierda, se dibuja el diagrama de cuerpo libre del bloque y se escribe

$+\nearrow\Sigma F_x = 0$: $\quad 100 \text{ lb} - \frac{3}{5}(300 \text{ lb}) - F = 0$

$F = -80 \text{ lb} \qquad \mathbf{F} = 80 \text{ lb} \nearrow$

$+\nwarrow\Sigma F_y = 0$: $\quad N - \frac{4}{5}(300 \text{ lb}) = 0$

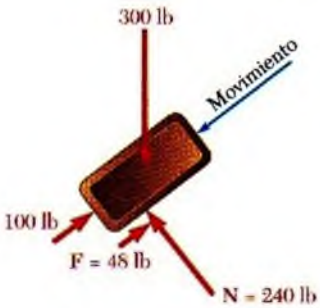
$N = +240 \text{ lb} \qquad \mathbf{N} = 240 \text{ lb} \nwarrow$

La fuerza **F** requerida para mantener el equilibrio es una fuerza de 80 lb dirigida hacia arriba y hacia la derecha; por tanto, el bloque tiende a moverse hacia abajo a lo largo del plano.

Fuerza máxima de fricción. La magnitud de la fuerza máxima de fricción que puede desarrollarse es

$$F_m = \mu_s N \qquad F_m = 0.25(240 \text{ lb}) = 60 \text{ lb}$$

Como el valor de la fuerza requerida para mantener el equilibrio (80 lb) es mayor que el valor máximo que se puede obtener (60 lb), no se mantendrá el equilibrio y *el bloque se deslizará hacia abajo a lo largo del plano.*



Valor real de la fuerza de fricción. La magnitud de la fuerza de fricción que realmente se tiene se determina de la siguiente forma:

$$F_{\text{real}} = F_k = \mu_k N$$
$$= 0.20(240 \text{ lb}) = 48 \text{ lb}$$

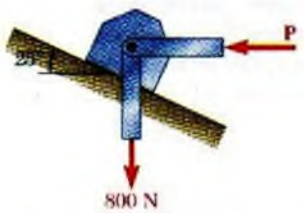
El sentido de esta fuerza es opuesto al sentido del movimiento; por tanto, la fuerza está dirigida hacia arriba y hacia la derecha:

$$\mathbf{F}_{\text{real}} = 48 \text{ lb} \nearrow \quad \blacktriangleleft$$

Es necesario señalar que las fuerzas que actúan sobre el bloque no están en equilibrio; la resultante de dichas fuerzas es

$$\tfrac{3}{5}(300 \text{ lb}) - 100 \text{ lb} - 48 \text{ lb} = 32 \text{ lb} \swarrow$$

PROBLEMA RESUELTO 8.2

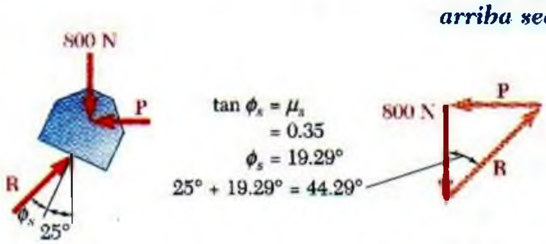


Dos fuerzas actúan sobre un bloque de apoyo como se muestra en la figura. Si se sabe que los coeficientes de fricción entre el bloque y el plano inclinado son $\mu_s = 0.35$ y $\mu_k = 0.25$, determine: *a*) la fuerza **P** que se requiere para hacer que el movimiento del bloque hacia arriba a lo largo del plano inclinado sea inminente, *b*) la fuerza de fricción cuando el bloque continúa moviéndose hacia arriba y *c*) la fuerza mínima **P** requerida para evitar que el bloque se deslice hacia abajo.

SOLUCIÓN

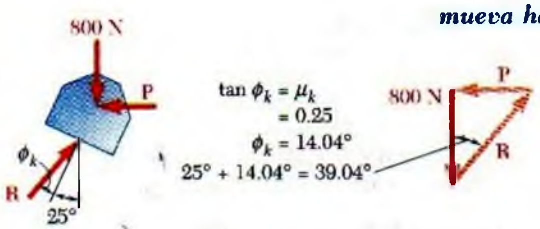
Diagrama de cuerpo libre. Para cada uno de los incisos se dibuja un diagrama de cuerpo libre del bloque y un triángulo de fuerzas que incluya la fuerza vertical de 800 N, la fuerza horizontal **P** y la fuerza **R** ejercida por el plano inclinado sobre el bloque. En cada uno de los casos considerados, se debe determinar la dirección de **R**. Es necesario señalar que como **P** es perpendicular a la fuerza de 800 N, el triángulo de fuerzas es un triángulo rectángulo, el cual puede resolverse de manera fácil para encontrar **P**. Sin embargo, en la mayoría de los problemas el triángulo de fuerzas será un triángulo oblicuo y deberá resolverse aplicando la ley de los senos.

***a*) Fuerza P requerida para que el movimiento del bloque hacia arriba sea inminente**



$P = (800\text{ N}) \tan 44.29°$ **P = 780 N←** ◄

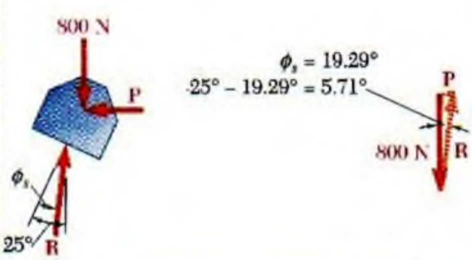
***b*) Fuerza de fricción F requerida para hacer que el bloque se mueva hacia arriba**



$R = (800\text{ N})/\cos 39.04° = 1\,029.9\text{ N}$

$F = R \text{ sen } \phi_k = (1\,029.9\text{ N}) \text{ sen } 14.04°$

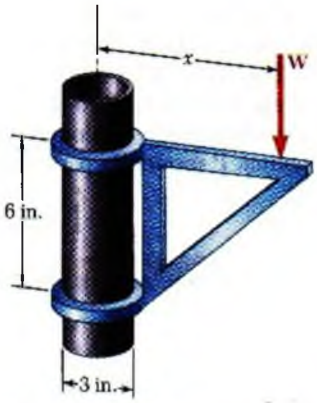
F = 250 N↘ ◄



***c*) Fuerza P requerida para que el bloque se deslice hacia abajo en forma inminente**

$P = (800\text{ N}) \tan 5.71°$ **P = 80.0 N←** ◄

PROBLEMA RESUELTO 8.3



La ménsula móvil que se muestra en la figura puede colocarse a cualquier altura a lo largo del tubo de 3 in. de diámetro. Si el coeficiente de fricción estática entre el tubo y la ménsula es de 0.25, determine la distancia mínima x a la cual se puede soportar la carga **W**, sin tomar en cuenta el peso de la ménsula.

SOLUCIÓN

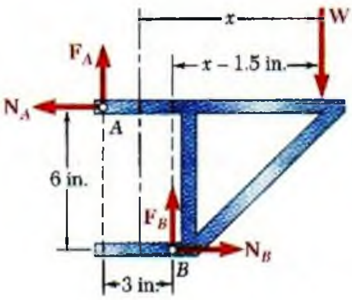


Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la ménsula. Cuando **W** se coloca a la distancia mínima x medida desde el eje del tubo, la ménsula está a punto de deslizarse y las fuerzas de fricción en A y B han alcanzado sus valores máximos:

$$F_A = \mu_s N_A = 0.25N_A$$
$$F_B = \mu_s N_B = 0.25N_B$$

Ecuaciones de equilibrio

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0$: $\quad N_B - N_A = 0$

$$N_B = N_A$$

$+\uparrow\Sigma F_y = 0$: $\quad F_A + F_B - W = 0$

$$0.25N_A + 0.25N_B = W$$

Así, como se ha encontrado que N_B es igual a N_A,

$$0.50N_A = W$$
$$N_A = 2W$$

$+\circlearrowleft\Sigma M_B = 0$: $\quad N_A(6 \text{ in.}) - F_A(3 \text{ in.}) - W(x - 1.5 \text{ in.}) = 0$

$$6N_A - 3(0.25N_A) - Wx + 1.5W = 0$$
$$6(2W) - 0.75(2W) - Wx + 1.5W = 0$$

Al dividir entre W todos los términos de la ecuación anterior y resolver para x,

$x = 12$ in. ◀

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se estudiaron y se aplicaron las *leyes de fricción seca*. Anteriormente, sólo se habían encontrado: *a*) superficies sin fricción que podían moverse libremente una con respecto a la otra y *b*) superficies rugosas que no permitían un movimiento relativo de una superficie con respecto a la otra.

A. ***Al resolver problemas que involucran fricción seca,*** se deben tomar en cuenta los siguientes puntos:

1. ***La reacción R ejercida por una superficie sobre un cuerpo libre*** se puede descomponer en una componente normal **N** y una componente tangencial **F**. La componente tangencial se conoce como la *fuerza de fricción*. Cuando un cuerpo está en contacto con una superficie fija, la dirección de la fuerza de fricción **F** es opuesta a la dirección del movimiento real o inminente del cuerpo.

a) No ocurrirá movimiento siempre y cuando F no exceda el valor máximo $F_m = \mu_s N$, donde μ_s es el *coeficiente de fricción estática*.

b) Ocurrirá movimiento si se requiere un valor de F mayor que F_m para mantener el equilibrio. A medida que ocurra el movimiento, el valor real de F disminuye a $F_k = \mu_k N$, donde μ_k es el *coeficiente de fricción cinética* [problema resuelto 8.1].

2. ***Cuando sólo están involucradas tres fuerzas*** es preferible un enfoque alternativo para el análisis de la fricción [problema resuelto 8.2]. La reacción **R** se define por medio de su magnitud R y del ángulo ϕ que se forma con la normal a la superficie. No ocurrirá movimiento siempre y cuando ϕ no exceda el valor máximo ϕ_s, donde $\tan \phi_s = \mu_s$. Ocurrirá movimiento si se requiere un valor ϕ mayor que ϕ_s para mantener el equilibrio y el valor real de ϕ disminuirá a ϕ_k, donde $\tan \phi_k = \mu_k$.

3. ***Cuando dos cuerpos están en contacto*** se debe determinar el sentido del movimiento real o relativo inminente en el punto de contacto. Sobre cada uno de los dos cuerpos se debe mostrar una fuerza de fricción **F** en una dirección opuesta a la dirección del movimiento real o inminente del cuerpo visto desde el otro cuerpo.

B. ***Métodos de solución.*** El primer paso para encontrar la solución consiste en *dibujar un diagrama de cuerpo libre* del cuerpo en consideración, descomponiendo la fuerza ejercida sobre cada una de las superficies donde existe fricción en una componente normal **N** y en una fuerza de fricción **F**. Si están involucrados varios cuerpos, se debe dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada uno de ellos representando y dirigiendo las fuerzas en cada superficie de contacto de la misma manera que se hizo cuando se analizaron armazones en el capítulo 6.

Los problemas que se deberán resolver en esta sección pueden pertenecer a una de las cinco categorías siguientes:

1. ***Todas las fuerzas aplicadas y los coeficientes de fricción son conocidos y se debe determinar si el equilibrio se mantiene o no.*** Obsérvese que en esta situación la fuerza de fricción es desconocida y no se puede suponer que es igual a $\mu_s N$.

a) Se deben escribir las ecuaciones de equilibrio para determinar N y F.

b) Se debe calcular la fuerza máxima de fricción permisible, $F_m = \mu_s N$. Si $F \leq F_m$ se mantiene el equilibrio. Si $F > F_m$, ocurre el movimiento y la magnitud de la fuerza de fricción es $F_k = \mu_k N$ [problema resuelto 8.1].

2. ***Todas las fuerzas aplicadas son conocidas y se debe encontrar el mínimo valor permisible de*** μ_s ***para el cual se mantiene el equilibrio.*** Se debe suponer que el movimiento es inminente y se debe determinar el valor correspondiente de μ_s.

a) Se deben escribir las ecuaciones de equilibrio para determinar N y F.

b) Como el movimiento es inminente, $F = F_m$. Se sustituyen los valores encontrados para N y F en la ecuación $F_m = \mu_s N$ y se resuelve para μ_s.

3. ***El movimiento del cuerpo es inminente y se conoce el valor de*** μ_s***; se debe encontrar alguna cantidad desconocida,*** como una distancia, un ángulo, la magnitud de una fuerza o la dirección de una fuerza.

a) Se debe suponer un posible movimiento del cuerpo y, en el diagrama de cuerpo libre, dibujar la fuerza de fricción en dirección opuesta a la dirección del movimiento supuesto.

b) Como el movimiento es inminente, $F = F_m = \mu_s N$. Si se sustituye μ_s por su valor conocido, se puede expresar F en términos de N en el diagrama de cuerpo libre, eliminándose de esta forma una incógnita.

c) Se deben escribir y resolver las ecuaciones de equilibrio para la incógnita que se está buscando [problema resuelto 8.3].

4. ***El sistema consiste de varios cuerpos y es posible más de un estado de movimiento inminente; se debe determinar una fuerza, una distancia o un coeficiente de fricción para el cual el movimiento es inminente.***

a) Se cuenta el número de incógnitas (fuerzas, ángulos, etc.) y el número total de ecuaciones de equilibrio independientes; la diferencia es igual al número de superficies en las cuales el movimiento puede ser inminente.

b) Se supone dónde es inminente el movimiento, y en los diagramas de cuerpo libre de los cuerpos en consideración, se dibujan las fuerzas de fricción en direcciones opuestas al movimiento supuesto.

c) En aquellas superficies donde se supuso que el movimiento era inminente, se establece $F = F_m = \mu_s N$.

d) Se escriben y se resuelven las ecuaciones de equilibrio para todas las incógnitas.

e) Se deben verificar las suposiciones calculando F y F_m *para las superficies donde se supuso que el movimiento no era inminente.* Si $F < F_m$, la suposición fue correcta; sin embargo, si $F > F_m$, la suposición fue incorrecta y entonces es necesario hacer una nueva suposición acerca del movimiento inminente y repetir el proceso de solución. Siempre se debe incluir un enunciado de la suposición hecha y de la verificación asociada.

5. ***El movimiento inminente del cuerpo puede ser de deslizamiento o de inclinación con respecto a un punto dado; se debe encontrar una fuerza, una distancia o un coeficiente de fricción.***

a) Se debe suponer un posible movimiento de deslizamiento del cuerpo y, en el diagrama de cuerpo libre, se debe dibujar la fuerza o fuerzas de fricción en una dirección opuesta a la del movimiento supuesto.

b) Se deben considerar en forma separada el deslizamiento y la inclinación inminentes.

i. Para el deslizamiento inminente, $F = F_m = \mu_s N$. Se escriben las ecuaciones de equilibrio y se resuelven para las incógnitas requeridas.

ii. Para la inclinación inminente se supone que las reacciones externas, excepto las reacciones en el punto para el cual se supuso que la inclinación era inminente, se reducen a cero en todos los apoyos. Para este caso, observe que $F \neq F_m$ y que la incógnita requerida se determina a partir de las ecuaciones de equilibrio.

Los problemas de esta sección requieren de un análisis cuidadoso, aquí se encuentran algunos de los problemas más difíciles en el curso de estática. Siempre se deben dibujar con cuidado los diagramas de cuerpo libre, prestando atención especial a las direcciones de las fuerzas de fricción. Cuando sea necesario suponer la dirección de la fuerza de fricción, una respuesta positiva implicará una suposición correcta, mientras que un resultado negativo implicará que la fuerza de fricción está dirigida en el sentido opuesto a la dirección supuesta. También es necesario considerar que las soluciones de algunos problemas se simplifican ya sea con las propiedades de los cuerpos sometidos a la acción de tres fuerzas [sección 4.7] o la geometría del sistema (por ejemplo el problema 8.23).

Problemas

8.1 Si $W_A = 25$ lb y $\theta = 30°$, determine *a*) el valor mínimo de W_B para que el sistema esté en equilibrio, *b*) el valor máximo de W_B para que el sistema esté en equilibrio.

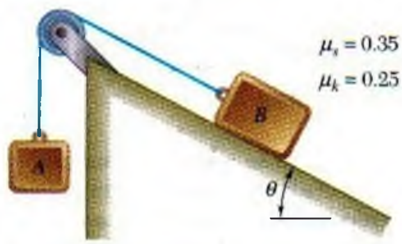


Figura P8.1 y *P8.2*

8.2 Si $W_A = 40$ lb, $W_B = 52$ lb y $\theta = 25°$, determine *a*) si el sistema está en equilibrio, *b*) la magnitud y dirección de la fuerza de fricción.

8.3 Determine si el bloque de 10 kg mostrado en la figura está en equilibrio, y encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza de fricción cuando $P = 40$ N y $\theta = 20°$.

8.4 Determine si el bloque de 10 kg mostrado en la figura está en equilibrio, y encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza de fricción cuando $P = 62.5$ N y $\theta = 15°$.

8.5 Si $\theta = 25°$, determine el rango de valores de P para los cuales se mantiene el equilibrio.

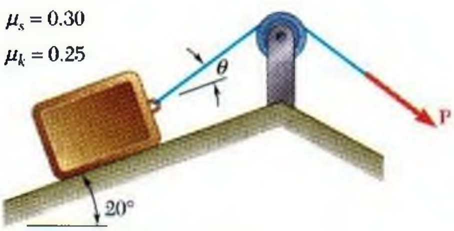


Figura P8.3, P8.4 y P8.5

8.6 Si el coeficiente de fricción estática entre el bloque de 20 kg y el plano inclinado es de 0.30, determine el valor mínimo de θ para el cual el bloque se mantiene en equilibrio.

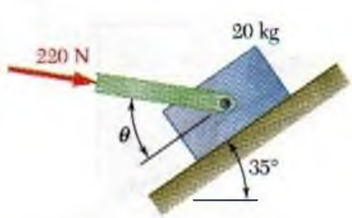


Figura P8.6

8.7 Sin tomar en cuenta la masa del bloque, y sabiendo que el coeficiente de fricción estática entre el bloque y el plano inclinado es de 0.35, determine *a*) el valor mínimo de P para el cual el bloque se mantiene en equilibrio, *b*) el valor correspondiente de β.

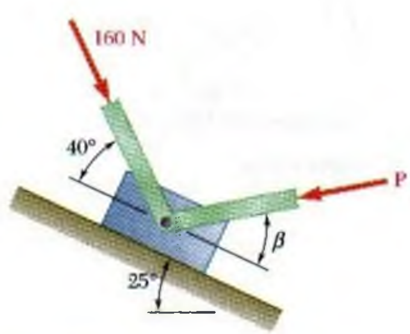


Figura P8.7

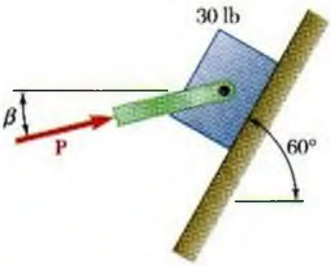


Figura *P8.8*

8.8 Si el coeficiente de fricción estática entre el bloque de 30 lb y el plano inclinado que se muestran en la figura es $\mu_s = 0.25$, determine *a*) el valor mínimo de *P* necesario para mantener al bloque en equilibrio, *b*) el valor correspondiente de β.

8.9 Un bloque de 15 lb está en reposo como indica la figura. Determine el rango positivo de valores de θ para los cuales el bloque se mantiene en equilibrio si *a*) θ es menor a 90°, *b*) θ tiene un valor entre 90 y 180°.

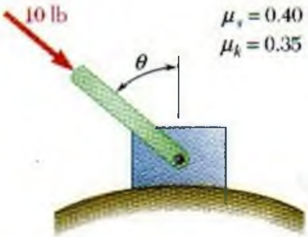


Figura P8.9

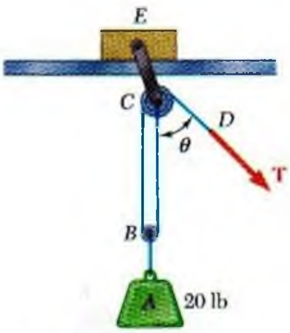


Figura *P8.10*

8.10 El bloque *A* de 20 lb se sostiene de un cable como indica la figura. La polea *C* está conectada por medio de un pequeño eslabón al bloque *E*, el cual está en reposo sobre un riel horizontal. Si el coeficiente de fricción estática entre el bloque *A* y el riel es de 0.35, y sin tomar en cuenta el peso del bloque *E* y la fricción en las poleas, determine el valor máximo permisible de θ si el sistema debe mantenerse en equilibrio.

***8.11* y 8.12** Los coeficientes de fricción entre todas las superficies de contacto son $\mu_s = 0.40$ y $\mu_k = 0.30$. Determine la fuerza **P** requerida para que el bloque de 30 kg comience a moverse si el cable *AB*, *a*) se une como indica la figura, *b*) se retira.

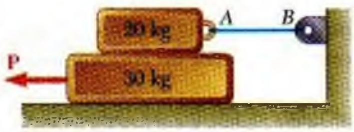


Figura *P8.11*

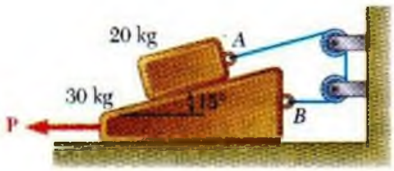


Figura P8.12

8.13 El bloque *A* de 16 lb está unido al eslabón *AC* y descansa sobre el bloque *B* de 24 lb. Si el coeficiente de fricción estática entre todas las superficies de contacto es de 0.20, y sin tomar en cuenta el peso del eslabón, determine el valor de θ para el cual el movimiento del bloque *B* es inminente.

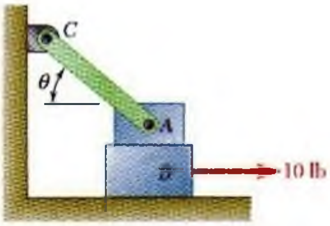


Figura P8.13

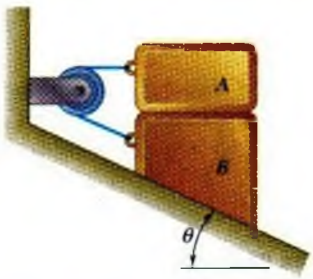


Figura P8.14

8.14 El bloque *A* de 20 lb y el bloque *B* de 40 lb están en reposo sobre un plano inclinado como se muestra en la figura. Si el coeficiente de fricción estática entre todas las superficies de contacto es de 0.25, determine el valor de θ requerido para que se inicie el movimiento.

8.15 Un cajón de embalaje de 40 kg de masa debe ser recorrido sobre el piso hacia la izquierda sin ladearse. Si el coeficiente de fricción estática entre el cajón y el piso es de 0.35, determine *a*) el valor máximo permisible de α, *b*) la magnitud correspondiente de la fuerza **P**.

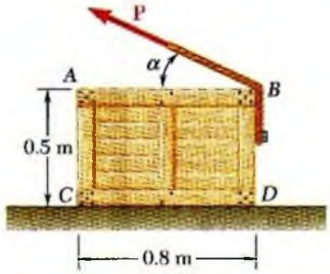


Figura P8.15 y *P8.16*

8.16 Un cajón de embalaje de 40 kg de masa se jala por medio de una cuerda, como indica la figura. El coeficiente de fricción estática entre el cajón y el piso es de 0.35. Si $\alpha = 40°$, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P** requerida para que dé inicio el movimiento del cajón, *b*) si con dicho movimiento el cajón se ladea o se desliza.

8.17 En la figura se muestra un cilindro de peso W y radio r. Exprese en términos de W y r la magnitud del par máximo **M** que puede aplicarse al cilindro sin que éste rote. Suponga que el coeficiente de fricción estática es de *a*) cero en A y 0.36 en B, *b*) 0.30 en A y 0.36 en B.



Figura P8.17

8.18 Un par con magnitud de 50 lb · ft se aplica sobre el tambor como indica la figura. Determine la fuerza mínima que debe ejercer el cilindro hidráulico para que el tambor no rote cuando el par aplicado se dirige *a*) en el mismo sentido que las manecillas del reloj, *b*) en sentido opuesto al de las manecillas del reloj.

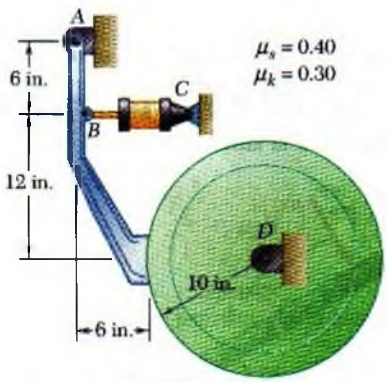


Figura P8.18 y *P8.19*

8.19 El cilindro hidráulico mostrado en la figura ejerce una fuerza de 600 lb dirigida hacia la derecha sobre el punto B. Determine el momento de la fuerza de fricción respecto al ángulo del tambor cuando éste gira *a*) en el mismo sentido que las manecillas del reloj, *b*) en sentido opuesto al de las manecillas del reloj.

***8.20** Una cuerda está parcialmente unida alrededor de un cilindro de peso W y radio r que reposa sobre un plano inclinado, como indica la figura. Si el coeficiente de fricción estática entre el cilindro y el plano inclinado es de 0.35, encuentre *a*) el valor mínimo permisible de θ si el cilindro debe permanecer en equilibrio, *b*) el valor correspondiente de la tensión en la cuerda.

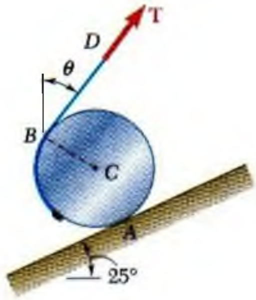


Figura P8.20

8.21 y *8.22* Una escalera AB de 6.5 m de longitud se apoya sobre la pared mostrada en la figura. Si el coeficiente de fricción estática μ_s es el mismo en ambas superficies de contacto, determine el valor mínimo de μ_s para que la escalera se mantenga en equilibrio.

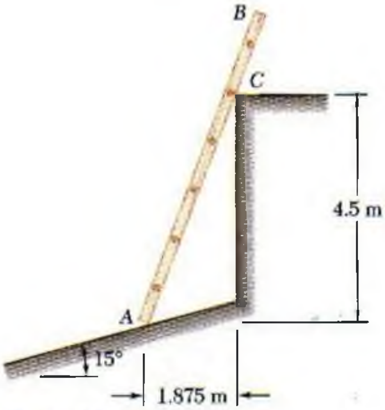


Figura P8.21

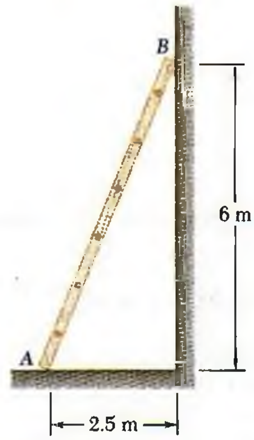


Figura *P8.22*

8.23 El extremo A de la barra ligera y uniforme de longitud L y peso W mostrado en la figura se apoya sobre una superficie horizontal, mientras que su extremo B está sostenido mediante la cuerda BC de longitud L. Si el coeficiente de fricción estática es de 0.40, determine *a*) el valor de θ requerido para que se inicie el movimiento, *b*) el valor correspondiente de la tensión en la cuerda.

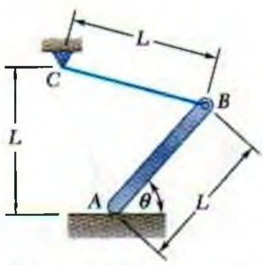


Figura P8.23

8.24 En la figura se muestra una barra delgada de longitud L colocada entre la clavija C y la pared vertical, la cual sostiene una carga **P** en su extremo A. Si $\theta = 35°$ y el coeficiente de fricción estática es de 0.20 en B y C, determine el rango de valores de la relación L/a para los cuales se mantiene el equilibrio.

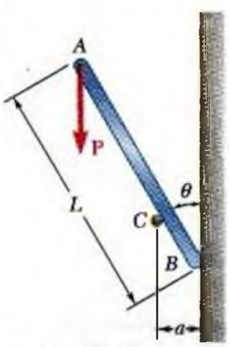


Figura P8.24

8.25 La guillotina que muestra la figura se usa para cortar láminas para tarjetas de circuitos electrónicos. Si el coeficiente de fricción cinética entre la cuchilla y la guía vertical es de 0.20, determine la fuerza que ejerce el borde E de la cuchilla sobre la lámina.

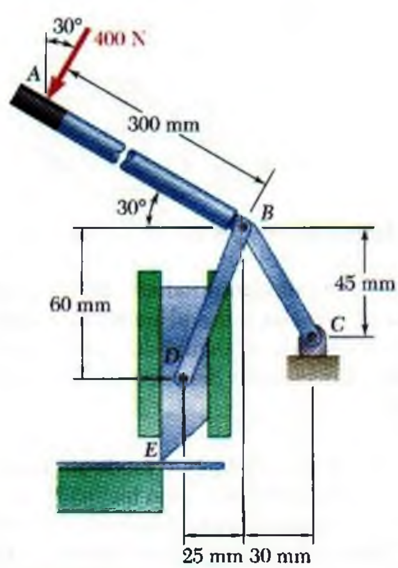


Figura P8.25

8.26 Las componentes básicas de un dispositivo de sujeción son la barra AB, la placa de fijación CD y la palanca EFG; las dimensiones de la ranura situada en CD son ligeramente más grandes que las de la sección transversal de AB. Para asegurar la abrazadera, se empuja AB contra la pieza de trabajo, y entonces se aplica la fuerza **P**. Si $P = 40$ lb e ignorando la fuerza de fricción entre la palanca y la placa, determine el mínimo valor permisible del coeficiente de fricción estática entre la barra y la placa.

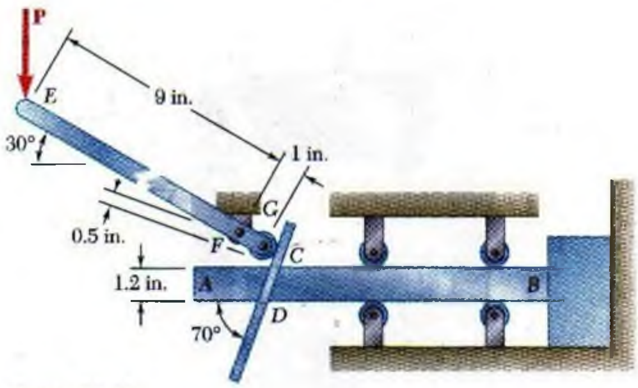


Figura P8.26

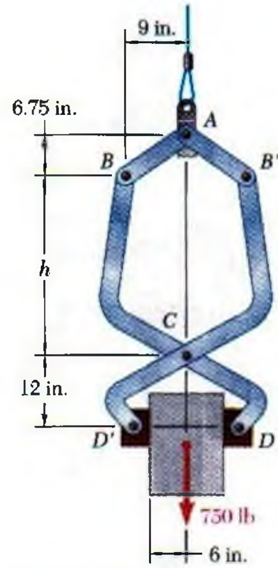


Figura P8.27

8.27 Las tenazas de fricción que se muestran en la figura se usan para levantar una pieza fundida de 750 lb. Si $h = 36$ in., determine el valor mínimo permisible del coeficiente de fricción estática entre la pieza fundida y los bloques D y D'.

8.28 La abrazadera que se muestra en la figura es usada para levantar una placa de acero H con peso de 550 lb. Si la fuerza normal ejercida sobre la leva de acero EG por el perno D forma un ángulo de 40° con la horizontal, y sin tomar en cuenta la fuerza de fricción entre la leva y el perno, determine el valor mínimo permisible del coeficiente de fricción estática entre la leva y la placa.

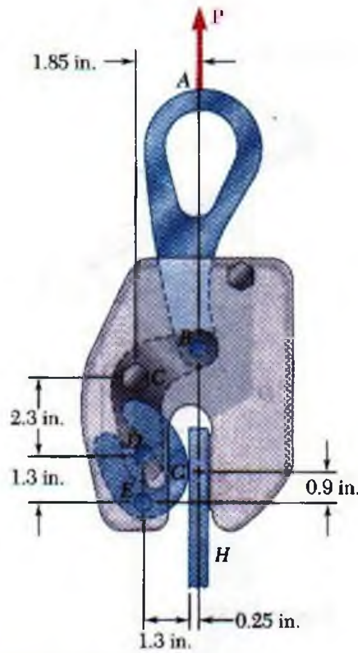


Figura P8.28

8.29 Un niño que tiene masa de 18 kg está sentado en el punto medio de los extremos de una mesa pequeña de 16 kg, como indica la figura. El coeficiente de fricción estática es de 0.20 entre los extremos de la mesa y el piso. Si un segundo niño empuja sobre el borde B de la parte alta de la mesa, en un punto directamente opuesto al primer niño, con una fuerza **P** perteneciente a un plano vertical paralelo a los extremos de la tabla y que tiene una magnitud de 66 N, determine el rango de valores de θ para los cuales la mesa a) se volcará, b) resbalará.

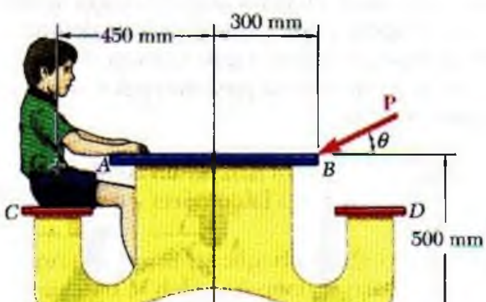


Figura *P8.29*

***8.30** El mecanismo de tenazas de elevación que muestra la figura consiste en uniones de cuatro barras y se utiliza para levantar una componente de máquina de 40 kg. Si $L_{AB} = 36$ mm, determine el valor mínimo permisible del coeficiente de fricción estática entre la componente y las almohadillas de agarre cuando *a*) $\alpha = 0$, *b*) $\alpha = 30°$. (*Sugerencia*: Suponga que las líneas trazadas entre las pinzas *A*, *C*, *G* e *I* son verticales para todos los valores de α.)

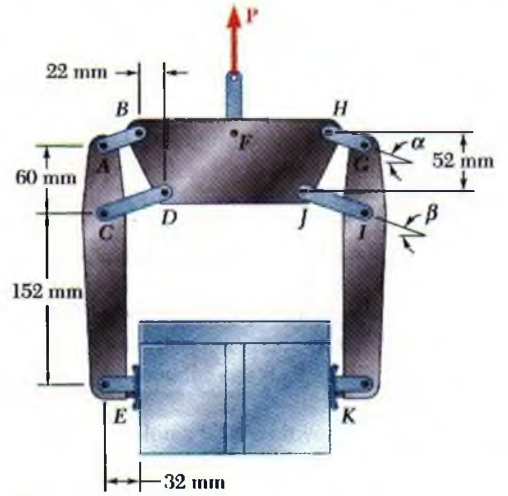


Figura P8.30



Figura *P8.31*

8.31 La figura muestra un tubo de 60 mm de diámetro que se aprieta mediante una llave Stillson. Los segmentos *AB* y *DE* de la llave están unidos rígidamente entre sí, y el segmento *CF* está conectado mediante un perno situado en *D*. Si la llave debe quedar autobloqueada al apretar el tubo, determine el coeficiente de fricción mínimo requerido en *A* y *C*.

8.32 Un panel de metal ligero se fija a dos mangas cortas cuyo diámetro interior mide 1 in., las mangas pueden deslizarse sobre la barra horizontal como indica la figura. Los coeficientes de fricción entre las mangas y la barra son de $\mu_s = 0.40$ y $\mu_k = 0.30$. Se utiliza una cuerda sujeta a la esquina *C* para mover el panel a lo largo de la barra. Si la cuerda se encuentra en el mismo plano vertical que el panel, determine el rango de valores de θ para los cuales el panel podrá iniciar el movimiento hacia la derecha.

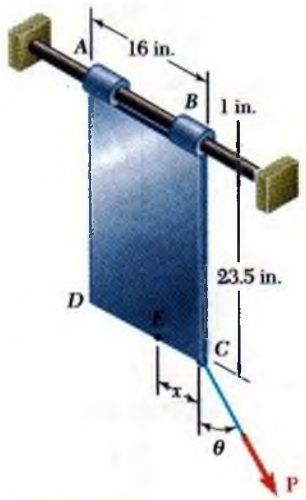


Figura P8.32

8.33 *a*) En el problema 8.32, suponga que la cuerda está sujeta al punto *E* a una distancia $x = 4$ in. de la esquina *C*. *b*) Determine el valor máximo de *x* para el cual el panel puede moverse hacia la derecha.

8.34 y 8.35 Un collarín *B*, de masa *m* y unido al resorte *AB*, puede moverse libremente a lo largo de la barra que muestra la figura. La constante del resorte es de 1.5 kN/m y éste se encuentra sin deformar cuando $\theta = 0$. Si el coeficiente de fricción estática entre la barra y el collarín es de 0.40, determine el rango de valores de *m* para los cuales el sistema se mantiene en equilibrio cuando $\theta = 30°$.

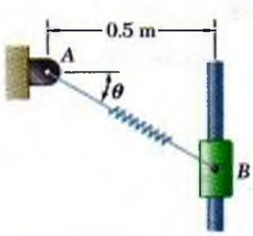


Figura P8.34

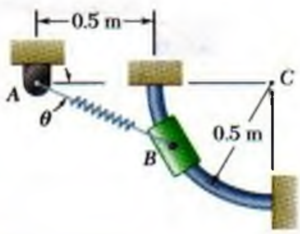


Figura P8.35

8.36 Si el coeficiente de fricción estática entre el collarín C y la barra horizontal se denota por medio de μ_s, determine la magnitud máxima del par **M** para el cual se mantiene el equilibrio. Explique lo que sucede si $\mu_s \geq \tan \theta$.

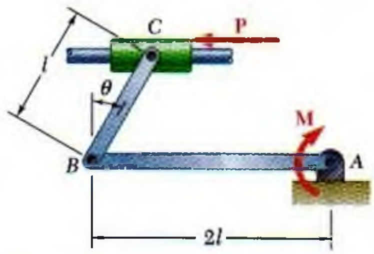


Figura P8.36

8.37 La barra AB reposa sobre las dos superficies en forma de cuarto de círculo que muestra la figura. Una fuerza **P** se aplica en el punto C, el cual está ubicado a una distancia a del extremo A. Sin tomar en cuenta el peso de la barra, y sabiendo que el coeficiente de fricción estática entre la barra y cada una de las superficies es de 0.35, determine el valor mínimo de la razón a/L para el cual la barra se mantiene en equilibrio.

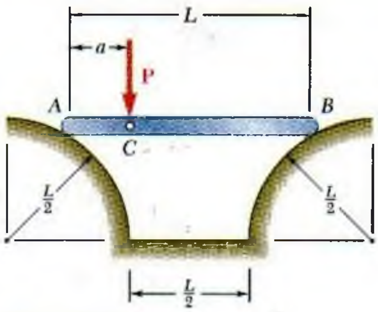


Figura P8.37

8.38 El bloque A de 9 lb y el bloque B de 6 lb están conectados por medio de una barra delgada de masa insignificante. Si el coeficiente de fricción estática es de 0.40 entre todas las superficies de contacto, y si para la posición mostrada en la figura la barra permanece horizontal, determine el rango de valores de P para los cuales se mantiene el equilibrio.

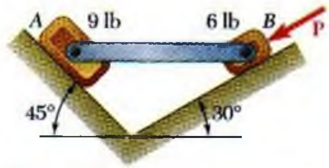


Figura *P8.38*

8.39 En la figura se muestran dos barras conectadas en el punto B por medio de un collarín. Un par $\mathbf{M}_A$ con magnitud de 12 lb · ft se aplica sobre la barra AB. Si $\mu_s = 0.30$ entre el collarín y la barra AB, determine el par máximo $\mathbf{M}_C$ para el cual se mantiene el equilibrio.

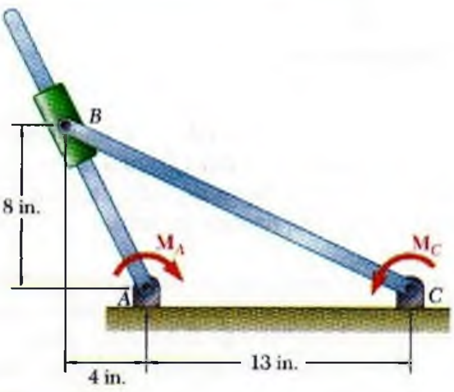


Figura *P8.39*

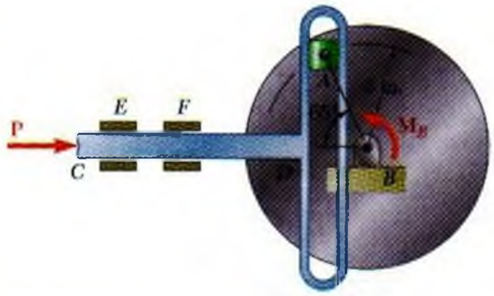


Figura P8.40

8.40 La guía A está atornillada al volante B en la ranura de horqueta CD. Sin tomar en cuenta la fricción en los cojinetes E y F y sabiendo que $P = 8$ lb y $\mu_s = 0.25$ entre la guía y la horqueta, determine *a*) el par máximo $\mathbf{M}_B$ para el cual se mantiene el equilibrio, *b*) el par mínimo $\mathbf{M}_B$ para el cual se mantiene el equilibrio.

8.41 La barra delgada AB de 12 lb está atornillada en A y descansa sobre el cilindro C de 36 lb. Si el diámetro del cilindro es de 12.5 in., y el coeficiente de fricción estática entre todas las superficies de contacto es de 0.35, determine la magnitud máxima de la fuerza **P** para la cual se mantiene el equilibrio.

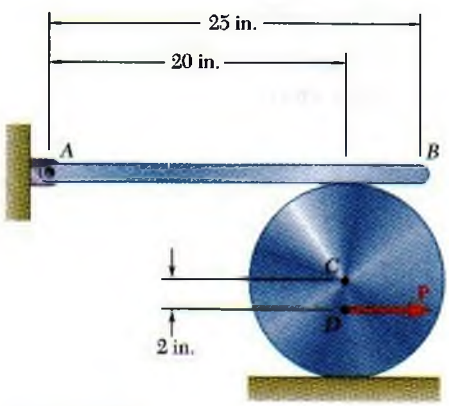


Figura P8.41

8.42 Las masas de los bloques A y C son de 2.4 y 6 kg, respectivamente. Si $\mu_s = 0.50$ entre el bloque A y el plano inclinado y $\mu_s = 0.30$ entre el bloque C y la superficie horizontal, determine *a*) el valor mínimo de la masa del bloque B para el cual los bloques se mantienen en equilibrio, *b*) el valor máximo de la masa del bloque B para el cual los bloques se mantienen en equilibrio.



Figura P8.42

8.43 Los bloques A, B y C que tienen los pesos mostrados en la figura, permanecen en reposo sobre un plano inclinado. Si el coeficiente de fricción estática entre todas las superficies de contacto se denota mediante μ_s, determine el valor mínimo de μ_s para el cual se mantiene el equilibrio.

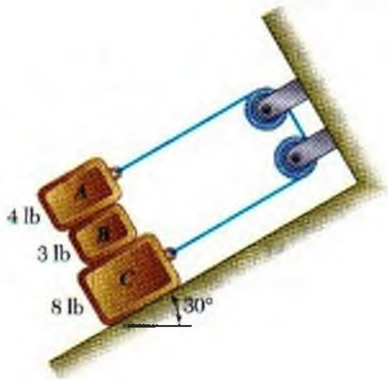


Figura P8.43

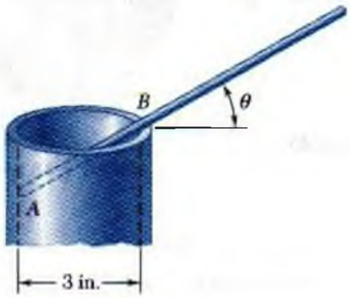


Figura ***P8.44***

8.44 Una barra delgada de acero de 9 in. de longitud se coloca dentro de un tubo en la forma indicada por la figura. Si el coeficiente de fricción estática entre la barra y el tubo es de 0.20, determine el valor máximo de θ para el cual la barra no cae dentro del tubo.

8.45 En la figura se muestran dos barras delgadas de peso insignificante unidas mediante un perno colocado en A y conectadas a los bloques B de 18 lb y C de 80 lb. Si el coeficiente de fricción estática es de 0.55 entre todas las superficies de contacto, determine el rango de valores de P para el cual se mantiene el equilibrio.

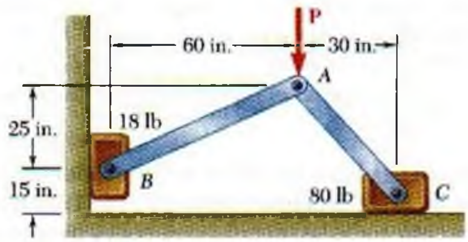


Figura P8.45

8.5. CUÑAS

Las cuñas son máquinas simples que se utilizan para levantar grandes bloques de piedra y otras cargas pesadas. Estas cargas se pueden levantar aplicándole a la cuña una fuerza que es menor que el peso de la carga. Además, debido a la fricción entre las superficies en contacto, una cuña con una forma apropiada permanecerá en su lugar después que ha sido forzada bajo la carga. Por tanto, las cuñas se pueden utilizar para hacer pequeños ajustes en la posición de piezas pesadas de maquinaria.

Considere el bloque A mostrado en la figura 8.7*a*. Dicho bloque descansa sobre una pared vertical B y debe levantarse un poco forzando una cuña C entre el bloque A y una segunda cuña D. Se desea encontrar el valor mínimo de la fuerza $\mathbf{P}$ que debe aplicarse a la cuña C para mover el bloque. Se supondrá que el peso $\mathbf{W}$ del bloque es conocido, ya sea en libras o determinado en newtons a partir de la masa del bloque expresada en kilogramos.

Los diagramas de cuerpo libre del bloque A y de la cuña C se han dibujado en la figura 8.7*b* y *c*. Las fuerzas que actúan sobre el bloque incluyen su peso y las fuerzas normal y de fricción en las superficies de contacto con la pared B y con la cuña C. Las magnitudes de las fuerzas de fricción $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ son iguales, respectivamente, a $\mu_s N_1$ y $\mu_s N_2$ puesto que debe iniciarse el movimiento del bloque. Es importante mostrar las fuerzas de fricción con su sentido correcto. Puesto que el bloque se moverá hacia arriba, la fuerza $\mathbf{F}_1$ ejercida por la pared sobre el bloque debe estar dirigida hacia abajo. Por otra parte, como la cuña C se mueve hacia la derecha, el movimiento relativo de A con respecto a C es hacia la izquierda y la fuerza $\mathbf{F}_2$ ejercida por C sobre A debe estar dirigida hacia la derecha.

Ahora, considerando al cuerpo libre C en la figura 8.7*c*, se observa que las fuerzas que actúan sobre C incluyen la fuerza aplicada $\mathbf{P}$ y a las fuerzas normales y de fricción en las superficies de contacto con A y con D. El peso de la cuña es pequeño en comparación con las otras fuerzas que están involucradas y, por tanto, puede no tomarse en cuenta. Las fuerzas ejercidas por A sobre C son iguales y opuestas a las fuerzas $\mathbf{N}_2$ y $\mathbf{F}_2$ ejercidas por C sobre A y se representan, respectivamente, por $-\mathbf{N}_2$ y $-\mathbf{F}_2$; por tanto, la fuerza de fricción $-\mathbf{F}_2$ debe estar dirigida hacia la izquierda. Se puede comprobar que la fuerza $\mathbf{F}_3$ ejercida por D también está dirigida hacia la izquierda.

El número total de incógnitas involucradas en los dos diagramas del cuerpo libre pueden reducirse a cuatro si las fuerzas de fricción se expresan en términos de las fuerzas normales. Expresar que el bloque A y la cuña C están en equilibrio proporcionará cuatro ecuaciones que pueden resolverse para obtener la magnitud de $\mathbf{P}$. Se debe señalar que en este ejemplo es más conveniente reemplazar cada par de fuerzas normal y de fricción por su resultante. Entonces, cada cuerpo libre está sometido a tres fuerzas y el problema se puede resolver dibujando los triángulos de fuerzas correspondientes (véase problema resuelto 8.4).

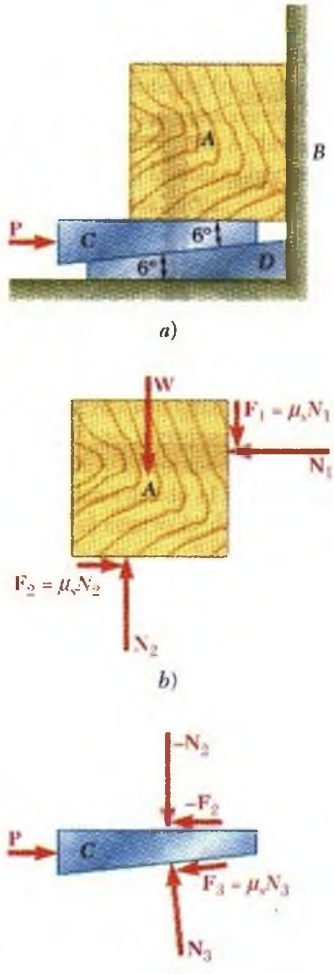


Figura 8.7



Fotografía 8.2 Como se muestra en la fotografía, las cuñas se emplean para partir troncos de árbol porque las fuerzas normales ejercidas por las cuñas sobre la madera son mucho más grandes que las fuerzas requeridas para insertarlas en el tronco.

8.6. TORNILLOS DE ROSCA CUADRADA

Los tornillos de rosca cuadrada se utilizan en gatos, prensas y otros mecanismos. Su estudio es similar al análisis de un bloque que se desliza a lo largo de un plano inclinado.

En el gato mostrado en la figura 8.8 el tornillo soporta una carga $\mathbf{W}$ y está apoyado en la base del gato. El contacto entre el tornillo y la base ocu-

rre a lo largo de una porción de sus roscas. Si se aplica una fuerza **P** sobre el mango, se puede hacer que el tornillo gire y levante a la carga **W**.

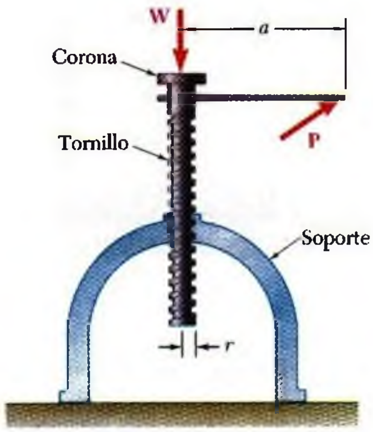
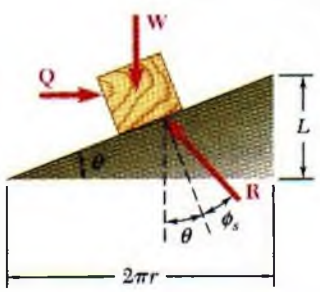


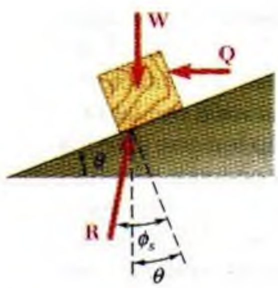
Figura 8.8

La rosca de la base ha sido desenvuelta y se muestra como una línea recta en la figura 8.9*a*. La pendiente correcta de la línea recta se obtuvo al representar de manera horizontal el producto $2\pi r$, donde r es el radio promedio de la rosca y verticalmente el *avance* L del tornillo, esto es, la distancia a través de la cual avanza el tornillo en una vuelta. El ángulo θ que esta línea forma con la horizontal es el *ángulo de avance*. Como la fuerza de fricción entre dos superficies en contacto no depende del área de contacto, se puede suponer que el área de contacto entre las dos roscas es menor que su valor real y, por tanto, puede representarse al tornillo por medio del bloque que se muestra en la figura 8.9*a*. Sin embargo, es necesario señalar que en este análisis del gato no se toma en cuenta la fricción entre la corona y el tornillo.

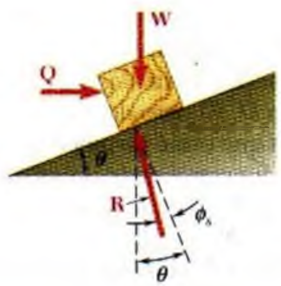
El diagrama de cuerpo libre del bloque debe incluir la carga **W**, la reacción **R** de la rosca de la base y la fuerza horizontal **Q** que tiene el mismo efecto que la fuerza **P** ejercida sobre el mango. La fuerza **Q** debe tener el mismo momento que **P** alrededor del eje del tornillo y, por tanto, su magnitud debe ser $Q = Pa/r$. De esta forma, se puede obtener la fuerza **Q** y, por consiguiente, la fuerza **P** requerida para levantar a la carga **W**, a partir del diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 8.9*a*. El ángulo de fricción se toma igual a ϕ_s puesto que se presume que la carga será levantada a través de una serie de golpes pequeños sucesivos. En los mecanismos que proporcionan una rotación continua de un tornillo, puede ser deseable distinguir entre la fuerza requerida para comenzar el movimiento (utilice ϕ_s) y la fuerza requerida para mantener el movimiento (utilice ϕ_s).



a) Movimiento inminente hacia arriba



b) Movimiento inminente hacia abajo con $\phi_s > \theta$



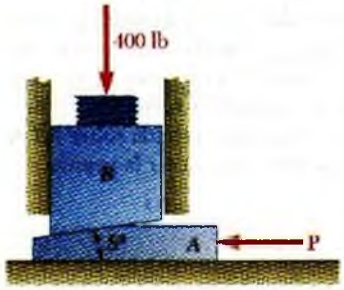
c) Movimiento inminente hacia abajo con $\phi_s < \theta$

Figura 8.9 Análisis de un tornillo como un bloque y un plano inclinado.

Si el ángulo de fricción ϕ_s es mayor que el ángulo de avance θ, se dice que el tornillo es *autobloqueante*; el tornillo permanecerá en su lugar bajo la acción de la carga. Entonces, para bajar la carga, se debe aplicar la fuerza mostrada en la figura 8.9*b*. Si ϕ_s es menor que θ, el tornillo descenderá bajo la acción de la carga; entonces es necesario aplicar la fuerza mostrada en la figura 8.9*c* para mantener el equilibrio.

El avance de un tornillo no se debe confundir con su *paso*. El avance se definió como la distancia a través de la cual avanza el tornillo en una vuelta; el paso es la distancia medida entre dos roscas consecutivas. A pesar de que el avance y el paso son iguales en el caso de tornillos de *rosca simple*, serán diferentes en el caso de tornillos de *rosca múltiple*, esto es, tornillos que tienen varias roscas independientes. Se puede comprobar fácilmente que para tornillos de rosca doble el avance es el doble del paso; para tornillos de rosca triple, el avance es el triple del paso y así de manera sucesiva.

PROBLEMA RESUELTO 8.4

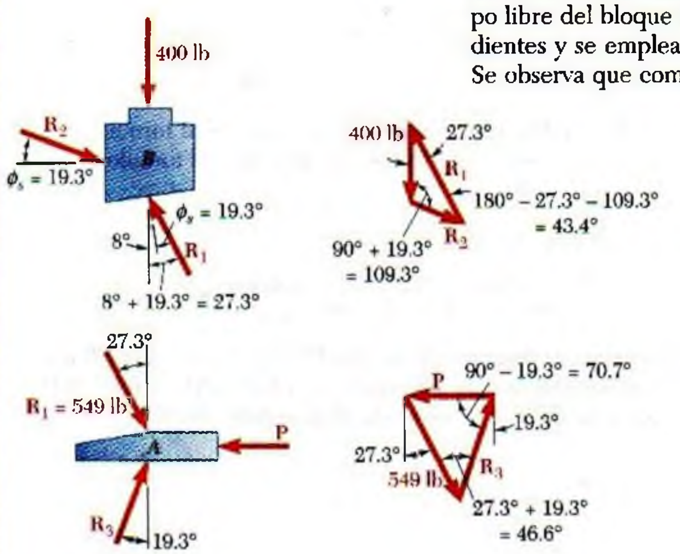


La posición del bloque B de una máquina se ajusta moviendo la cuña A. Si el coeficiente de fricción estática entre todas las superficies de contacto es 0.35, determine la fuerza **P** requerida para *a*) levantar al bloque B y *b*) bajar al bloque B.

SOLUCIÓN

Para cada uno de los incisos del problema se dibujan los diagramas de cuerpo libre del bloque B y de la cuña A con los triángulos de fuerza correspondientes y se emplea la ley de los senos para encontrar las fuerzas deseadas. Se observa que como $\mu_s = 0.35$, el ángulo de fricción es

$$\phi_s = \tan^{-1} 0.35 = 19.3°$$



a) Fuerza P requerida para levantar el bloque

Diagrama de cuerpo libre: Bloque B

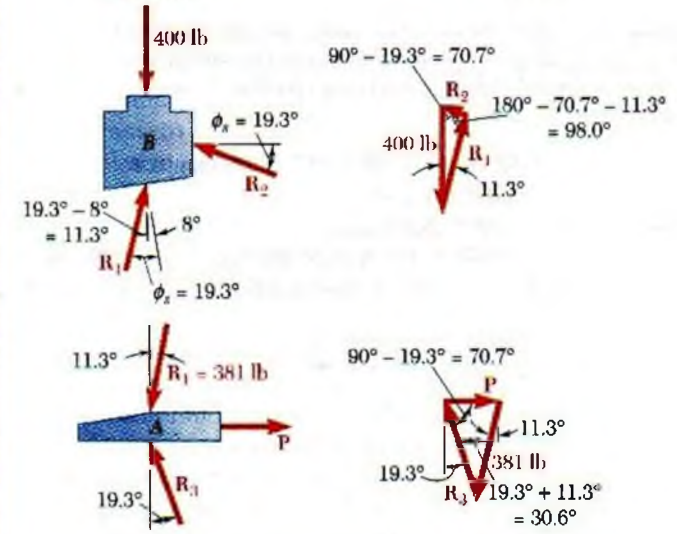
$$\frac{R_1}{\text{sen } 109.3°} = \frac{400 \text{ lb}}{\text{sen } 43.4°}$$

$$R_1 = 549 \text{ lb}$$

Diagrama de cuerpo libre: Cuña A

$$\frac{P}{\text{sen } 46.6°} = \frac{549 \text{ lb}}{\text{sen } 70.7°}$$

$$P = 423 \text{ lb} \qquad \mathbf{P} = 423 \text{ lb} \leftarrow$$ ◀



b) Fuerza P requerida para bajar el bloque

Diagrama de cuerpo libre: Bloque B

$$\frac{R_1}{\text{sen } 70.7°} = \frac{400 \text{ lb}}{\text{sen } 98.0°}$$

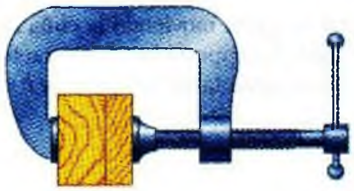
$$R_1 = 381 \text{ lb}$$

Diagrama de cuerpo libre: Cuña A

$$\frac{P}{\text{sen } 30.6°} = \frac{381 \text{ lb}}{\text{sen } 70.7°}$$

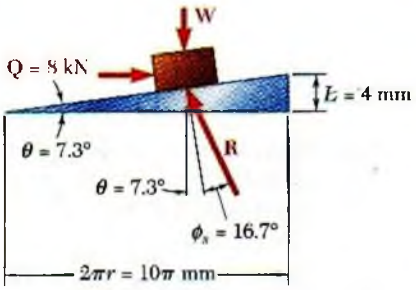
$$P = 206 \text{ lb} \qquad \mathbf{P} = 206 \text{ lb} \rightarrow$$ ◀

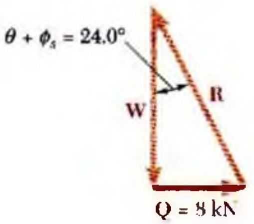
PROBLEMA RESUELTO 8.5



Una prensa se utiliza para mantener juntas dos piezas de madera, como se muestra en la figura. La prensa tiene una rosca cuadrada doble cuyo diámetro medio es igual a 10 mm y cuyo paso es de 2 mm. El coeficiente de fricción entre las roscas es $\mu_s = 0.30$. Si se aplica un momento torsional máximo de 40 N · m al apretar la prensa, determine: *a*) la fuerza ejercida sobre las piezas de madera y *b*) el momento torsional requerido para aflojar la prensa.

SOLUCIÓN





a) Fuerza ejercida por la prensa. El radio promedio del tornillo es $r = 5$ mm. Como el tornillo es de rosca doble, el avance L es igual al doble del paso: $L = 2(2 \text{ mm}) = 4$ mm. El ángulo de avance θ y el ángulo de fricción ϕ_s se obtienen escribiendo

$$\tan\theta = \frac{L}{2\pi r} = \frac{4 \text{ mm}}{10\pi \text{ mm}} = 0.1273 \qquad \theta = 7.3°$$

$$\tan\phi_s = \mu_s = 0.30 \qquad \phi_s = 16.7°$$

La fuerza **Q** que debe aplicarse al bloque que representa al tornillo se obtiene expresando que su momento Qr con respecto al eje del tornillo es igual al momento torsional aplicado.

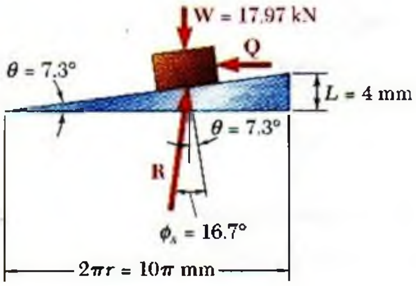
$$Q(5 \text{ mm}) = 40 \text{ N} \cdot \text{m}$$

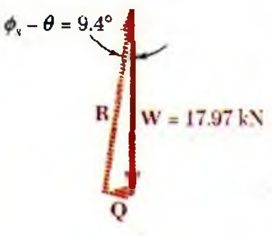
$$Q = \frac{40 \text{ N} \cdot \text{m}}{5 \text{ mm}} = \frac{40 \text{ N} \cdot \text{m}}{5 \times 10^{-3} \text{ m}} = 8\,000 \text{ N} = 8 \text{ kN}$$

Ahora se pueden dibujar el diagrama de cuerpo libre y el triángulo de fuerzas correspondiente para el bloque; la magnitud de la fuerza **W** ejercida sobre las piezas de madera se obtiene resolviendo el triángulo.

$$W = \frac{Q}{\tan(\theta + \phi_s)} = \frac{8 \text{ kN}}{\tan 24.0°}$$

$$W = 17.97 \text{ kN} \quad ◄$$





b) Momento torsional requerido para aflojar la prensa. La fuerza **Q** requerida para aflojar la prensa y el momento torsional correspondiente se obtienen a partir del diagrama de cuerpo libre y del triángulo de fuerzas mostrados.

$$Q = W \tan(\phi_s - \theta) = (17.97 \text{ kN}) \tan 9.4°$$
$$= 2.975 \text{ kN}$$

$$\text{Momento torsional} = Qr = (2.975 \text{ kN})(5 \text{ mm})$$
$$= (2.975 \times 10^3 \text{ N})(5 \times 10^{-3} \text{ m}) = 14.87 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\text{Momento torsional} = 14.87 \text{ N} \cdot \text{m} \quad ◄$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se aprendió a aplicar las leyes de fricción para la solución de problemas que involucran *cuñas* y *tornillos de rosca cuadrada.*

1. ***Cuñas.*** Cuando se resuelve un problema que involucra una cuña se debe tener presente lo siguiente:

a) Primero se dibuja un diagrama de cuerpo libre de la cuña y de todos los demás cuerpos involucrados. Se debe observar con cuidado el sentido del movimiento relativo de todas las superficies de contacto y se debe mostrar cada una de las fuerzas de fricción actuando en dirección opuesta a la dirección del movimiento relativo.

b) Se debe mostrar la fuerza de fricción estática máxima $\mathbf{F}_m$ en cada una de las superficies si la cuña va a ser insertada o removida, *puesto que el movimiento será inminente en cada uno de estos casos.*

c) La reacción* R *y el ángulo de fricción se pueden utilizar en muchas aplicaciones en lugar de la fuerza normal y la fuerza de fricción. Entonces, se pueden dibujar uno o más triángulos de fuerzas y determinar las cantidades desconocidas, ya sea gráficamente o por medio de la trigonometría [problema resuelto 8.4].

2. ***Tornillos de rosca cuadrada.*** El análisis de tornillos de rosca cuadrada es equivalente al análisis de un bloque que se desliza sobre un plano inclinado. Para dibujar el plano inclinado correcto, se debe desenrollar la rosca del tornillo y representarla por una línea recta [problema resuelto 8.5]. Cuando se resuelve un problema que involucra un tornillo de rosca cuadrada, se debe tomar en consideración lo siguiente:

a) No confundir el paso de un tornillo con el avance de un tornillo. El paso de un tornillo es la distancia entre dos roscas consecutivas mientras que el avance de un tornillo es la distancia que avanza el tornillo en una vuelta completa. El avance y el paso son iguales sólo en tornillos de rosca simple. En un tornillo de rosca doble, el avance es el doble del paso.

b) El momento torsional requerido para apretar un tornillo es diferente al momento torsional requerido para aflojarlo. Además, los tornillos que se utilizan en gatos y prensas usualmente son *autobloqueantes*; esto es, el tornillo permanecerá estacionario mientras no se le aplique un momento torsional y es necesario que éste se aplique sobre el tornillo para poder aflojarlo [problema resuelto 8.5].

Problemas

8.46 y 8.47 En la figura se muestran dos cuñas de 8° y peso insignificante que se usan para mover y colocar en posición un bloque de 530 lb. Si el coeficiente de fricción estática en todas las superficies de contacto es de 0.40, determine la magnitud de la fuerza **P** que debe ser aplicada para iniciar el movimiento del bloque.

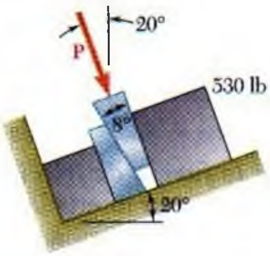


Figura P8.46

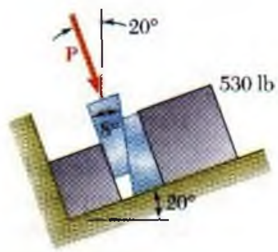


Figura P8.47

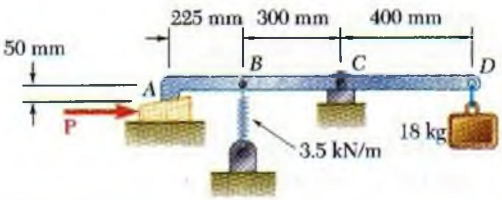


Figura *P8.48*

8.48 Una masa de 18 kg cuelga de una palanca apoyada contra una cuña de 10° en el punto *A* y que se sostiene sin fricción mediante un perno colocado en *C*. Si el coeficiente de fricción estática es de 0.25 en ambas superficies de la cuña y para la posición mostrada el resorte se estira 100 mm, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P** para la cual el movimiento de la cuña es inminente, *b*) las componentes de la reacción correspondiente en *C*.

8.49 Resuelva el problema 8.48 suponiendo que la fuerza **P** está dirigida hacia la izquierda.

8.50 y 8.51 Como indica la figura, la altura del extremo de la viga de acero que se sostiene por medio del piso de concreto se ajusta mediante las cuñas *E* y *F*. La base de la placa *CD* se suelda al patín inferior de la viga y la reacción sobre el extremo de la misma es de 90 kN. El coeficiente de fricción estática entre las superficies de acero es de 0.30, y entre el concreto y el acero es de 0.60. Si el movimiento horizontal de la viga se evita al aplicar la fuerza **Q**, determine *a*) la fuerza **P** requerida para levantar la viga, *b*) la fuerza **Q** correspondiente.

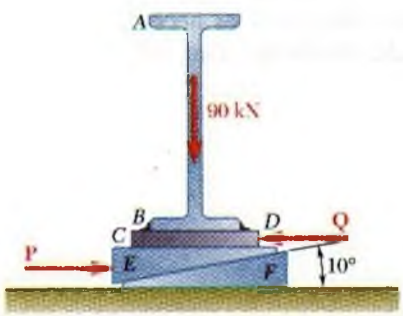


Figura P8.50

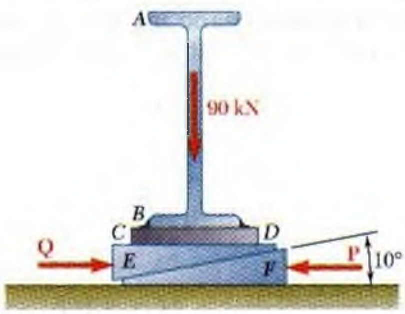


Figura P8.51

8.52 y *8.53* En la figura se muestra una cuña A de 16° y peso insignificante que está colocada entre dos bloques B y C de 175 lb, los cuales descansan sobre planos inclinados. Si el coeficiente de fricción estática es de 0.40, tanto entre la cuña y los bloques como entre el bloque C y el plano inclinado, determine la magnitud de la fuerza **P** requerida para que la cuña se empiece a mover cuando el coeficiente de fricción estática entre el bloque B y el plano inclinado es de *a*) 0.40, *b*) 0.60.

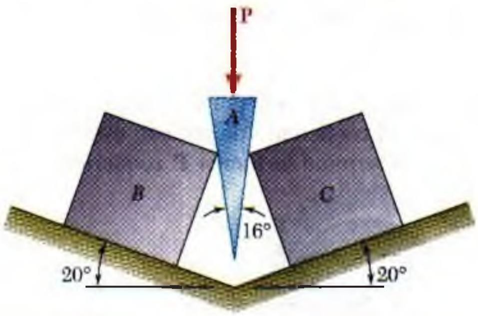


Figura P8.52

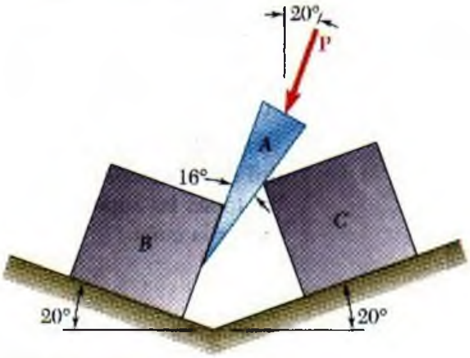


Figura *P8.53*

8.54 En la figura se muestra que, para nivelar una plataforma de madera, se colocaron las cuñas de madera A y B bajo una esquina de la plataforma. La cuña B descansa sobre una tabla de madera, como se indica, y se utiliza una abrazadera para aplicar fuerzas iguales y opuestas a las cuñas. Si $\theta = 18°$ y el coeficiente de fricción estática entre todas las superficies de madera es de 0.35 y de 0.60 entre la tabla y el suelo, determine la magnitud P de las fuerzas de sujeción para la que la plataforma inicia un movimiento hacia arriba.

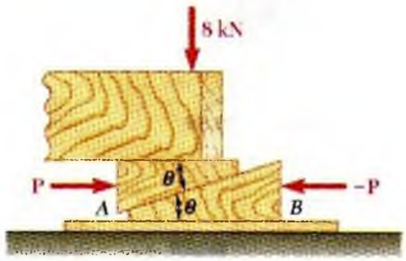


Figura P8.54 y P8.55

8.55 En la figura se muestra que, para nivelar una plataforma de madera, se colocaron las cuñas de madera A y B bajo una esquina de la plataforma, y la cuña B descansa sobre una tabla de madera. Si el coeficiente de fricción estática entre todas las superficies de madera es de 0.35, y de 0.60 entre la tabla y el suelo, determine el valor máximo del ángulo θ de la cuña para el cual el sistema permanecerá en equilibrio después de que las fuerzas de sujeción **P** y −**P** sean retiradas.

8.56 Una cuña de 12° se coloca bajo el extremo B del cuarto de cilindro de 250 lb que muestra la figura. Si el coeficiente de fricción estática es de 0.35 entre la cuña y el cilindro, y de 0.50 entre la cuña y el piso, determine la magnitud de la fuerza **P** requerida para iniciar el movimiento de la cuña.

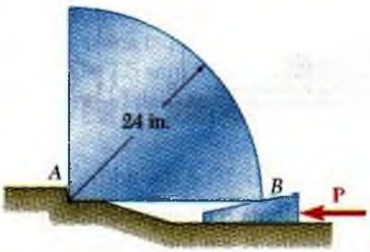


Figura P8.56

8.57 Un desarmador pequeño es utilizado para separar los dos anillos de un aro circular. El ángulo de cuña de la hoja del desarmador es de 16° y el coeficiente de fricción estática entre los anillos y la hoja es de 0.12. Si se requirió una fuerza **P** con magnitud de 3.5 N para insertar el desarmador hasta la posición de equilibrio que muestra la figura, determine la magnitud de las fuerzas ejercidas sobre el aro por el desarmador inmediatamente después de que la fuerza **P** es retirada.

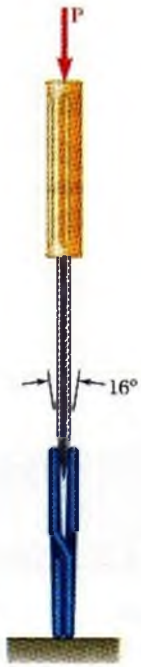


Figura P8.57



Figura P8.58

8.58 En la figura se muestra una cuña cónica situada entre dos placas horizontales que se mueven lentamente una hacia la otra. Indique lo que le pasará a la cuña si *a*) $\mu_s = 0.20$, *b*) $\mu_s = 0.30$.

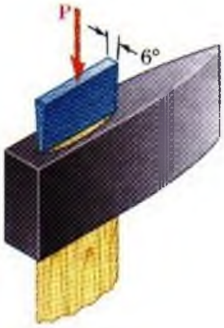


Figura *P8.59*

8.59 Una cuña de 6° se introduce en el extremo de un mango de hacha para fijar el mango a la cabeza del hacha como indica la figura. El coeficiente de fricción estática entre la cuña y el mango es de 0.35. Si se requirió una fuerza **P** de 60 lb para insertar la cuña hasta la posición de equilibrio mostrada, determine la magnitud de las fuerzas ejercidas sobre el mango por la cuña después de retirar la fuerza **P**.

8.60 Una cuña de 10° se introduce a la fuerza por debajo de un cilindro de 80 kg como indica la figura. Si el coeficiente de fricción estática entre todas las superficies es de 0.25, determine la fuerza **P** requerida para mover la cuña.

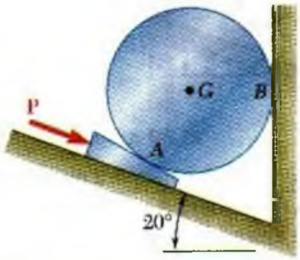


Figura P8.60 y P8.61

8.61 Una cuña de 10° se introduce a la fuerza por debajo de un cilindro de 80 kg como indica la figura. Si el coeficiente de fricción estática entre el cilindro y la pared vertical es de 0.30, determine el coeficiente mínimo de fricción estática requerido entre la cuña y el cilindro para que ocurra deslizamiento en *B*.

8.62 En la figura se muestran algunas bolsas de semilla para césped que están apiladas sobre una plancha de madera. Para mover la plancha se coloca una cuña de 9° por debajo del extremo *A*. Si el peso de las semillas se puede representar mediante las cargas distribuidas indicadas en la figura, y el coeficiente de fricción estática es de 0.45 entre todas las superficies de contacto, *a*) determine la fuerza **P** requerida para iniciar el movimiento de la cuña, *b*) indique si la plancha se deslizará sobre el piso.

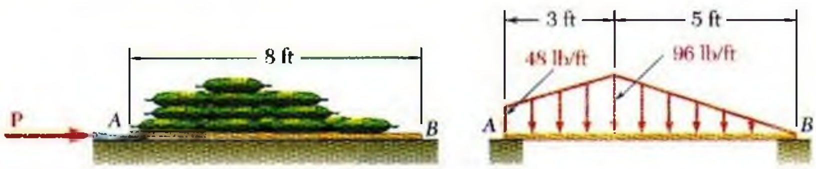


Figura P8.62

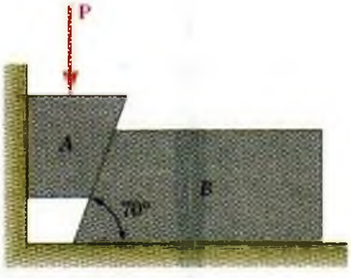


Figura P8.64

8.63 Resuelva el problema 8.62 suponiendo que la cuña se coloca debajo de la plancha en el punto *B*, en lugar de en *A*.

***8.64** El bloque *A* de 10 kg se apoya contra el bloque *B* de 50 kg en la forma que indica la figura. El coeficiente de fricción estática μ_s es el mismo entre los bloques *A* y *B* y entre el bloque *B* y el piso, mientras que la fricción entre el bloque *A* y la pared se puede ignorar. Si $P = 150$ N, determine el valor de μ_s requerido para que se inicie el movimiento.

***8.65** Resuelva el problema 8.64 suponiendo que μ_s es el coeficiente de fricción estática entre todas las superficies de contacto.

8.66 Obtenga las siguientes fórmulas que relacionan la carga **W** y la fuerza **P** ejercida sobre el mango del gato estudiado en la sección 8.6. *a*) $P = (Wr/a) \tan (\theta + \phi_s)$, para levantar la carga; *b*) $P = (Wr/a) \tan (\phi_s - \theta)$, para bajar la carga si el tornillo es autobloqueante; *c*) $P = (Wr/a) \tan (\theta - \phi_s)$, para sostener la carga si el tornillo no es autobloqueante.

8.67 El engrane sinfín de rosca cuadrada que muestra la figura tiene radio medio de 1.5 in. y avance de 0.375 in. El engrane más grande está sometido a un par de torsión constante de 7.2 kips · in., en el mismo sentido que las manecillas del reloj. Si el coeficiente de fricción estática entre los dos engranes es de 0.12, determine el par de torsión requerido en el eje *AB* para que el engrane más grande pueda rotar en sentido contrario al de las manecillas del reloj. No tome en cuenta la fricción de los cojinetes en *A*, *B* y *C*.

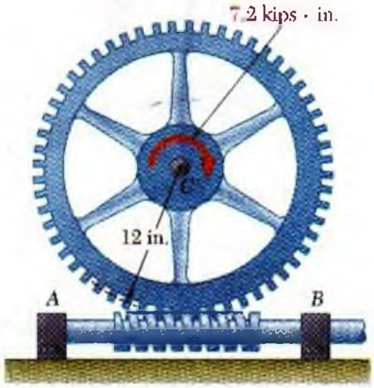


Figura *P8.67*

8.68 En el problema 8.67, determine el par de torsión que debe aplicarse al eje *AB* para que el engrane más grande pueda rotar en el mismo sentido que las manecillas del reloj.



Figura P8.69

8.69 Los pernos de alta resistencia se emplean comúnmente en la construcción de muchas estructuras de acero. Si la tensión mínima requerida en un perno de 1 in. de diámetro nominal es de 47.25 kips, y suponiendo que el coeficiente de fricción estática es de 0.35, determine el par de torsión requerido en el perno y en la tuerca mostrados en la figura. El diámetro medio de la rosca del perno es de 0.94 in., y su avance de 0.125 in. No tome en cuenta la fricción entre la tuerca y la arandela y suponga que el perno es de rosca cuadrada.

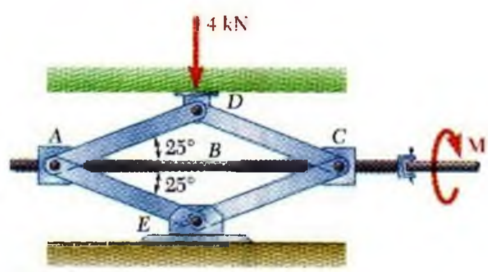


Figura *P8.70*

8.70 La posición del gato mecánico para automóvil mostrado en la figura se controla mediante el tornillo *ABC* de rosca sencilla colocado en sus extremos (rosca derecha en *A* y rosca izquierda en *C*). Cada rosca tiene un paso de 2 mm y diámetro medio de 7.5 mm. Si el coeficiente de fricción estática es de 0.15, determine la magnitud del par **M** que debe aplicarse para levantar el automóvil.

8.71 Para el gato del problema 8.70, determine la magnitud del par **M** que debe aplicarse para bajar el automóvil.

8.72 La prensa de tornillo que se muestra en la figura consta de dos miembros conectados por dos tornillos de rosca doble con radio medio de 6 mm y separación de 2 mm. El elemento más bajo está enroscado en *A* y *B* ($\mu_s = 0.35$), pero el elemento superior no está enroscado. Se desean aplicar dos fuerzas iguales y opuestas de 540 N sobre los bloques sostenidos entre las quijadas. Determine *a*) cuál rosca debe ajustarse primero, *b*) el par máximo a ser aplicado para ajustar la segunda rosca.

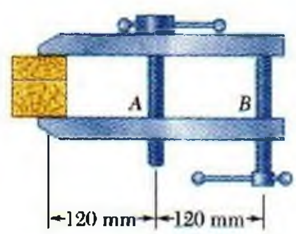


Figura P8.72

8.73 Resuelva el inciso *b*) del problema 8.72 suponiendo que la tuerca equivocada se ajusta primero.

8.74 En la figura se muestra un sistema de extracción de engranes en el cual el tornillo AB de rosca cuadrada tiene un radio medio de 0.9375 in. y un avance de 0.25 in. Si el coeficiente de fricción estática es de 0.10, determine el par de torsión que debe aplicarse al tornillo para generar una fuerza de 1 000 lb sobre el engrane. No tome en cuenta la fricción en el extremo A del tornillo.



Figura P8.74

*8.7. CHUMACERAS. FRICCIÓN EN EJES

Las chumaceras se utilizan para proporcionar soporte lateral a flechas y ejes en rotación. Los cojinetes de empuje, que se estudiarán en la siguiente sección, se usan para proporcionarle soporte axial a las flechas y a los ejes. Si la chumacera está totalmente lubricada, la resistencia por fricción depende de la velocidad de rotación, del juego entre el eje y la chumacera, y de la viscosidad del lubricante. Como se indicó en la sección 8.1, los problemas de este tipo se estudian en la mecánica de fluidos. Sin embargo, los métodos de este capítulo pueden aplicarse al estudio de la fricción en ejes cuando la chumacera no está lubricada o sólo se lubrica parcialmente. Entonces, se puede suponer que el eje y la chumacera están en contacto directo a lo largo de una sola línea recta.

Considere dos ruedas, cada una de peso **W**, las cuales están montadas rígidamente sobre un eje soportado de manera simétrica por dos chumaceras (figura 8.10*a*). Si las ruedas giran, se encuentra que, para mantenerlas rotando a una velocidad constante, es necesario aplicarle a cada una un par **M**. El diagrama de cuerpo libre de la figura 8.10*c* representa la proyección de una de las ruedas y de la mitad del eje correspondiente sobre un plano perpendicular al eje. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre incluyen el peso **W** de la rueda, el par **M** requerido para mantener su movimiento, y una fuerza **R** que representa la reacción de la chumacera. Esta última fuerza es vertical, igual y opuesta a **W**, pero no pasa por el centro O del eje; **R** está localizada a la derecha de O a una distancia tal que su momento respecto a O equilibra el momento **M** del par. Por tanto, el contacto entre el eje y la chumacera no ocurre en el punto A más bajo cuando el eje está girando. El contacto ocurre en el punto B (figura 8.10*b*) o, mejor dicho, a lo largo de una línea recta que interseca al plano de la figura en el punto B. Físicamente, esto se explica por el hecho de que, cuando las ruedas se ponen en movimiento, el eje "se eleva" en la chumacera hasta que ocurre un deslizamiento. Después de resbalarse un poco hacia atrás, el eje queda más o menos en la posición mostrada. Esta posición es tal que el ángulo entre la reacción **R** y la normal a la superficie del cojinete es igual al ángulo de fricción cinética ϕ_k. Por tanto, la distancia desde O hasta la línea de acción de **R** es igual a r sen

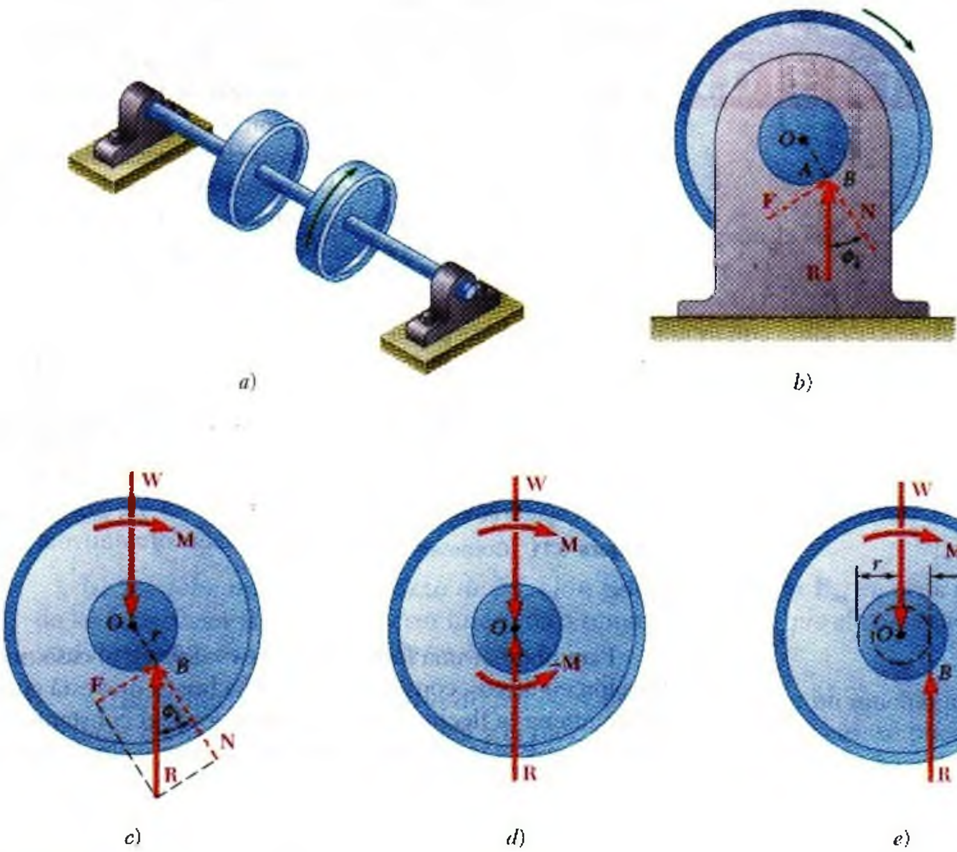


Figura 8.10

ϕ_k, donde r es el radio del eje. Si se escribe que $\Sigma M_O = 0$ para las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre considerado, se obtiene la magnitud del par **M** requerido para vencer la resistencia por fricción de una de las chumaceras:

$$M = Rr \text{ sen } \phi_k \tag{8.5}$$

Observe que para valores pequeños del ángulo de fricción, sen ϕ_k se puede reemplazar por tan ϕ_k, esto es, por μ_k, se escribe la fórmula aproximada

$$M \approx Rr\mu_k \tag{8.6}$$

En la solución de ciertos problemas puede ser más conveniente hacer que la línea de acción de **R** pase a través de O, como lo hace cuando el eje no está girando. Entonces, se debe agregar a la reacción **R** un par $-$**M** de la misma magnitud que el par **M** pero de sentido opuesto (figura 8.10*d*), dicho par representa la resistencia por fricción de la chumacera.

En caso de que se prefiera una solución gráfica, la línea de acción de **R** se puede dibujar fácilmente (figura 8.10*e*) si se observa que ésta debe ser tangente a un círculo que tiene su centro en O y cuyo radio está dado por

$$r_f = r \text{ sen } \phi_k \approx r\mu_k \tag{8.7}$$

Dicho círculo recibe el nombre de *círculo de fricción* del eje y la chumacera y es independiente de las condiciones de carga del eje.

*8.8. COJINETES DE EMPUJE. FRICCIÓN EN DISCOS

Para proporcionarle soporte axial a las flechas y a los ejes que giran se utilizan dos tipos de cojinetes de empuje: 1) *cojinetes de tope o frontales* y 2) *cojinetes de collar o radiales* (figura 8.11). En el caso de los cojinetes de collar se desarrollan fuerzas de fricción entre las dos áreas en forma de anillo que están en contacto. En el caso de los cojinetes de tope la fricción ocurre sobre áreas circulares completas o sobre áreas en forma de anillo cuando el extremo de la flecha es hueco. La fricción entre áreas circulares, denominada *fricción en discos*, también ocurre en otros mecanismos como los *embragues de disco*.



a) Cojinete de tope *b*) Cojinete de collar

Figura 8.11 Cojinetes de empuje.

Para obtener una fórmula que sea válida en el caso más general de fricción en discos, considere una flecha hueca que está girando. Un par **M** mantiene la flecha girando a una velocidad constante mientras que una fuerza **P** la mantiene en contacto con un cojinete fijo (figura 8.12).

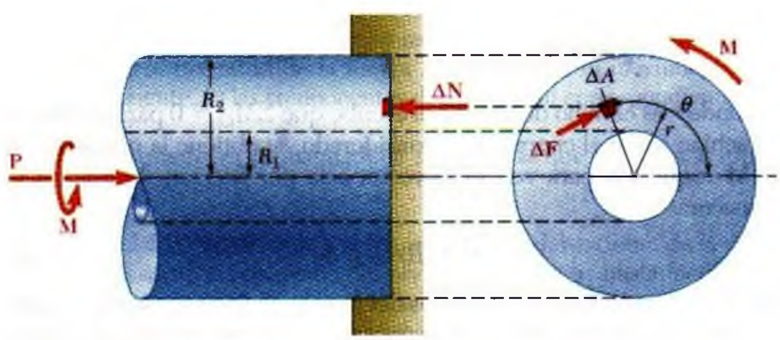


Figura 8.12

El contacto entre la flecha y el cojinete ocurre sobre un área en forma de anillo que tiene un radio interior R_1 y un radio exterior R_2. Suponiendo que la presión entre las dos superficies en contacto es uniforme, se encuentra que la magnitud de la fuerza normal $\Delta\mathbf{N}$ ejercida sobre un elemento de área ΔA está dada por $\Delta N = P\,\Delta A/A$, donde $A = \pi(R_2^2 - R_1^2)$ y que la magnitud de la fuerza de fricción $\Delta\mathbf{F}$ que actúa sobre ΔA es $\Delta F = \mu_k\,\Delta N$. Si se representa con r la distancia desde el eje de la flecha hasta el elemento de área ΔA, se expresa la magnitud ΔM del momento de $\Delta\mathbf{F}$ con respecto al eje de la flecha de la siguiente forma:

$$\Delta M = r\,\Delta F = \frac{r\mu_k P\,\Delta A}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}$$

El equilibrio de la flecha requiere que el momento **M** del par aplicado a ésta sea igual en magnitud a la suma de los momentos de las fuerzas de fricción $\Delta\mathbf{F}$. Reemplazando ΔA por el elemento infinitesimal $dA = r\,d\theta\,dr$ que se utiliza con las coordenadas polares e integrando sobre el área de contacto se obtiene la siguiente expresión para la magnitud del par **M** que se requiere para vencer la resistencia por fricción del cojinete:

$$M = \frac{\mu_k P}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} r^2\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{\mu_k P}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{3}(R_2^3 - R_1^3)\,d\theta$$

$$M = \tfrac{2}{3}\mu_k P \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2} \qquad (8.8)$$

Cuando el contacto ocurre sobre un círculo completo de radio R, la fórmula (8.8) se reduce a

$$M = \tfrac{2}{3}\mu_k PR \qquad (8.9)$$

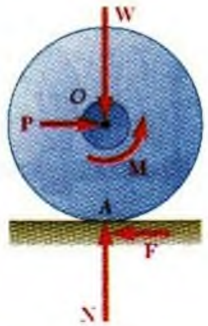
Entonces el valor de M es el mismo que el que se hubiera obtenido si el contacto entre la flecha y el cojinete hubiera ocurrido en un solo punto localizado a una distancia de $2R/3$ desde el eje de la flecha.

El momento torsional máximo que puede ser transmitido por un embrague de disco sin causar deslizamiento está dado por una fórmula similar a la ecuación (8.9), donde μ_k se reemplaza por el coeficiente de fricción estática μ_s.

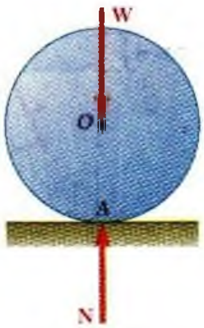
*8.9. FRICCIÓN EN RUEDAS. RESISTENCIA A LA RODADURA O RODAMIENTO

La rueda es uno de los inventos más importantes de nuestra civilización. Su uso hace que sea posible mover cargas pesadas con un esfuerzo relativamente pequeño. Debido a que el punto de la rueda que está en contacto con el suelo en cualquier instante no tiene un movimiento relativo con respecto del suelo, la rueda elimina las grandes fuerzas de fricción que se presentarían si la carga estuviera en contacto directo con el suelo. Sin embargo, existe cierta resistencia al movimiento de la rueda. Dicha resistencia tiene dos causas distintas: 1) El efecto combinado de la fricción en el eje y de la fricción en el aro y 2) el hecho de que la rueda y el suelo se deforman, ocasionando que el contacto entre la rueda y el suelo ocurra sobre una cierta área en lugar de ocurrir en un solo punto.

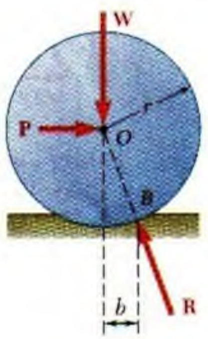
Para comprender mejor la primera causa de resistencia al movimiento de una rueda, considérese un vagón de ferrocarril que está soportado por ocho ruedas que están montadas en ejes y cojinetes. Se supone que el vagón se está moviendo hacia la derecha a una velocidad constante a lo largo de una vía horizontal recta. El diagrama de cuerpo libre de una de las ruedas se muestra en la figura 8.13*a*. Las fuerzas que actúan sobre el diagrama de cuerpo libre incluyen la car-



a) Efecto de la fricción en ejes



b) Rueda libre



c) Resistencia a la rodadura

Figura 8.13

ga **W** soportada por la rueda y la reacción normal **N** de la vía. Como **W** está dibujada a través del centro O del eje, la resistencia por fricción del cojinete debe representarse con un par **M** que tiene un sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj (véase sección 8.7). Para mantener al cuerpo en equilibrio, se deben agregar dos fuerzas iguales y opuestas **P** y **F**, las cuales forman un par con un sentido a favor del movimiento de las manecillas del reloj que tiene un momento $-$**M**. La fuerza **F** es la fuerza de fricción ejercida por la vía sobre la rueda y **P** representa la fuerza que debe aplicarse a la rueda para que ésta se mantenga rodando a velocidad constante. Observe que las fuerzas **P** y **F** no existirían en el caso de que no hubiera fricción entre la rueda y la vía. Entonces, el par **M** que representa la fricción en el eje sería igual a cero; por tanto, la rueda se deslizaría sobre la vía sin girar en su cojinete.

El par **M** y las fuerzas **P** y **F** también se reducen a cero cuando no existe fricción en el eje. Por ejemplo, una rueda que no está sostenida por cojinetes y que rueda libremente a una velocidad constante sobre un piso horizontal (figura 8.13*b*) estará sujeta únicamente a dos fuerzas: su propio peso **W** y la reacción normal **N** del piso. Sin importar cuál sea el valor del coeficiente de fricción entre la rueda y el piso, no actuará una fuerza de fricción sobre la rueda. Por tanto, una rueda que gira libremente sobre una superficie horizontal debería continuar rodando indefinidamente.

Sin embargo, la experiencia indica que la rueda irá disminuyendo su velocidad hasta detenerse. Lo anterior se debe al segundo tipo de resistencia mencionado al principio de esta sección, el cual se conoce como la *resistencia a la rodadura*. Bajo la acción de la carga **W**, tanto la rueda como el piso se deforman ligeramente y ocasiona que el contacto entre la rueda y el piso ocurra sobre cierta área. La evidencia experimental muestra que la resultante de las fuerzas ejercidas por el piso sobre la rueda a lo largo de dicha área es una fuerza **R** aplicada en un punto B, el cual no está localizado directamente por debajo del centro O de la rueda, sino que se encuentra ligeramente hacia el frente de la rueda (figura 8.13*c*). Para equilibrar el momento de **W** con respecto a B y para mantener a la rueda rodando a velocidad constante, es necesario aplicar una fuerza horizontal **P** en el centro de la rueda. Si se escribe $\Sigma M_B = 0$, se obtiene

$$Pr = Wb \tag{8.10}$$

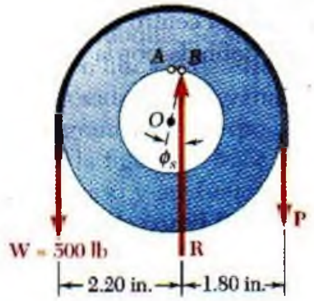
donde r = radio de la rueda
b = distancia horizontal entre O y B

La distancia b recibe el nombre de *coeficiente de resistencia a la rodadura*. Es necesario señalar que b no es un coeficiente adimensional puesto que representa una longitud; por lo general, se expresa a b en pulgadas o en milímetros. El valor de b depende de varios parámetros en forma que aún no se ha establecido claramente. Los valores del coeficiente de resistencia a la rodadura varían desde alrededor de 0.01 in. o 0.25 mm para una rueda de acero en un riel de acero hasta 5.0 in. o 125 mm para la misma rueda sobre un piso blando.

PROBLEMA RESUELTO 8.6

Una polea que tiene un diámetro de 4 in. puede rotar alrededor de una flecha fija que tiene un diámetro de 2 in. El coeficiente de fricción estática entre la polea y la flecha es de 0.20. Determine: *a*) la fuerza vertical mínima **P** requerida para comenzar a levantar una carga de 500 lb, *b*) la fuerza vertical mínima **P** requerida para sostener la carga y *c*) la fuerza horizontal mínima **P** requerida para comenzar a levantar la misma carga.

SOLUCIÓN



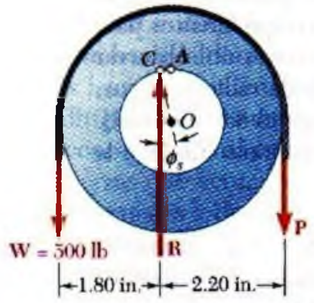
***a*) Fuerza vertical P requerida para comenzar a levantar la carga.** Cuando las fuerzas en ambas partes de la cuerda son iguales, el contacto entre la flecha y la polea ocurre en *A*. Cuando se incrementa la fuerza **P**, la polea gira ligeramente alrededor de la flecha y el contacto ocurre en *B*. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la polea cuando el movimiento es inminente. La distancia perpendicular desde el centro *O* de la polea hasta la línea de acción de **R** es

$$r_f = r \text{ sen } \phi_s \approx r\mu_s \qquad r_f \approx (1 \text{ in.})0.20 = 0.20 \text{ in.}$$

Sumando momentos con respecto a *B*, se escribe

$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0$: $\quad (2.20 \text{ in.})(500 \text{ lb}) - (1.80 \text{ in.})P = 0$

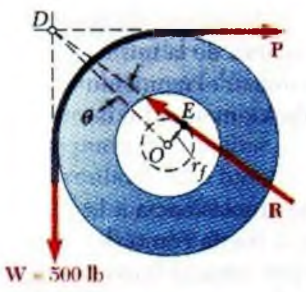
$P = 611$ lb $\qquad$ **P** = 611 lb ↓ ◀

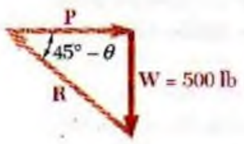


***b*) Fuerza vertical P para sostener la carga.** A medida que la fuerza **P** disminuye, la polea gira alrededor de la flecha y el contacto ocurre en *C*. Considerando la polea como un cuerpo libre y sumando momentos con respecto a *C*, se escribe

$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0$: $\quad (1.80 \text{ in.})(500 \text{ lb}) - (2.20 \text{ in.})P = 0$

$P = 409$ lb $\qquad$ **P** = 409 lb ↓ ◀





***c*) Fuerza horizontal P para comenzar a levantar la carga.** Como las tres fuerzas **W**, **P** y **R** no son paralelas, éstas deben ser concurrentes. Por tanto, la dirección de **R** se determina a partir del hecho de que su línea de acción debe pasar a través del punto de intersección *D* de las líneas de acción de **W** y **P** y debe ser tangente al círculo de fricción. Si recordamos que el radio del círculo de fricción es $r_f = 0.20$ in., se escribe

$$\text{sen } \theta = \frac{OE}{OD} = \frac{0.20 \text{ in.}}{(2 \text{ in.})\sqrt{2}} = 0.0707 \qquad \theta = 4.1°$$

A partir del triángulo de fuerzas, se obtiene

$$P = W \cot (45° - \theta) = (500 \text{ lb}) \cot 40.9°$$
$$= 577 \text{ lb}$$

P = 577 lb → ◀

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se aprendieron varias aplicaciones de ingeniería adicionales de las leyes de fricción.

1. *Chumaceras y fricción en ejes.* En las chumaceras la *reacción no pasa a través del centro de la flecha o eje* que está siendo soportado. La distancia desde el centro de la flecha o eje hasta la línea de acción de la reacción (figura 8.10) está definida por la ecuación

$$r_f = r \text{ sen } \phi_k \approx r\mu_k$$

si existe movimiento, y por la ecuación

$$r_f = r \text{ sen } \phi_s \approx r\mu_s$$

si el movimiento es inminente.

Cuando ya se ha determinado la línea de acción de la reacción, se puede dibujar un *diagrama de cuerpo libre* y utilizar las ecuaciones de equilibrio correspondientes para completar la solución [problema resuelto 8.6]. En algunos problemas es útil observar que la línea de acción de la reacción debe ser tangente a un círculo de radio $r_f \approx r\mu_k$, o $r_f \approx r\mu_s$, que se conoce como el *círculo de fricción* [problema resuelto 8.6, inciso *c*)]. Es importante recordar que las reacciones siempre se oponen a la acción o impiden la rotación del eje o la flecha.

2. *Cojinetes de empuje y fricción en discos.* En un *cojinete de empuje* la magnitud del par requerido para vencer a la resistencia por fricción es igual a la suma de los momentos de las *fuerzas de fricción cinética* ejercidas sobre los elementos del extremo de la flecha [ecuaciones (8.8) y (8.9)].

Un ejemplo de fricción en discos es el *embrague de disco*. Éste se analiza de la misma forma que un cojinete de empuje, con la diferencia de que para determinar el momento torsional máximo que se puede transmitir, debe calcularse la suma de los momentos de las *fuerzas de fricción estática máximas* ejercidas sobre el disco.

3. *Fricción en ruedas y resistencia a la rodadura.* Se vio que la resistencia a la rodadura de una rueda es ocasionada por deformaciones tanto de la rueda como del suelo. La línea de acción de la reacción **R** del suelo sobre la rueda interseca al suelo a una distancia horizontal *b* a partir del centro de la rueda. La distancia *b* se conoce como el *coeficiente de resistencia a la rodadura* y se expresa en pulgadas o milímetros.

4. *En problemas que involucran tanto resistencia a la rodadura como fricción en ejes,* el diagrama de cuerpo libre debe mostrar que la línea de acción de la reacción **R** del suelo sobre la rueda es tangente al círculo de fricción del eje e interseca al suelo a una distancia horizontal a partir del centro de la rueda que es igual al coeficiente de resistencia a la rodadura.

Problemas

8.75 Un caldero de metal caliente y su contenido tienen masa de 50 Mg. Si el coeficiente de fricción estática entre los ganchos y el piñón es de 0.30, determine la tensión que se requiere en el cable *AB* para iniciar la inclinación del caldero.

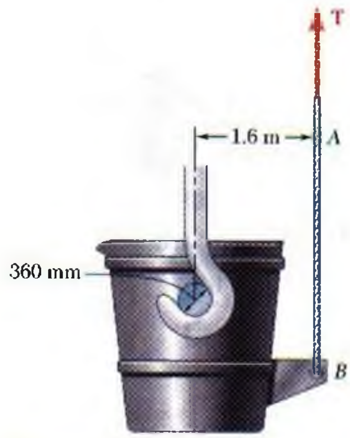


Figura P8.75

8.76 y *8.77* Un montacargas de 10 in. de diámetro se utiliza para elevar o bajar una carga de 160 lb. El montacargas está apoyado en dos cojinetes poco lubricados de 3 in. de diámetro. Si el coeficiente de fricción estática entre el perno y los cojinetes es de 0.50, determine la magnitud de la fuerza **P** requerida para iniciar la elevación de la carga.

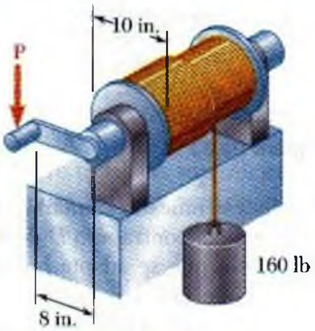


Figura P8.76 y P8.78

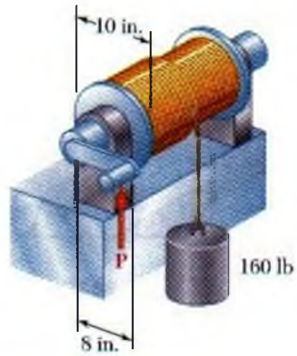


Figura *P8.77* y *P8.79*

8.78 y *8.79* Un montacargas de 10 in. de diámetro se utiliza para elevar o bajar una carga de 160 lb. El montacargas está apoyado en dos cojinetes poco lubricados de 3 in. de diámetro. Si el coeficiente de fricción estática entre el eje y los cojinetes es de 0.50, determine la magnitud de la fuerza **P** mínima requerida para mantener el equilibrio.

8.80 Una palanca de control, *ABC*, se adapta holgadamente a un eje de 18 mm de diámetro en el soporte *B*. Si para iniciar la rotación de la palanca en el mismo sentido de las manecillas del reloj $P = 130$ N, determine *a*) el coeficiente de fricción estática entre el eje y la palanca, *b*) la magnitud de la fuerza **P** requerida para iniciar la rotación de la palanca en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

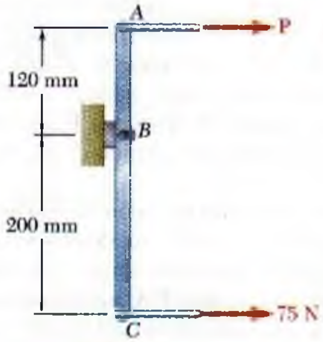


Figura P8.80

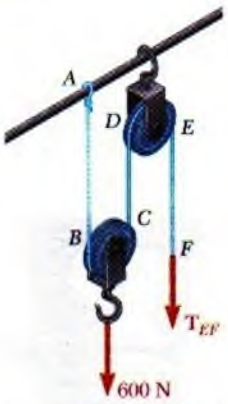


Figura P8.81 y P8.82

8.81 El bloque y el polipasto mostrados en la figura se emplean para levantar una carga de 600 N. Cada una de las poleas de 60 mm de diámetro rota sobre un eje de 10 mm de diámetro. Si el coeficiente de fricción cinética es de 0.20, determine la tensión en cada tramo de la cuerda conforme la carga se eleva lentamente.

8.82 El bloque y el polipasto mostrados en la figura se emplean para levantar una carga de 600 N. Cada una de las poleas de 60 mm de diámetro rota sobre un eje de 10 mm de diámetro. Si el coeficiente de fricción cinética es de 0.20, determine la tensión en cada tramo de la cuerda conforme la carga se baja lentamente.

8.83 El arreglo de eslabón mostrado en la figura se emplea frecuentemente en los puentes de las carreteras para permitir la expansión de los elementos causada por los cambios de temperatura. El coeficiente de fricción estática en cada uno de los pernos *A* y *B* de 3 in. de diámetro es de 0.20. Si la componente vertical de la fuerza ejercida por *BC* sobre el eslabón es de 50 kips, determine *a*) la fuerza horizontal que debe aplicarse sobre la viga *BC* para que el eslabón comience a moverse, *b*) el ángulo que la fuerza resultante ejercida por la viga *BC* sobre el eslabón forma con la vertical.



Figura P8.83

8.84 y 8.85 En la figura se muestra el montaje de una pluma que consta de la pluma *ABC* de 24 kg y del contrapeso *D* de 66 kg, el cual está unido al eje *B* de 24 mm de diámetro que se adapta holgadamente a un cojinete fijo. Si el coeficiente de fricción estática entre el eje y el cojinete es de 0.20, determine la magnitud de la fuerza **P** necesaria para que se inicie la rotación de la pluma en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

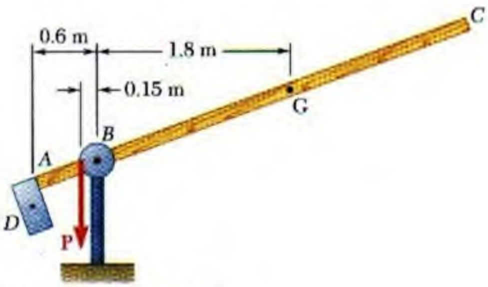


Figura P8.84 y *P8.86*

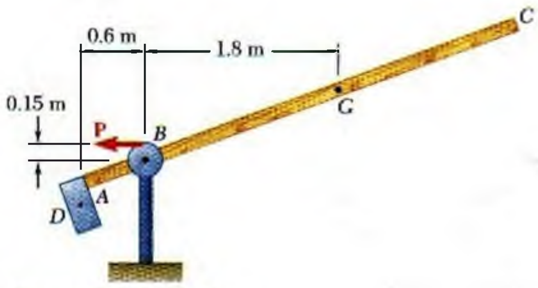


Figura P8.85 y *P8.87*

8.86* y *8.87 En la figura se muestra el montaje de una pluma que consta de la pluma *ABC* de 24 kg y del contrapeso *D* de 66 kg, el cual está unido al eje *B* de 24 mm de diámetro que se adapta holgadamente a un cojinete fijo. Si el coeficiente de fricción estática entre el eje y el cojinete es de 0.20, determine la magnitud de la fuerza **P** necesaria para que se inicie la rotación de la pluma en el mismo sentido de las manecillas del reloj.

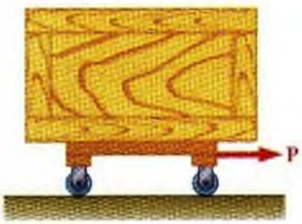


Figura P8.88

8.88 En la figura se muestra un cajón de 500 lb que descansa sobre un carrito, el cual tiene cuatro ruedas de 5 in. de diámetro con ejes de 0.5 in. de diámetro. Si los coeficientes de fricción son $\mu_s = 0.12$ y $\mu_k = 0.08$, determine la magnitud de la fuerza horizontal **P** requerida para *a*) iniciar el movimiento del carrito, *b*) mantener el movimiento del carrito a una velocidad constante. No tome en cuenta la resistencia a la rodadura entre las ruedas y el piso.

8.89 Una patineta está diseñada para descender con velocidad constante sobre una superficie inclinada al 3 por ciento. Si el coeficiente de fricción cinética entre los ejes es de 25 mm de diámetro y los cojinetes es de 0.12, determine el diámetro que deben tener las ruedas. No tome en cuenta la resistencia a la rodadura entre las ruedas y el suelo.



Figura P8.89

8.90 En la figura se muestra una pulidora de pisos eléctrica de 10.1 lb de peso y 7 in. de diámetro. El coeficiente de fricción cinética es de 0.60 entre la almohadilla de la pulidora y la superficie que se está puliendo. Si la fuerza normal por unidad de área entre la almohadilla y el piso se distribuye uniformemente, determine la magnitud Q de las fuerzas horizontales requeridas para evitar que la pulidora se mueva.

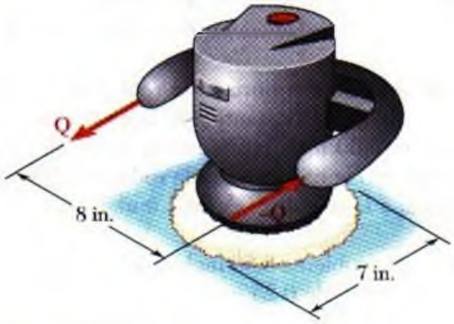


Figura P8.90

8.91 El pivote del asiento de una silla de escritorio consiste en la placa de acero A que sostiene al asiento, en el eje de acero sólido B que está soldado en A y gira libremente en el elemento tubular C, y en el cojinete de nylon D. Si al sentarse una persona de 80 kg el peso **W** actúa directamente encima del pivote, determine la magnitud del par **M** necesario para que inicie la rotación del asiento cuando el coeficiente de fricción estática entre el elemento tubular y el cojinete es de 0.15.

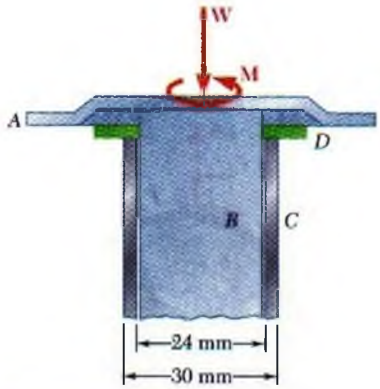


Figura P8.91

***8.92** Como las superficies de los ejes y los cojinetes sufren desgaste, la resistencia por fricción disminuye en las chumaceras. En forma general, se supone que el desgaste es directamente proporcional a la distancia recorrida por cualquier punto dado del eje y, en consecuencia, a la distancia r desde el punto al centro del eje. Entonces, si la fuerza normal por unidad de área es inversamente proporcional a r, demuestre que la magnitud M del par requerido para contrarrestar la resistencia por fricción de uno de los extremos desgastados del cojinete (con contacto en toda el área circular) es igual al 75 por ciento del valor dado en la fórmula (8.9) para un cojinete nuevo.

***8.93** Suponga que los cojinetes se desgastan como se indica en el problema 8.92, y demuestre que la magnitud M del par requerido para contrarrestar la resistencia por fricción de un cojinete de collarín desgastado es:

$$M = \frac{1}{2}\mu_k P(R_1 + R_2)$$

donde P = magnitud de la fuerza axial total
R_1, R_2 = radios interno y externo del collarín

***8.94** Si la presión entre las superficies de contacto es uniforme, demuestre que la magnitud M del par requerido para contrarrestar la resistencia por fricción del cojinete cónico mostrado en la figura es:

$$M = \frac{2}{3}\frac{\mu_k P}{\operatorname{sen}\theta}\frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2}$$

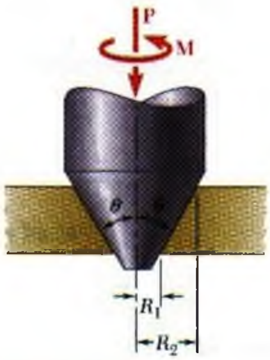


Figura *P8.94*



Figura *P8.96*

8.95 Resuelva el problema 8.90 suponiendo que la fuerza normal por unidad de área entre la almohadilla y el piso varía linealmente desde un valor máximo en el centro hasta cero en la circunferencia de la almohadilla.

8.96 Como indica la figura, la base de una máquina de una tonelada se mueve sobre el piso de concreto mediante una serie de tubos de acero de 5 in. de diámetro exterior. Si el coeficiente de resistencia a la rodadura entre los tubos y la base es de 0.025 in., y entre los tubos y el piso de concreto es de 0.0625 in., determine la magnitud de la fuerza **P** requerida para mover lentamente la base a lo largo del piso.

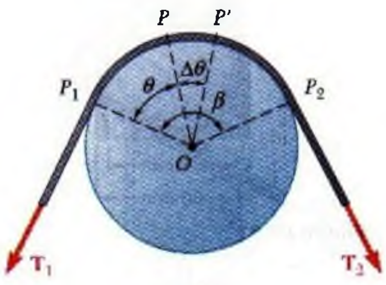
8.97 Si un disco de 120 mm de diámetro rueda con velocidad constante hacia abajo sobre una superficie inclinada al 2 por ciento, determine el coeficiente de resistencia a la rodadura entre el disco y el plano inclinado.

8.98 Determine la fuerza horizontal requerida para mover un automóvil de 1 Mg con velocidad constante a lo largo de una carretera horizontal si sus llantas tienen 460 mm de diámetro. No tome en cuenta ninguna forma de fricción excepto la resistencia a la rodadura, y suponga que el coeficiente de resistencia a la rodadura es de 1 mm.

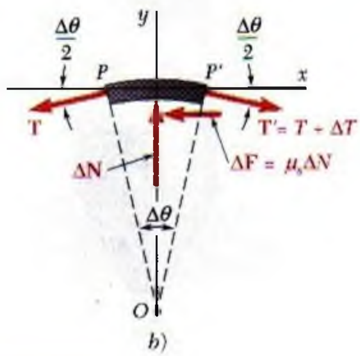
8.99 Resuelva el problema 8.88 incluyendo el efecto de un coeficiente de resistencia a la rodadura de 0.25 in.

8.100 Resuelva el problema 8.89 incluyendo el efecto de un coeficiente de resistencia a la rodadura de 1.75 mm.

8.10. FRICCIÓN EN BANDAS



a)



b)

Figura 8.14

Considere una banda plana que pasa sobre un tambor cilíndrico fijo (figura 8.14*a*). Se desea determinar la relación que existe entre los valores T_1 y T_2 de la tensión presente en las dos partes de la banda cuando ésta se encuentra a punto de deslizarse hacia la derecha.

Un pequeño elemento PP' que abarca un ángulo $\Delta\theta$ se separa de la banda. Si la tensión presente en P se denota con T y con $T + \Delta T$ la tensión en P' puede trazarse el diagrama de cuerpo libre del elemento de la banda (figura 8.14*b*). Además de las dos fuerzas de tensión, las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son la componente normal $\Delta\mathbf{N}$ de la reacción del tambor y la fuerza de fricción $\Delta\mathbf{F}$. Como se supone que el movimiento es inminente, se tiene $\Delta F = \mu_s \Delta N$. Es necesario señalar que si se hace que $\Delta\theta$ se aproxime a cero, las magnitudes ΔN y ΔF y la *diferencia* ΔT entre la tensión en P y la tensión en P', también tenderán a cero; sin embargo, el valor T de la tensión en P continuará sin alterar. Esta observación ayuda a comprender la selección de notación que se ha hecho.

Al seleccionar los ejes coordenados que se muestran en la figura 8.14*b* se escriben las ecuaciones de equilibrio para el elemento PP':

$$\Sigma F_x = 0: \qquad (T + \Delta T)\cos\frac{\Delta\theta}{2} - T\cos\frac{\Delta\theta}{2} - \mu_s \Delta N = 0 \qquad (8.11)$$

$$\Sigma F_y = 0: \qquad \Delta N - (T + \Delta T)\operatorname{sen}\frac{\Delta\theta}{2} - T\operatorname{sen}\frac{\Delta\theta}{2} = 0 \qquad (8.12)$$

Al resolver la ecuación (8.12) para ΔN y sustituir la ecuación (8.11), se obtiene la siguiente ecuación después de realizar simplificaciones

$$\Delta T \cos \frac{\Delta\theta}{2} - \mu_s(2T + \Delta T) \operatorname{sen} \frac{\Delta\theta}{2} = 0$$

Ahora se dividen ambos términos entre $\Delta\theta$. En el caso del primer término, esto se hace dividiendo ΔT entre $\Delta\theta$. La división del segundo término se lleva a cabo dividiendo entre 2 los términos que están entre paréntesis y dividiendo al seno entre $\Delta\theta/2$. Así se escribe

$$\frac{\Delta T}{\Delta\theta} \cos \frac{\Delta\theta}{2} - \mu_s\left(T + \frac{\Delta T}{2}\right) \frac{\operatorname{sen}(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2} = 0$$

Si ahora se hace que $\Delta\theta$ se aproxime a 0, el coseno tiende a 1 y, como se señaló anteriormente, $\Delta T/2$ tiende a cero. Además, de acuerdo con un lema que se deriva en todos los libros de cálculo, el cociente de sen $(\Delta\theta/2)$ sobre $\Delta\theta/2$ tiende a 1. Como el límite de $\Delta T/\Delta\theta$ es por definición igual a la derivada $dT/d\theta$, se escribe

$$\frac{dT}{d\theta} - \mu_s T = 0 \qquad \frac{dT}{T} = \mu_s d\theta$$

Ahora se integrarán ambos miembros de la última ecuación desde P_1 hasta P_2 (figura 8.14*a*). En P_1, se tiene que $\theta = 0$ y que $T = T_1$; en P_2, se tiene que $\theta = \beta$ y que $T = T_2$. Así, integrando entre estos límites, se escribe

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \int_0^{\beta} \mu_s \, d\theta$$

$$\ln T_2 - \ln T_1 = \mu_s\beta$$

u, observando que el lado izquierdo es igual al logaritmo natural del cociente de T_2 y T_1,

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu_s\beta \tag{8.13}$$

Esta relación también se puede escribir de la siguiente forma

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s\beta} \tag{8.14}$$

Las fórmulas que se han derivado se pueden aplicar tanto a problemas que involucran bandas planas que pasan sobre tambores cilíndricos fijos como a problemas que involucran cuerdas enrolladas alrededor de un poste o de un cabrestante. Además, dichas fórmulas también pueden utilizarse para resolver problemas que involucran frenos de banda. En este tipo de problemas, el cilindro es el que está a punto de girar mientras que la banda permanece fija. Por otra parte, las fórmulas también pueden aplicarse en problemas que involucran transmisiones de banda.



Fotografía 8.3 Al enrollar la cuerda alrededor del bolardo, la fuerza ejercida por el trabajador para controlar la cuerda es menor que la tensión en la porción tirante de la cuerda.

En estos problemas giran tanto la polea como la banda, entonces, se desea determinar si la banda se deslizará, esto es, si la banda se moverá *con respecto* a la polea.

Las fórmulas (8.13) y (8.14) sólo deben utilizarse si la banda, la cuerda o el freno están *a punto de deslizarse*. Se utilizará la fórmula (8.14) si se desea determinar T_1 o T_2; se preferirá la fórmula (8.13) si se desea determinar el valor de μ_s o si se desea determinar el ángulo de contacto β. Es necesario señalar que T_2 siempre es mayor que T_1; por tanto, T_2 representa la tensión en aquella parte que *jala*, mientras que T_1 es la tensión en aquella parte que *resiste*. También se debe mencionar que el ángulo de contacto β debe expresarse en *radianes*. El ángulo β puede ser mayor que 2π; por ejemplo, si una cuerda está enrollada n veces alrededor de un poste, β será igual a $2\pi n$.

Si la banda, la cuerda o el freno están deslizándose, deben utilizarse fórmulas similares a las ecuaciones (8.13) y (8.14) pero que involucren el coeficiente de fricción cinética μ_k. Si la banda, la cuerda o el freno no están deslizándose y tampoco están a punto de deslizarse, no se pueden utilizar las fórmulas mencionadas antes.

Las bandas que se utilizan en las transmisiones por lo general tienen forma en V. En la banda en V que se muestra en la figura 8.15*a* el contacto entre ésta y la polea ocurre a lo largo de los lados de la ranura. Dibujando el diagrama de cuerpo libre de un elemento de la banda (figura 8.15*b* y *c*), se puede obtener la relación que existe entre los valores T_1 y T_2 de la tensión en las dos partes de la banda cuando ésta está a punto de deslizarse. De esta forma se derivan fórmulas similares a las ecuaciones (8.11) y (8.12), pero ahora la magnitud de la fuerza de fricción total que actúa sobre el elemento es igual a 2 ΔF, y la suma de las componentes y de las fuerzas normales es igual a 2 ΔN sen $(\alpha/2)$. Procediendo de la misma forma en la que se hizo antes, se obtiene

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{\mu_s \beta}{\text{sen }(\alpha/2)} \tag{8.15}$$

o,

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta/\text{sen }(\alpha/2)} \tag{8.16}$$

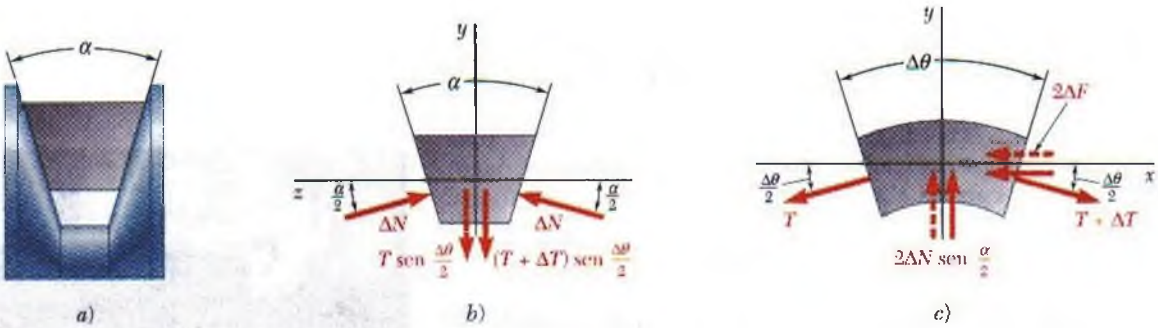
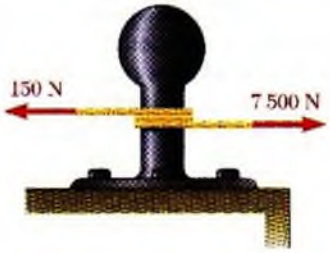


Figura 8.15



Fotografía 8.4 Las grandes fuerzas normales y de fricción sobre los lados inclinados de la banda en V incrementan la potencia que puede ser transmitida antes de que ocurra deslizamiento.

PROBLEMA RESUELTO 8.7



Un cable de romolque lanzado desde un barco a un muelle se enrolla dos vueltas completas alrededor de un bolardo o noray. La tensión en el cable es de 7 500 N, que ejerce una fuerza de 150 N sobre el extremo libre del cable, un trabajador del muelle apenas puede evitar que el cable se deslice; determine: *a*) el coeficiente de fricción entre el cable y el bolardo o noray, y *b*) la tensión en el cable que podría ser resistida por la fuerza de 150 N si el cable estuviera enrollado tres vueltas completas alrededor del bolardo o noray.

SOLUCIÓN

***a*) Coeficiente de fricción.** Como el deslizamiento del cable es inminente, se usa la ecuación (8.13):

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu_s \beta$$

Como el cable está enrollado dos vueltas completas alrededor del bolardo, se tiene que

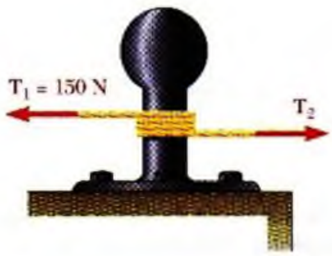
$$\beta = 2(2\pi \text{ rad}) = 12.57 \text{ rad}$$
$$T_1 = 150 \text{ N} \qquad T_2 = 7\,500 \text{ N}$$

Por tanto,

$$\mu_s \beta = \ln \frac{T_2}{T_1}$$
$$\mu_s(12.57 \text{ rad}) = \ln \frac{7\,500 \text{ N}}{150 \text{ N}} = \ln 50 = 3.91$$
$$\mu_s = 0.311$$

$\mu_s = 0.311$ ◀

***b*) Cable enrollado tres vueltas completas alrededor del bolardo.** Con el valor de μ_s obtenido en el inciso *a*) de este problema, ahora se tiene que



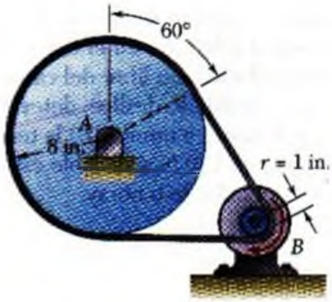
$$\beta = 3(2\pi \text{ rad}) = 18.85 \text{ rad}$$
$$T_1 = 150 \text{ N} \qquad \mu_s = 0.311$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (8.14) se obtiene

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta}$$
$$\frac{T_2}{150 \text{ N}} = e^{(0.311)(18.85)} = e^{5.862} = 351.5$$
$$T_2 = 52\,725 \text{ N}$$

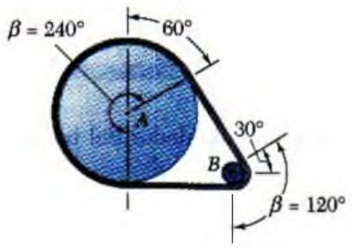
$T_2 = 52.7$ kN ◀

PROBLEMA RESUELTO 8.8

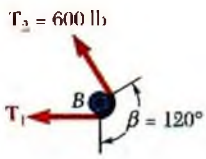


Una banda plana conecta una polea A que mueve una máquina herramienta, con una polea B, la cual está unida a la flecha de un motor eléctrico. Los coeficientes de fricción entre ambas poleas y la banda son $\mu_s = 0.25$ y $\mu_k = 0.20$. Si se sabe que la tensión máxima permisible en la banda es de 600 lb, determine el momento torsional máximo que puede ejercer la banda sobre la polea A.

SOLUCIÓN



Debido a que la resistencia al deslizamiento depende tanto del ángulo de contacto β entre la polea y la banda como del coeficiente de fricción estática μ_s y puesto que μ_s es el mismo para ambas poleas, el deslizamiento ocurrirá primero en la polea B, para la cual β es menor.



Polea *B*. Con el uso de la ecuación (8.14) con $T_2 = 600$ lb, $\mu_s = 0.25$ y $\beta = 120° = 2\pi/3$ rad, se escribe

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta} \qquad \frac{600 \text{ lb}}{T_1} = e^{0.25(2\pi/3)} = 1.688$$

$$T_1 = \frac{600 \text{ lb}}{1.688} = 355.4 \text{ lb}$$



Polea *A*. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la polea A. El par $\mathbf{M}_A$ se aplica a la polea por la máquina herramienta a la cual está unida la polea y es igual y opuesto al momento torsional ejercido por la banda. Así se escribe

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad M_A - (600 \text{ lb})(8 \text{ in.}) + (355.4 \text{ lb})(8 \text{ in.}) = 0$$

$$M_A = 1\,957 \text{ lb} \cdot \text{in.} \qquad M_A = 163.1 \text{ lb} \cdot \text{ft} \blacktriangleleft$$

Nota. Se puede comprobar que la banda no se desliza sobre la polea A calculando el valor de μ_s requerido para evitar el deslizamiento en A y verificando que éste es menor que el valor real de μ_s. A partir de la ecuación (8.13) se tiene que

$$\mu_s \beta = \ln \frac{T_2}{T_1} = \ln \frac{600 \text{ lb}}{355.4 \text{ lb}} = 0.524$$

y, como $\beta = 240° = 4\pi/3$ rad,

$$\frac{4\pi}{3}\mu_s = 0.524 \qquad \mu_s = 0.125 < 0.25$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En la sección anterior se aprendió acerca de la *fricción en bandas*. Los problemas que se tendrán que resolver incluyen bandas que pasan sobre tambores fijos, frenos de banda en los cuales el tambor gira mientras que la banda permanece fija y transmisiones de banda.

1. ***Los problemas que involucran fricción en bandas*** pertenecen a una de las dos categorías siguientes:

a) Problemas en los cuales el deslizamiento es inminente. En estos casos puede utilizarse una de las siguientes fórmulas que involucran al *coeficiente de fricción estática* μ_s:

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu_s\beta \tag{8.13}$$

o

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s\beta} \tag{8.14}$$

b) Problemas en los que ya ocurre el deslizamiento. Las fórmulas que deben utilizarse se pueden obtener a partir de las ecuaciones (8.13) y (8.14) reemplazando μ_s por el *coeficiente de fricción cinética* μ_k.

2. ***Cuando se comience a resolver un problema de fricción en bandas,*** es necesario recordar lo siguiente:

a) El ángulo β debe estar expresado en radianes. En un problema que involucra una banda y un tambor, éste es el ángulo subtendido en el arco del tambor sobre el cual está enrollada la banda.

b) La tensión más grande siempre se representa con T_2 y la tensión más pequeña con T_1.

c) La tensión más grande ocurre en el extremo de la banda que está en la dirección del movimiento, o del movimiento inminente de la banda con respecto al tambor. También se puede determinar la dirección de la tensión más larga recordando que la fuerza de acción en la banda y en la tensión más grande es siempre opuesta.

3. ***En cada uno de los problemas que deberán resolverse,*** tres de las cuatro cantidades T_1, T_2, β y μ_s (o μ_k) serán proporcionadas como dato o se podrán encontrar fácilmente y, entonces, se deberá resolver la ecuación apropiada para encontrar la cuarta cantidad. En esta sección se encontrarán dos tipos de problemas:

a) Si el deslizamiento es inminente, se debe encontrar el valor de μ_s entre la banda y el tambor: con base en los datos proporcionados, se determinan T_1, T_2 y β; entonces se sustituyen dichos valores en la ecuación (8.13) y se resuelve esta última para μ_s [problema resuelto 8.7, inciso *a*)]. Se sigue el mismo procedimiento para encontrar el *valor mínimo* de μ_s para el cual no ocurrirá el deslizamiento.

b) Si el deslizamiento es inminente, se debe encontrar la magnitud de una fuerza o de un par que está aplicado a la banda o al tambor. Los datos proporcionados deben incluir μ_s y β. Si también incluyen a T_1 o T_2 se utiliza la ecuación (8.14) para encontrar el valor de la otra tensión. Si no se conoce T_1 ni T_2, pero se proporcionan otros datos, se utiliza el diagrama de cuerpo libre del sistema constituido por la banda y el tambor para escribir una ecuación de equilibrio que tendrá que resolverse simultáneamente con la ecuación (8.14) para determinar los valores de T_1 o T_2. Entonces se podrá encontrar la magnitud de la fuerza o del par especificado a partir del diagrama de cuerpo libre del sistema. Se sigue el mismo procedimiento para determinar el *valor máximo* de una fuerza o de un par que puede ser aplicado a la banda o al tambor si el deslizamiento no debe ocurrir [problema resuelto 8.8].

Problemas

8.101 Un cabo se enrolla dos vueltas completas alrededor de un bolardo. Al ejercer una fuerza de 320 N sobre el extremo libre del cabo, un marinero puede resistir hasta 20 kN en el otro extremo del cabo. Determine *a*) el coeficiente de fricción estática entre el cabo y el bolardo, *b*) el número de veces que debe enrollarse el cabo en el bolardo si se debe resistir una fuerza de 80 kN al ejercer los mismos 320 N.

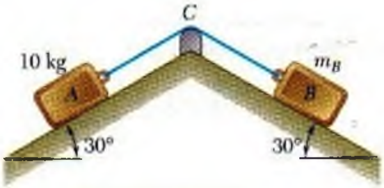


Figura *P8.102* y *P8.103*

8.102 Los bloques *A* y *B* se conectan por medio de un cable que pasa por el soporte *C* como indica la figura. La fricción entre los bloques y las superficies inclinadas se puede ignorar. Si el movimiento del bloque *B* hacia arriba de la superficie inclinada es inminente cuando $m_B = 8$ kg, determine *a*) el coeficiente de fricción estática entre la cuerda y el soporte, *b*) el valor máximo de m_B para el cual se mantiene el equilibrio. (*Sugerencia*: Vea el problema 8.128.)

8.103 Los bloques *A* y *B* se conectan mediante un cable que pasa por el soporte *C* como indica la figura. La fricción entre los bloques y las superficies inclinadas se puede ignorar. Si el coeficiente de fricción estática entre la cuerda y el soporte es de 0.50, determine el rango de valores de m_B para los cuales se mantiene el equilibrio. (*Sugerencia*: Vea el problema 8.128.)

8.104 En la figura se muestra un bloque de 120 kg sostenido mediante una cuerda que se encuentra enrollada $1\frac{1}{2}$ veces alrededor de una barra horizontal. Si el coeficiente de fricción estática entre la cuerda y la barra es de 0.15, determine el rango de valores de *P* para los cuales se mantiene el equilibrio.

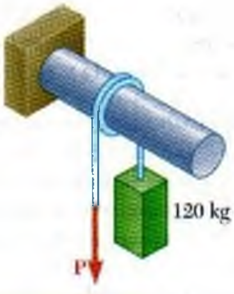


Figura P8.104

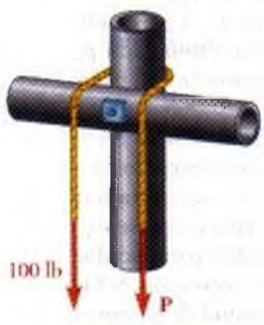


Figura P8.105 y P8.106

8.105 Si el coeficiente de fricción estática entre la cuerda y el tubo horizontal es de 0.25, y de 0.20 entre la cuerda y el tubo vertical, determine el rango de valores de *P* para los cuales se mantiene el equilibrio.

8.106 Si el coeficiente de fricción estática entre la cuerda y el tubo horizontal es de 0.30, y el valor mínimo de *P* para el cual se mantiene el equilibrio es de 20 lb, determine *a*) el valor máximo de *P* para el cual se mantiene el equilibrio, *b*) el coeficiente de fricción estática entre la cuerda y el tubo vertical.

8.107 En la figura se muestra el soporte de un motor de peso **W** de 175 lb el cual se utiliza para mantener tensa la banda motriz. Si el coeficien-

te de fricción estática entre la banda plana y los tambores A y B es de 0.40, y sin tomar en cuenta el peso de la plataforma CD, determine el par máximo que puede ser transmitido al tambor B cuando el tambor motriz A rota en el mismo sentido que las manecillas del reloj.

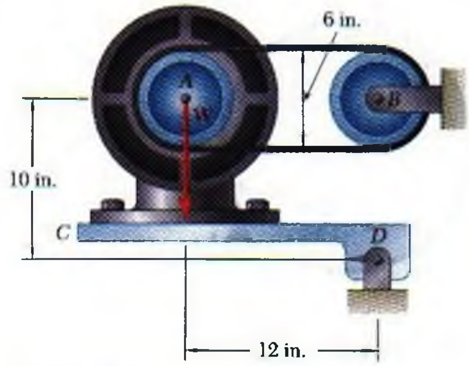


Figura P8.107

8.108 Resuelva el problema 8.107 suponiendo que el tambor motriz A rota en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

8.109 En la figura se muestra una lijadora portátil sobre cuyo tambor motriz B se aplica un par $\mathbf{M}_B$, con magnitud de 2.4 N · m, para mantener a la banda lijadora C moviéndose a velocidad constante. La fuerza total hacia abajo ejercida sobre la pieza de trabajo de madera E es de 48 N, y $\mu_k = 0.10$ entre la banda y la plancha de lijado D. Si $\mu_s = 0.35$ entre la banda y el tambor motriz y los radios de los tambores A y B son de 25 mm, determine *a*) la tensión mínima en la parte inferior de la banda si no debe ocurrir deslizamiento entre ésta y el tambor motriz, *b*) el valor del coeficiente de fricción cinética entre la banda y la pieza de trabajo.

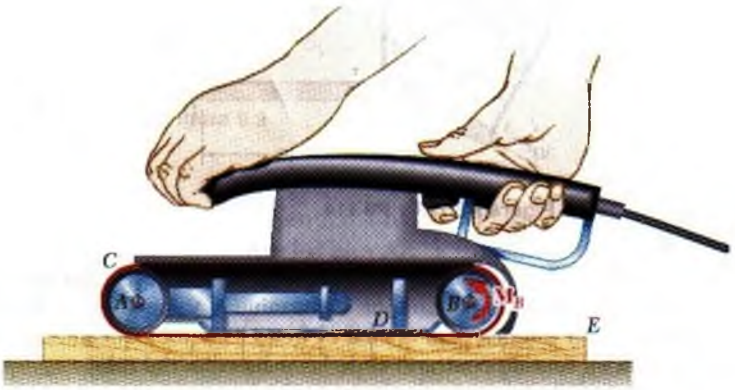


Figura P8.109

8.110 El aparato mostrado en la figura se utiliza para medir la salida de una turbina. Cuando el disco está en reposo, la lectura de cada medidor de resorte es de 70 N. Si se debe aplicar un par de 12.60 N · m al disco para mantenerlo rotando en el mismo sentido que las manecillas del reloj a velocidad constante, determine *a*) la lectura de cada medidor en ese momento, *b*) el coeficiente de fricción cinética. Suponga que la longitud de la banda no cambia.

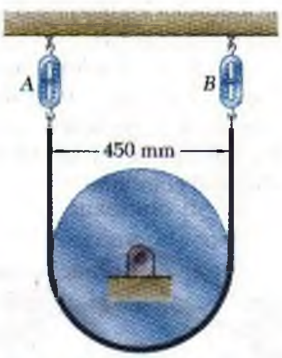


Figura P8.110 y P8.111

8.111 El aparato mostrado en la figura se utiliza para medir la salida de una turbina. El coeficiente de fricción cinética es de 0.20 y la lectura de cada medidor de resorte es de 80 N cuando el disco está en reposo. Determine *a*) la lectura de cada medidor cuando el disco está rotando en el mismo sentido que las manecillas del reloj a velocidad constante, *b*) el par que debe aplicarse al disco. Suponga que la longitud de la banda no cambia.

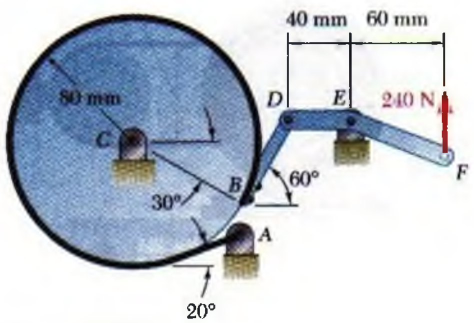


Figura P8.112

8.112 El freno de banda mostrado en la figura se utiliza para controlar la velocidad de un tambor en rotación. Determine la magnitud del par que debe aplicarse al tambor si el coeficiente de fricción cinética entre la banda y el tambor es de 0.25 y el tambor está rotando en el mismo sentido que las manecillas del reloj a velocidad constante.

8.113 El freno de banda diferencial mostrado en la figura se usa para controlar la velocidad del tambor, el cual rota a velocidad constante. Si el coeficiente de fricción cinética entre la banda y el tambor es de 0.30, y en este último se aplica un par con magnitud de 125 lb · ft, determine la magnitud correspondiente de la fuerza **P** que se ejerce sobre el extremo D de la palanca cuando el tambor está rotando en un sentido *a*) similar al de las manecillas del reloj, *b*) opuesto al de las manecillas del reloj.

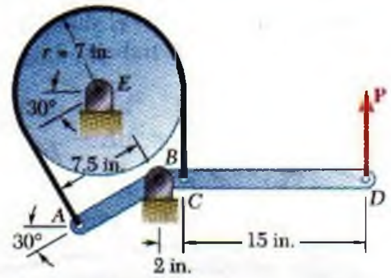


Figura *P8.113* y P8.114

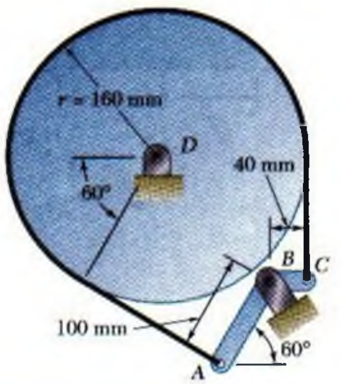


Figura P8.115

8.114 El freno de banda diferencial que se muestra en la figura se usa para controlar la velocidad del tambor. Determine el valor mínimo del coeficiente de fricción estática para el cual el freno es autobloqueante cuando el tambor rota en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

8.115 El freno de tambor mostrado en la figura permite la rotación del tambor en el mismo sentido que las manecillas del reloj, pero impide que rote en dirección inversa. Si la tensión máxima permitida en la banda es de 4.5 kN, determine *a*) la magnitud del par máximo que se puede aplicar al tambor en un sentido inverso al de las manecillas del reloj, *b*) el valor mínimo del coeficiente de fricción estática entre la banda y el tambor para el cual el tambor no rotará en sentido inverso al de las manecillas del reloj.

8.116 En la figura se muestran los bloques A y C conectados por medio de una cuerda que pasa sobre el tambor B. Si el tambor rota lentamente en el mismo sentido que las manecillas del reloj, y los coeficientes de fricción en todas las superficies son $\mu_s = 0.30$ y $\mu_k = 0.20$, determine la masa mínima del bloque C para que el bloque A, *a*) permanezca en reposo, *b*) comience a moverse hacia arriba del plano inclinado, *c*) continúe su movimiento hacia arriba del plano inclinado a velocidad constante.

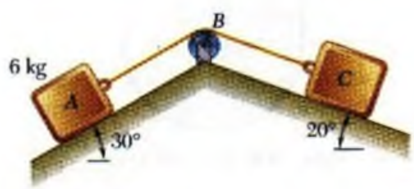


Figura P8.116

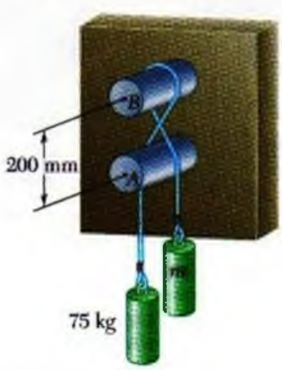


Figura P8.117

8.117 Una cuerda se coloca sobre dos cilindros de 100 mm de diámetro. Si los coeficientes de fricción son $\mu_s = 0.30$ y $\mu_k = 0.25$, determine la masa m máxima que puede elevarse cuando el cilindro B se rota lentamente y el cilindro A se mantiene fijo.

8.118 y 8.120 Un cable que pasa por tres poleas de 2 in. de radio sostiene dos bloques como indican las figuras. Las poleas C y E están bloqueadas para evitar su rotación, y los coeficientes de fricción entre el cable y las poleas son $\mu_s = 0.20$ y $\mu_k = 0.15$. Determine el rango de valores de la masa del bloque A para los cuales se mantiene el equilibrio si la polea D, *a*) está bloqueada, *b*) puede rotar libremente.

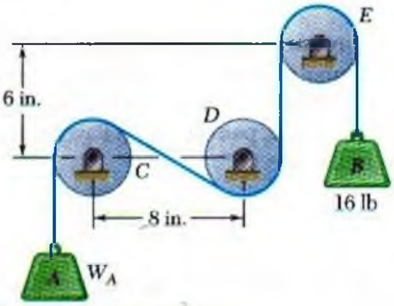


Figura P8.118 y *P8.119*

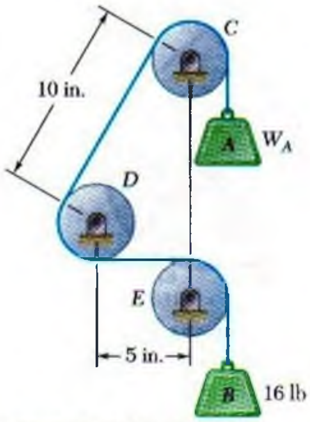


Figura P8.120 y *P8.121*

8.119* y *8.121 Un cable que pasa por tres poleas de 2 in. de radio sostiene dos bloques como indican las figuras. Dos de las poleas están bloqueadas para evitar su rotación, mientras que la tercera polea es rotada lentamente a velocidad constante. Si los coeficientes de fricción entre el cable y las poleas son $\mu_s = 0.20$ y $\mu_k = 0.15$, determine el peso máximo W_A que puede ser levantado si la polea que gira *a*) es C, *b*) es E.

8.122 En la figura se muestra una cinta de grabación que pasa sobre el tambor motriz B de 20 mm de radio y bajo el tambor inactivo C. Si los coeficientes de fricción entre la cinta y los tambores son $\mu_s = 0.40$ y $\mu_k = 0.30$, y el tambor C puede girar libremente, determine el valor mínimo permisible de P para que la cinta y el tambor B no se deslicen entre sí.

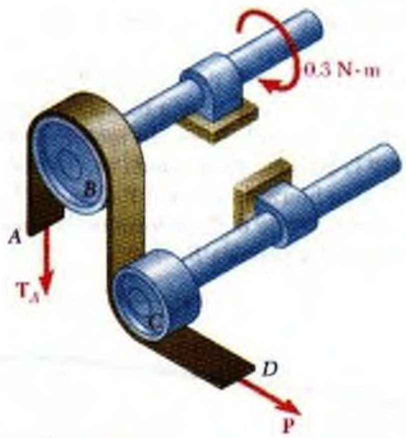


Figura P8.122

8.123 Resuelva el problema 8.122 suponiendo que el tambor inactivo C está fijo y no puede girar.

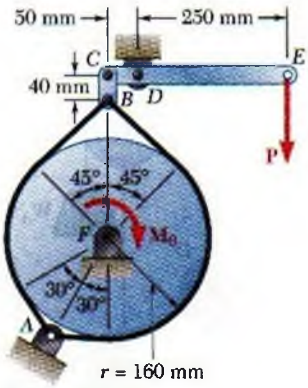


Figura P8.124

8.124 Para el freno de banda que muestra la figura, la tensión máxima permitida en cualquier banda es de 5.6 kN. Si el coeficiente de fricción estática entre la banda y el tambor de 160 mm de radio es de 0.25, determine *a*) el momento máximo $\mathbf{M}_0$ que se puede aplicar al tambor en el mismo sentido que las manecillas del reloj si no debe existir deslizamiento, *b*) la fuerza **P** correspondiente ejercida sobre el extremo *E* de la palanca.

8.125 Resuelva el problema 8.124 suponiendo que el momento aplicado al tambor tiene un sentido inverso al de las manecillas del reloj.

8.126 La figura muestra una llave de correa, la cual es empleada para sujetar fuertemente el tubo sin dañar la superficie externa del mismo. Si el coeficiente de fricción estática es igual para todas las superficies de contacto, determine el valor mínimo de μ_s para el cual la llave se autobloqueará cuando $a = 200$ mm, $r = 30$ mm y $\theta = 65°$.

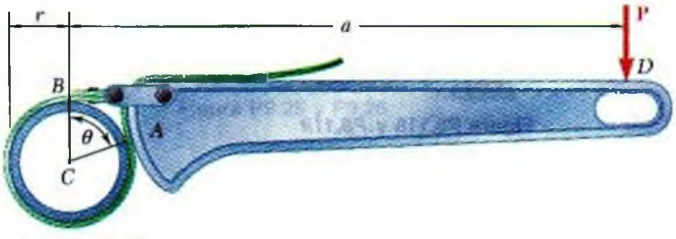


Figura P8.126

8.127 Resuelva el problema 8.126 suponiendo que $\theta = 75°$.

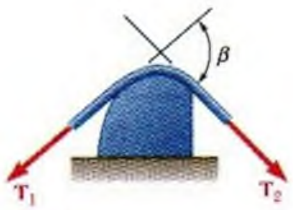


Figura P8.128

8.128 Demuestre que las ecuaciones (8.13) y (8.14) son válidas para cualquier forma que tenga la superficie mostrada en la figura, siempre y cuando el coeficiente de fricción sea el mismo en todos los puntos de contacto.

8.129 Complete la derivación de la ecuación (8.15), la cual relaciona la torsión presente en ambos extremos de una banda en V.

8.130 Resuelva el problema 8.107 suponiendo que la banda plana y los tambores se reemplazan con una banda en V y poleas también en V con $\alpha = 36°$. (El ángulo α se muestra en la figura 8.15*a*.)

8.131 Las poleas *A* y *B* en V tienen diámetros de 4 y 8 in., respectivamente, y están conectadas mediante una banda en V para la cual $\alpha = 36°$. La polea *A* está montada sobre el eje de un motor eléctrico que desarrolla un par $M = 5$ lb · ft, y la tensión en la banda se controla por medio de un mecanismo que aplica una fuerza horizontal **P** al eje de la polea *B*. Si el coeficiente de fricción estática es de 0.35, determine la magnitud de **P** cuando el par máximo se transmite a la polea *B*.

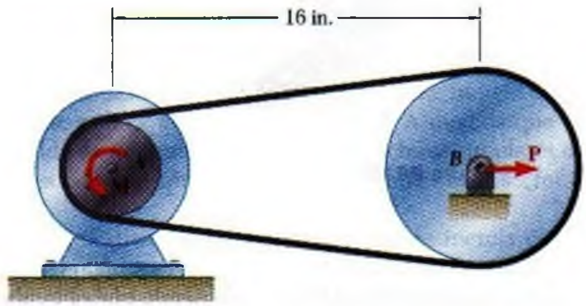


Figura P8.131

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 8

Este capítulo estuvo dedicado al estudio de la *fricción seca*, esto es, a problemas que involucran cuerpos rígidos que están en contacto a lo largo de *superficies que no están lubricadas*.

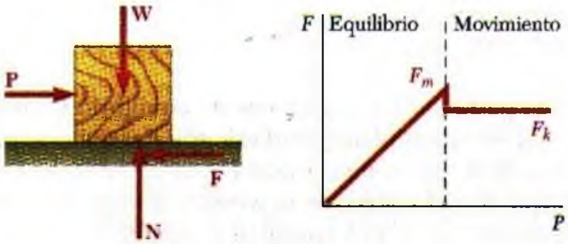


Figura 8.16

Fricción estática y cinética

Al aplicar una fuerza horizontal **P** a un bloque que descansa sobre una superficie horizontal [sección 8.2], se observa que al principio el bloque no se mueve. Lo anterior hace evidente que se debe haber desarrollado una *fuerza de fricción* **F** para equilibrar la fuerza **P** (figura 8.16). Conforme se incrementa la magnitud de **P**, la magnitud de **F** también se incrementa hasta que alcanza un valor máximo F_m. Si **P** se incrementa aún más, el bloque comienza a deslizarse y la magnitud de **F** disminuye súbitamente de F_m a un valor menor F_k. La evidencia experimental muestra que F_m y F_k son proporcionales a la componente normal N de la reacción de la superficie. Por tanto, se tiene que

$$F_m = \mu_s N \qquad F_k = \mu_k N \qquad (8.1, 8.2)$$

donde μ_s y μ_k reciben el nombre de *coeficiente de fricción estática* y de *coeficiente de fricción cinética*, respectivamente. Estos coeficientes dependen de la naturaleza y de la condición de las superficies que están en contacto. En la tabla 8.1 se proporcionan valores aproximados para los coeficientes de fricción estática.

Ángulos de fricción

Algunas veces es conveniente reemplazar la fuerza normal **N** y la fuerza de fricción **F** por su resultante **R** (figura 8.17). A medida que la fuerza de fricción se incrementa y alcanza su valor máximo $F_m = \mu_s N$, el ángulo ϕ que **R** forma con la normal a la superficie se incrementa y alcanza un valor máximo ϕ_s, llamado *ángulo de fricción estática*. Si en realidad ocurre el movimiento, la magnitud de **F** disminuye súbitamente a F_k; en forma similar, el ángulo ϕ decae a un valor menor ϕ_k, el cual recibe el nombre de *ángulo de fricción cinética*. Como se demostró en la sección 8.3, se tiene que

$$\tan \phi_s = \mu_s \qquad \tan \phi_k = \mu_k \qquad (8.3, 8.4)$$

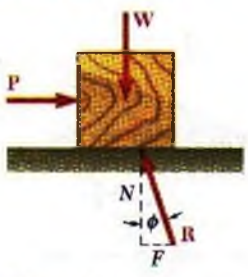


Figura 8.17

Problemas que involucran fricción

Cuando se resuelven problemas de equilibrio que involucran fricción, se debe resordar que la magnitud F de la fuerza de fricción es igual a $F_m = \mu_s N$ *sólo si el cuerpo está a punto de deslizarse* [sección 8.4]. *Si el movimiento no es inminente,* F y N deben considerarse como *incógnitas independientes*, las cuales deben de-

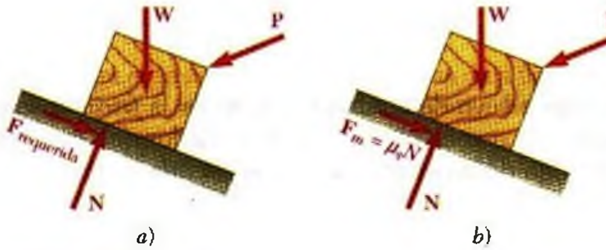


Figura 8.18

terminarse a partir de las ecuaciones de equilibrio (figura 8.18*a*). También se debe comprobar que el valor de F requerido para mantener el equilibrio no es mayor que F_m; si el valor de F llegara a ser mayor que F_m, el cuerpo se movería y la magnitud de la fuerza de fricción sería $F_k = \mu_k N$ [problema resuelto 8.1]. Por otra parte, *si se sabe que el movimiento es inminente*, F ha alcanzado su valor máximo $F_m = \mu_s N$ (figura 8.18*b*) y la expresión anterior puede sustituirse en lugar de F en las ecuaciones de equilibrio [problema resuelto 8.3]. Cuando sólo están involucradas tres fuerzas en un diagrama de cuerpo libre, incluyendo la reacción **R** de la superficie en contacto con el cuerpo, es más conveniente resolver el problema con un triángulo de fuerzas [problema resuelto 8.2].

Cuando un problema involucra el análisis de las fuerzas ejercidas entre sí por *dos cuerpos A* y *B*, es importante mostrar las fuerzas de fricción con sus sentidos correctos. Por ejemplo, el sentido correcto para la fuerza de fricción ejercida por B sobre A es opuesto al sentido del *movimiento relativo* (o movimiento inminente) de A con respecto a B [figura 8.6].

Cuñas y tornillos

En la segunda parte del capítulo se considera cierto número de aplicaciones específicas de ingeniería en las cuales la fricción seca juega un papel importante. En el caso de *cuñas*, las cuales son máquinas simples que se utilizan para levantar cargas pesadas [sección 8.5], se dibujaron dos o más diagramas de cuerpo libre y se tuvo cuidado de mostrar cada fueza de fricción con su sentido correcto [problema resuelto 8.4]. El análisis de *tornillos de rosca cuadrada*, los cuales se utilizan con frecuencia en gatos, prensas y otros mecanismos, se redujo al análisis de un bloque que se desliza sobre un plano inclinado al desenrollar la rosca del tornillo y mostrarla como una línea recta [sección 8.6]. Lo anterior se hace nuevamente en la figura 8.19, donde r representa el *radio promedio de la rosca*, L es el *avance del tornillo*, esto es, la distancia a través de la cual avanza el tornillo en una vuelta, **W** es la carga y Qr es igual al momento torsional ejercido sobre el tornillo. Se señaló que en el caso de tornillos de rosca múltiple, el avance L del tornillo *no* es igual a su paso, el cual es la distancia medida entre dos roscas consecutivas.

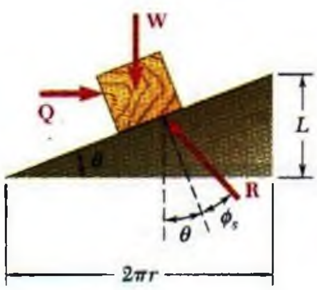


Figura 8.19

Otras aplicaciones de ingeniería que se consideraron en este capítulo fueron las *chumaceras* y la *fricción en ejes* [sección 8.7], los *cojinetes de empuje* y la *fricción en discos* [sección 8.8], la *fricción en ruedas* y la *resistencia a la rodadura* [sección 8.9] y la *fricción en bandas* [sección 8.10].

Fricción en bandas

Al resolver problemas que involucran a una *banda plana* que pasa sobre un cilindro fijo, es importante determinar primero la dirección en la que se desliza o está a punto de deslizarse la banda. Si el tambor está girando, el movimiento o el movimiento inminente de la banda se debe determinar *relativo* al tambor. Por ejemplo, si la banda mostrada en la figura 8.20 está a punto de deslizarse hacia la derecha con respecto al tambor, las fuerzas de fricción ejercidas por el tambor sobre la banda estarán dirigidas hacia la izquierda y la tensión será más grande en la porción del lado derecho de la banda que en la porción del lado izquierdo de la misma. Representando a la tensión más grande con T_2, a la tensión más pequeña con T_1, al coeficiente de fricción estática con μ_s, y al ángulo (en radianes) subtendido por la banda con β, en la sección 8.10 se derivaron las siguientes fórmulas

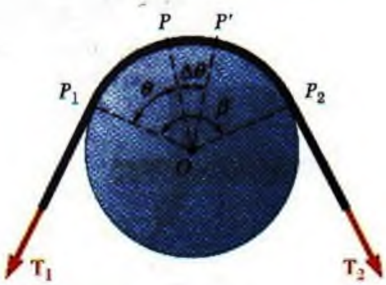


Figura 8.20

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu_s \beta \quad (8.13)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta} \quad (8.14)$$

las cuales se utilizaron para resolver los problemas resueltos 8.7 y 8.8. Si realmente la banda se desliza sobre el tambor, se puede reemplazar en ambas ecuaciones el coeficiente de fricción estática μ_s por el coeficiente de fricción cinética μ_k.

Problemas de repaso

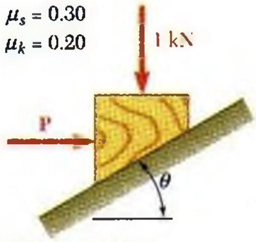


Figura P8.132

8.132 Determine si el bloque mostrado en la figura está en equilibrio, y encuentre la magnitud y dirección de la fuerza de fricción cuando $\theta = 30°$ y $P = 200$ N.

8.133 Considere sólo valores de θ menores a 90° para determinar el valor mínimo requerido por θ para que el bloque comience a moverse hacia la derecha cuando *a*) $m = 30$ kg, *b*) $m = 40$ kg.

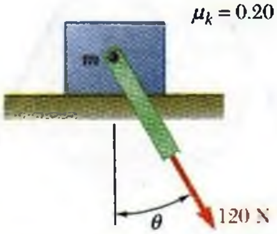


Figura P8.133

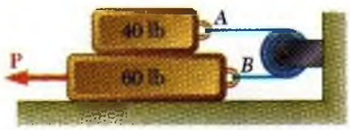


Figura *P8.134*

8.134 Los coeficientes de fricción presentes entre todas las superficies de contacto son $\mu_s = 0.40$ y $\mu_k = 0.30$. Determine la fuerza **P** requerida para que el bloque de 60 lb comience a moverse cuando el cable *AB*, *a*) se une como indica la figura, *b*) se retira.

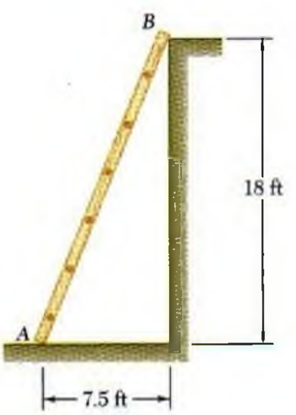


Figura P8.135

8.135 La escalera *AB* de 19.5 ft de longitud se apoya sobre la pared que muestra la figura. Si el coeficiente de fricción estática μ_s en *A* y en *B* es igual, determine el valor mínimo de μ_s para el cual se mantiene el equilibrio.

8.136 Una ventana corrediza con 4 kg de masa se sostiene normalmente mediante dos bandas de 2 kg. Si la ventana permanece abierta después que una de las bandas se rompe, determine el valor mínimo posible del coeficiente de fricción estática. (Suponga que las bandas son ligeramente más pequeñas que el marco y que sólo están atadas en los puntos *A* y *D*.)

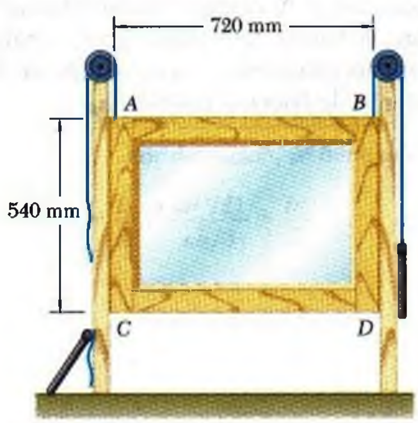


Figura P8.136

8.137 Un collarín B de peso W está unido al resorte AB y puede moverse libremente a lo largo de la barra mostrada en la figura. La constante del resorte es de 1.5 kN/m y éste se encuentra sin deformar cuando $\theta = 0$. Si el coeficiente de fricción estática entre la barra y el collarín es de 0.40, determine el rango de valores de W para los cuales el sistema se mantiene en equilibrio cuando *a)* $\theta = 20°$, *b)* $\theta = 30°$.

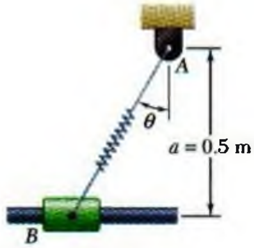


Figura P8.137

8.138 En la figura se muestran dos barras delgadas de peso insignificante unidas mediante un perno colocado en C y conectadas a los bloques A y B, los cuales tienen un peso W cada uno. Si $\theta = 70°$ y el coeficiente de fricción estática entre los bloques y la superficie horizontal es de 0.30, determine el valor máximo de P para el cual se mantiene el equilibrio.

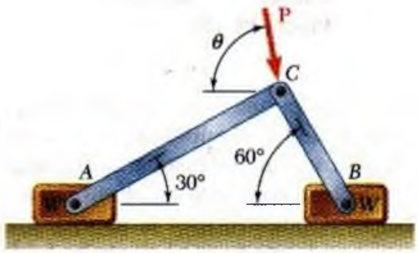


Figura *P8.138*

8.139 En la figura se muestra un bloque A que sostiene una columna tubular y está apoyado sobre la cuña B. Si el coeficiente de fricción estática en todas las superficies de contacto es de 0.25 y $\theta = 45°$, determine la fuerza mínima **P** requerida para levantar el bloque A.

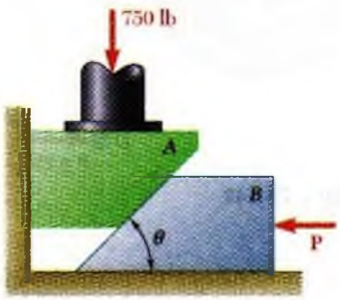


Figura P8.139

8.140 En la figura se muestran dos barras fijas A y B cuyos extremos fueron manufacturados con forma de tornillo de rosca sencilla de 0.3 in., de radio medio y paso de 0.1 in. La barra A tiene rosca derecha mientras que la barra B tiene rosca izquierda. El coeficiente de fricción estática entre las barras y la manga roscada es de 0.12. Determine la magnitud del par que debe aplicarse en la manga para que las dos barras se unan.



Figura *P8.140*

8.141 Una polea de 120 mm de radio y masa de 5 kg se fija a un eje de 30 mm de radio que se ajusta holgadamente al cojinete fijo mostrado en la figura. Se observa que la polea comenzará a rotar si se agrega una masa de 0.5 kg al bloque *A*. Determine el coeficiente de fricción estática presente entre el eje y el cojinete.

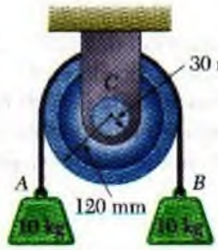


Figura P8.141

8.142 La figura muestra una banda empleada para controlar la velocidad del volante. Determine la magnitud del par que debe aplicarse al volante si el coeficiente de fricción cinética entre la banda y el volante es de 0.25 y éste rota con velocidad constante en el mismo sentido que las manecillas del reloj. Además, demuestre que se obtendría el mismo resultado si el volante rotara en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

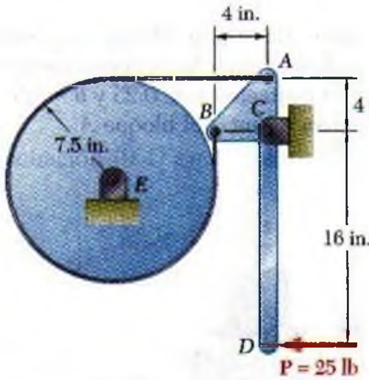


Figura P8.142

8.143 La cubeta *A* y el bloque *C* mostrados en la figura se conectan mediante un cable que pasa sobre el tambor *C*. Si el tambor rota lentamente en sentido contrario al de las manecillas del reloj y los coeficientes de fricción en todas las superficies son $\mu_s = 0.35$ y $\mu_k = 0.25$, determine el peso mínimo combinado *W* de la cubeta y su contenido para que el bloque *C*, *a*) permanezca en reposo, *b*) comience a moverse hacia arriba del plano inclinado, *c*) continúe su movimiento hacia arriba del plano inclinado con velocidad constante.

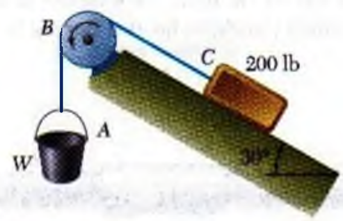


Figura *P8.143*

Problemas de computadora

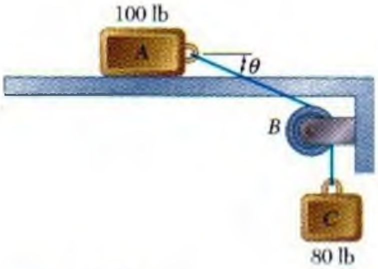


Figura P8.C1

8.C1 En la figura se muestran dos bloques conectados entre sí mediante un cable. Si el coeficiente de fricción estática entre el bloque A y la superficie horizontal varía entre 0 y 0.6, determine los valores de θ para los cuales el movimiento es inminente y grafique estos valores como una función del coeficiente de fricción estática.

8.C2 En la figura se muestra una barra delgada AB de longitud l = 15 in., que está unida a un collarín en A y descansa sobre una rueda a una distancia vertical a = 2.5 in., medida desde la barra horizontal sobre la que se desliza el collarín. Sin tomar en cuenta la fricción en C, utilice un programa de cómputo para determinar el rango de valores de la magnitud de **Q** para los cuales se mantiene el equilibrio. Grafique los valores máximo y mínimo de **Q** como funciones del coeficiente de fricción estática para $0.10 \leq \mu_s \leq 0.55$ cuando P = 15 lb y θ = 20°.

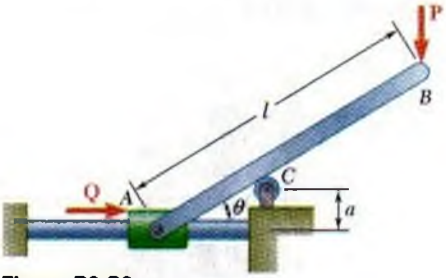


Figura P8.C2

8.C3 Un soporte inclinado que se mantiene en la posición mostrada en la figura sostiene los bloques A y B. Si la masa del bloque A es de 10 kg y el coeficiente de fricción estática entre todas las superficies en contacto es de 0.15, utilice un programa computacional para determinar el valor de θ para el cual el movimiento es inminente, considere que la masa del bloque B varía desde 0 hasta 50 kg y use incrementos de 5 kg.

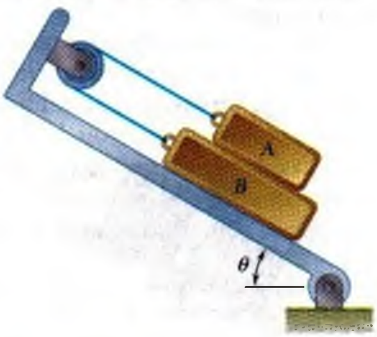


Figura P8.C3

8.C4 La posición de la barra AB de 20 lb se controla mediante el bloque de 4 lb que se desplaza lentamente hacia la izquierda al aplicarle la fuerza **P** mostrada en la figura. Si el coeficiente de fricción cinética presente entre todas las superficies en contacto es de 0.25, utilice un programa computacional para graficar la magnitud P de la fuerza como una función de x para valores que van desde 45 hasta 5 in. Determine el valor máximo de P y el valor correspondiente de x.

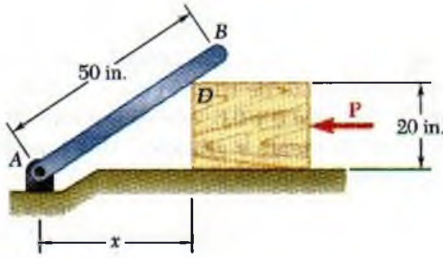


Figura P8.C4

8.C5 El cilindro C de 0.6 lb se apoya sobre el cilindro D como indica la figura. Si el coeficiente de fricción estática μ_s tiene el mismo valor en A y B, utilice un programa computacional para determinar el valor máximo del par **M** que debe aplicarse al cilindro D, en sentido contrario al de las manecillas del reloj, para que dicho cilindro no rote. Considere valores de μ_s desde 0 hasta 0.40 en incrementos de 0.05.

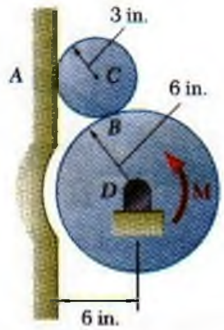


Figura P8.C5

8.C6 Dos cuñas idénticas de masa insignificante se usan para mover y poner en posición un bloque de 200 kg, como indica la figura. Si el coeficiente de fricción estática μ_s es el mismo entre todas las superficies de contacto, grafique la magnitud de la fuerza **P**, para la cual el movimiento del bloque es inminente, como una función de μ_s para $0.2 \leq \mu_s \leq 0.8$ cuando *a)* $\theta = 8°$, *b)* $\theta = 10°$, *c)* $\theta = 12°$.

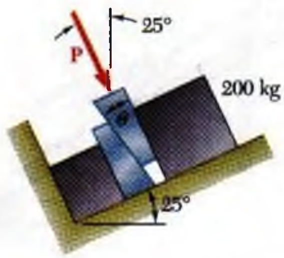


Figura P8.C6

8.C7 El eje de la polea que muestra la figura está fijo y no puede rotar respecto al bloque. Si el coeficiente de fricción estática entre el cable *ABCD* y la polea varía desde 0 hasta 0.55, determine *a*) los valores correspondientes de θ para los cuales el sistema se mantiene en equilibrio, *b*) las reacciones correspondientes en *A* y *D*, y *c*) grafique los valores de θ como una función del coeficiente de fricción.

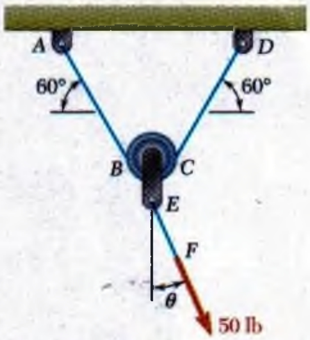


Figura P8.C7

8.C8 Un cable pasa alrededor de dos poleas de 50 mm de radio cada una y sostiene dos bloques como indica la figura. La polea *B* sólo puede rotar en el mismo sentido que las manecillas del reloj, y la polea *C* gira únicamente en el sentido inverso. Si el coeficiente de fricción estática entre el cable y las poleas es de 0.25, grafique los valores máximo y mínimo de la masa del bloque *D*, para los cuales se mantiene el equilibrio, como una función de θ para $15° \leq \theta \leq 40°$.

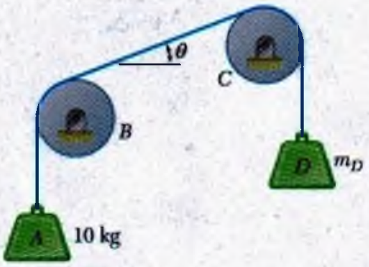


Figura P8.C8

8.C9 En la figura se muestra una banda plana utilizada para transmitir un momento de torsión desde el tambor *A* hasta el tambor *B*, los cuales tienen radio de 4 in., cada uno. El sistema se equipa con una rueda inactiva *C* que se emplea para incrementar el contacto entre la banda y los tambores. La tensión permisible en la banda es de 50 lb, y el coeficiente de fricción estática entre la banda y los tambores es de 0.30. Usando un programa computacional, calcule y grafique el momento de torsión máximo que puede ser transmitido como una función de θ para $0 \leq \theta \leq 30°$.

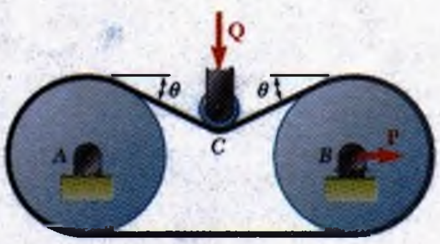


Figura P8.C9

CAPÍTULO 9

Fuerzas distribuidas: momentos de inercia



La resistencia de los elementos estructurales depende en gran medida de las propiedades de sus secciones transversales, en particular de los segundos momentos —o momentos de inercia— de sus áreas.

FUERZAS DISTRIBUIDAS: MOMENTOS DE INERCIA

9.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo 5 se analizaron varios sistemas de fuerzas que estaban distribuidas sobre un área o volumen. Los tres tipos principales de fuerzas que se consideraron fueron: 1) los pesos de placas homogéneas de espesor uniforme (secciones 5.3 a la 5.6), 2) las cargas distribuidas que actúan sobre vigas (sección 5.8) y las fuerzas hidrostáticas (sección 5.9) y 3) los pesos de cuerpos tridimensionales homogéneos (secciones 5.10 y 5.11). En el caso de placas homogéneas, la magnitud ΔW del peso de un elemento de una placa fue proporcional al área ΔA de dicho elemento. Para las cargas distribuidas que actuaban sobre vigas, la magnitud ΔW de cada peso elemental fue representado con un elemento de área $\Delta A = \Delta W$ bajo la curva de carga; por otra parte, en el caso de fuerzas hidrostáticas que actuaban sobre superficies rectangulares sumergidas, se siguió un procedimiento similar. En el caso de cuerpos tridimensionales homogéneos, la magnitud ΔW del peso de un elemento del cuerpo era proporcional al volumen ΔV de dicho elemento. Por tanto, en todos los casos que se consideraron en el capítulo 5, las fuerzas distribuidas eran proporcionales a las áreas o a los volúmenes elementales asociados con éstas. Por consiguiente, la resultante de dichas fuerzas se podía obtener con la suma de las áreas o los volúmenes correspondientes y el momento de la resultante con respecto a cualquier eje dado se podía determinar al calcular los primeros momentos de las áreas o de los volúmenes con respecto a dicho eje.

En la primera parte del presente capítulo se estudian fuerzas distribuidas $\Delta \mathbf{F}$ cuyas magnitudes no sólo dependen de los elementos de área ΔA sobre los cuales actúan éstas, sino que también dependen de la distancia que hay desde ΔA hasta algún eje dado. En forma más precisa, se supone que la magnitud de la fuerza por unidad de área $\Delta F/\Delta A$ varía linealmente con la distancia al eje bajo consideración. Como se señala en la siguiente sección, las fuerzas de este tipo se presentan en el estudio de la flexión de vigas y en problemas que involucran superficies sumergidas que no son rectangulares. Si las fuerzas elementales involucradas están distribuidas sobre un área A y varían linealmente con la distancia y al eje x, se demostrará que mientras que la magnitud de su resultante $\mathbf{R}$ depende del primer momento $Q_x = \int y\, dA$ del área A, la ubicación del punto donde se aplica $\mathbf{R}$ depende del *segundo momento*, o *momento de inercia*, $I_x = \int y^2\, dA$ de la misma área con respecto al eje x. Se aprenderá a calcular los momentos de inercia de diversas áreas con respecto a ejes x y y dados. Además, en la primera parte de este capítulo se introduce el *momento polar de inercia* $J_O = \int r^2\, dA$ de un área, donde r es la distancia desde el elemento de área dA hasta el punto O. Para facilitar los cálculos, se establecerá una relación entre el momento de inercia I_x de un área A con respecto a un eje x dado y el momento de inercia $I_{x'}$ de la misma área con respecto al eje centroidal paralelo x' (teorema de los ejes paralelos). También se estudiará la transformación de los momentos de inercia de un área dada cuando se rotan los ejes coordenados (secciones 9.9 y 9.10).

En la segunda parte del capítulo se aprenderá cómo determinar los momentos de inercia de varias *masas* con respecto a un eje dado. Como se verá en la sección 9.11, el momento de inercia de una masa dada con respecto a un eje AA' se define como $I = \int r^2\, dm$, donde r es la distancia desde el eje AA' hasta el elemento de masa dm. Los momentos de inercia de masas se encuentran en la dinámica en problemas que involucran la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje. Para facilitar el cálculo del momento de inercia de masa, se introducirá el teorema de los ejes paralelos (sección 9.12). Por último, se aprenderá a analizar la trans-

formación de momentos de inercia de masas cuando se rotan los ejes coordenados (secciones 9.16 a la 9.18).

MOMENTOS DE INERCIA DE ÁREAS

9.2. SEGUNDO MOMENTO, O MOMENTO DE INERCIA, DE UN ÁREA

En la primera parte de este capítulo se estudian fuerzas distribuidas $\mathbf{\Delta F}$ cuyas magnitudes ΔF son proporcionales a los elementos de área ΔA sobre los cuales actúan dichas fuerzas y, que al mismo tiempo, varían linealmente con la distancia que hay desde ΔA hasta un eje dado.

Por ejemplo, considérese una viga de sección transversal uniforme, la cual está sometida a dos pares iguales y opuestos que están aplicados en cada uno de los extremos de la viga. Se dice que una viga en estas condiciones está en *flexión pura* y en la mecánica de materiales se demuestra que las fuerzas internas en cualquier sección de la viga son fuerzas distribuidas cuyas magnitudes $\Delta F = ky\ \Delta A$ varían linealmente con la distancia y que hay entre el elemento de área ΔA y un eje que pasa a través del centroide de la sección. Dicho eje, representado por el eje x en la figura 9.1, se conoce como el *eje neutro* de la sección. Las fuerzas en un lado del eje neutro son fuerzas de compresión, mientras que las fuerzas en el otro lado son fuerzas de tensión; sobre el propio eje neutro las fuerzas son iguales a cero.

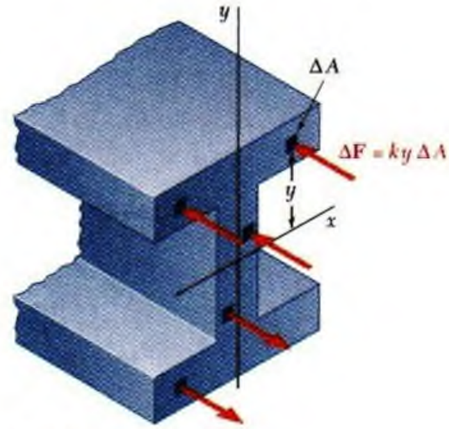


Figura 9.1

La magnitud de la resultante $\mathbf{R}$ de las fuerzas elementales $\mathbf{\Delta F}$ que actúan sobre toda la sección es

$$R = \int ky\ dA = k \int y\ dA$$

La última integral obtenida se conoce como el *primer momento* Q_x de la sección con respecto al eje x; ésta es igual a $\bar{y}A$ y, por tanto, es igual a cero puesto que el centroide de la sección está ubicado sobre el eje x. Por consiguiente, el sistema de fuerzas $\mathbf{\Delta F}$ se reduce a un par. La magnitud M de dicho par (momento flector) debe ser igual a la suma de los momentos $\Delta M_x = y\ \Delta F = ky^2\ \Delta A$ de las fuerzas elementales. Al integrar sobre toda la sección se obtiene

$$M = \int ky^2\ dA = k \int y^2\ dA$$

La última integral se conoce como el *segundo momento*, o *momento de inercia*,[†] de la sección de la viga con respecto al eje x y se representa con I_x. Éste se obtiene con la multiplicación de cada elemento de área dA por el *cuadrado de su distancia* desde el eje x e integrándolo sobre la sección de la viga. Como cada producto $y^2\ dA$ es positivo, sin importar el signo de y, o cero (si y es cero), la integral I_x siempre será positiva.

Otro ejemplo de un segundo momento o momento de inercia de un área lo proporciona el siguiente problema de hidrostática: una compuerta circular vertical utilizada para cerrar el escurridero de un depósito grande está sumergida bajo el agua, como se muestra en la figura 9.2. ¿Cuál es la resultante de las fuerzas ejercidas por el agua sobre la compuerta y cuál es el momento de la resultante con respecto a la línea de intersección del plano de la compuerta y la superficie del agua (eje x)?

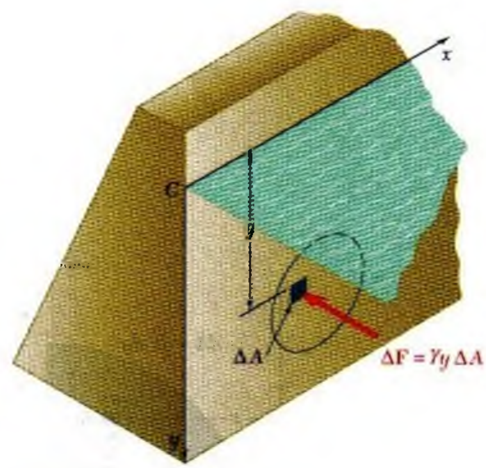


Figura 9.2

[†]El término *segundo momento* es más apropiado que el término *momento de inercia* puesto que, por lógica, este último sólo debería utilizarse para denotar integrales de masa (véase sección 9.11). Sin embargo, en la práctica de la ingeniería se utiliza el término momento de inercia para referirse tanto a áreas como a masas.

Si la compuerta fuera rectangular, la resultante de las fuerzas de presión se podría determinar a partir de la curva de presión, como se hizo en la sección 5.9. Sin embargo, puesto que la compuerta es circular, se debe utilizar un método más general. Representando con y la profundidad de un elemento de área ΔA y con γ el peso específico del agua, la presión en el elemento es $p = \gamma y$ y la magnitud de la fuerza elemental ejercida sobre ΔA es $\Delta F = p\,\Delta A = \gamma y\,\Delta A$. Por tanto, la magnitud de la resultante de las fuerzas elementales es

$$R = \int \gamma y\, dA = \gamma \int y\, dA$$

y se puede obtener calculando el primer momento $Q_x = \int y\, dA$ del área de la compuerta con respecto al eje x. El momento M_x de la resultante debe ser igual a la suma de los momentos $\Delta M_x = y\,\Delta F = \gamma y^2\,\Delta A$ de las fuerzas elementales. Al integrar sobre el área de la compuerta, se tiene que

$$M_x = \int \gamma y^2\, dA = \gamma \int y^2\, dA$$

Aquí la integral obtenida representa el segundo momento o momento de inercia I_x del área con respecto al eje x.

9.3. DETERMINACIÓN DEL MOMENTO DE INERCIA DE UN ÁREA POR INTEGRACIÓN

En la sección anterior se definió el segundo momento o momento de inercia de un área A con respecto al eje x. Definiendo de forma similar el momento de inercia I_y del área A con respecto al eje y, se escribe (figura 9.3*a*)

$$I_x = \int y^2\, dA \qquad I_y = \int x^2\, dA \tag{9.1}$$

Estas integrales, conocidas como los *momentos rectangulares de inercia* del área A, se pueden evaluar con facilidad si se selecciona a dA como una tira delgada paralela a uno de los ejes coordenados. Para calcular I_x, la tira se selecciona paralela al eje x, de manera que todos los puntos de dicha tira estén a la misma distancia y del eje x (figura 9.3*b*); entonces, se obtiene el momento de inercia dI_x de la tira multiplicando su área dA por y^2. Para calcular I_y, la tira se selecciona paralela al eje y de forma que todos los puntos de dicha tira estén a la misma distancia x del eje y (figura 9.3*c*); así, el momento de inercia dI_y de la tira es $x^2\, dA$.

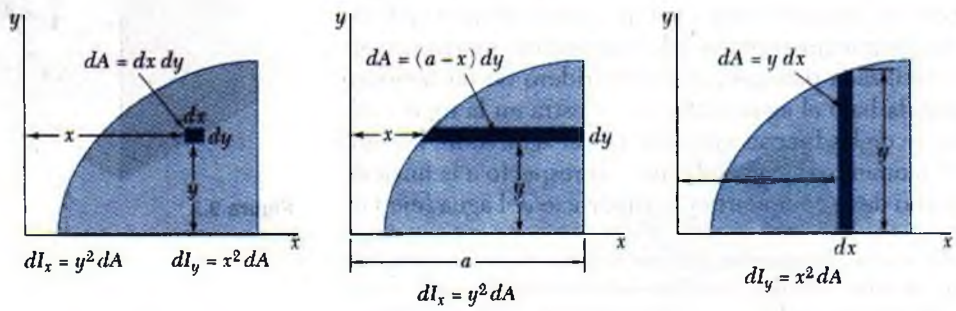


Figura 9.3 *a*) *b*) *c*)

Momento de inercia de un área rectangular. Como un ejemplo, se procederá a determinar el momento de inercia de un rectángulo con respecto a su base (figura 9.4). Dividiendo el rectángulo en tiras paralelas al eje x, se obtiene

$$dA = b\,dy \qquad dI_x = y^2 b\,dy$$

$$I_x = \int_0^h by^2\,dy = \tfrac{1}{3}bh^3 \tag{9.2}$$

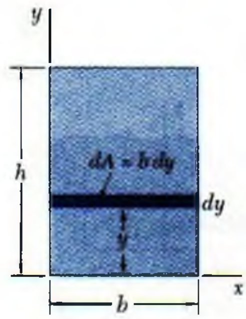


Figura 9.4

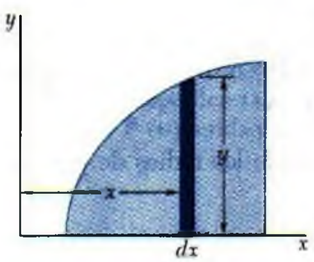
Cálculo de I_x e I_y con el uso de las mismas tiras elementales. La fórmula que se acaba de derivar se puede utilizar para determinar el momento de inercia dI_x con respecto al eje x de una tira rectangular que es paralela al eje y, como la tira mostrada en la figura 9.3c. Estableciendo $b = dx$ y $h = y$ en la fórmula (9.2), se escribe

$$dI_x = \tfrac{1}{3}y^3\,dx$$

Por otra parte, se tiene que

$$dI_y = x^2\,dA = x^2 y\,dx$$

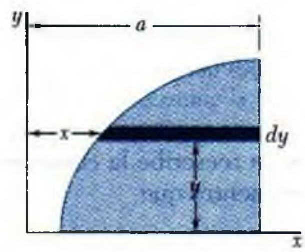
Por tanto, se puede utilizar el mismo elemento para calcular los momentos de inercia I_x e I_y de un área dada (figura 9.5a). Los resultados análogos para el área de la figura 9.3b se muestran en la figura 9.5b.



$dI_x = \frac{1}{3}y^3 dx$

$dI_y = x^2 y\,dx$

a)



$dI_x = y^2(a - x)dy$

$dI_y = (\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{3}x^3)dy$

b)

Figura 9.5

9.4. MOMENTO POLAR DE INERCIA

Una integral muy importante en los problemas relacionados con la torsión de flechas cilíndricas y en los problemas relacionados con la rotación de placas es la siguiente

$$J_O = \int r^2\,dA \tag{9.3}$$

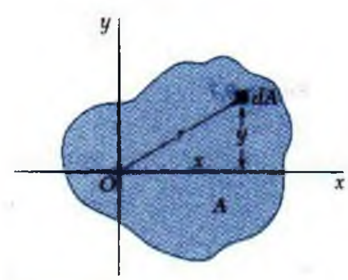


Figura 9.6

donde r es la distancia desde O hasta el área elemental dA (figura 9.6). Esta integral es el *momento polar de inercia* del área A con respecto *al "polo"* O.

El momento polar de inercia de un área dada puede calcularse a partir de los momentos rectangulares de inercia I_x e I_y del área, si dichas cantidades ya son conocidas. De hecho, si se observa que $r^2 = x^2 + y^2$, se puede escribir

$$J_O = \int r^2\,dA = \int (x^2 + y^2)\,dA = \int y^2\,dA + \int x^2\,dA$$

esto es,

$$J_O = I_x + I_y \tag{9.4}$$

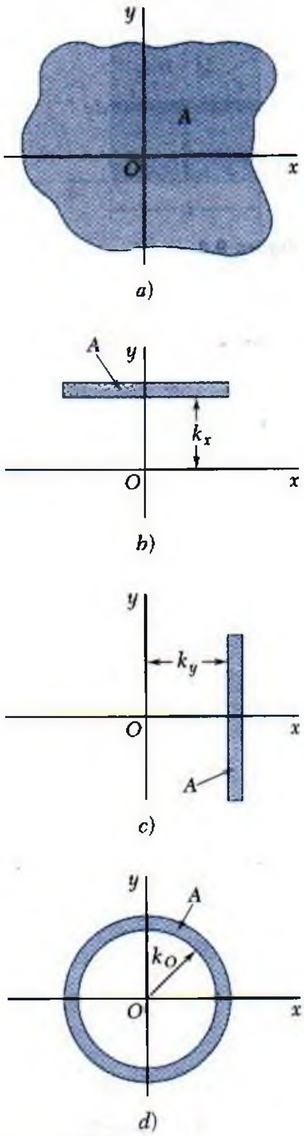


Figura 9.7

9.5. RADIO DE GIRO DE UN ÁREA

Considere un área A que tiene un momento de inercia I_x con respecto al eje x (figura 9.7*a*). Imagine que se ha concentrado esta área en una tira delgada paralela al eje x (figura 9.7*b*). Si el área A, concentrada de esta forma, debe tener el mismo momento de inercia con respecto al eje x, la tira debe ser colocada a una distancia k_x desde el eje x, donde k_x está definida por la relación

$$I_x = k_x^2 A$$

Al resolver para k_x, se escribe

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \tag{9.5}$$

Se hace referencia a la distancia k_x como el *radio de giro* del área con respecto al eje x. En forma similar, se pueden definir los radios de giro k_y y k_O (figura 9.7*c* y *d*); así se escribe

$$I_y = k_y^2 A \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \tag{9.6}$$

$$J_O = k_O^2 A \qquad k_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}} \tag{9.7}$$

Si se reescribe la ecuación (9.4) en términos de los radios de giro, se encuentra que

$$k_O^2 = k_x^2 + k_y^2 \tag{9.8}$$

Ejemplo. Para el rectángulo mostrado en la figura 9.8, se calcula el radio de giro k_x con respecto a su base. Con las fórmulas (9.5) y (9.2), se escribe

$$k_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{\frac{1}{3}bh^3}{bh} = \frac{h^2}{3} \qquad k_x = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

En la figura 9.8 se muestra el radio de giro k_x del rectángulo. El radio de giro no debe confundirse con la ordenada $\bar{y} = h/2$ del centroide del área. Mientras k_x depende del *segundo momento* o momento de inercia del área la ordenada $\bar{y}$ está relacionada con el *primer momento* del área.

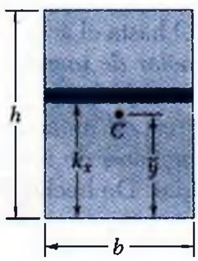
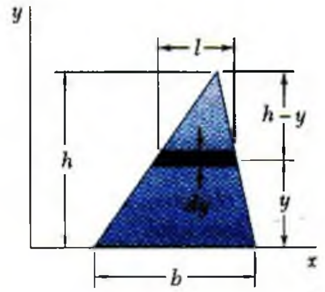


Figura 9.8

PROBLEMA RESUELTO 9.1

Determine el momento de inercia de un triángulo con respecto a su base.



SOLUCIÓN

Se dibuja un triángulo de base b y altura h; el eje x se selecciona de manera que coincida con la base del triángulo. Se selecciona dA como una tira diferencial paralela al eje x. Como todas las porciones de la tira están a la misma distancia a partir del eje x, se escribe

$$dI_x = y^2\,dA \qquad dA = l\,dy$$

Si se utilizan triángulos semejantes se tiene que

$$\frac{l}{b} = \frac{h-y}{h} \qquad l = b\frac{h-y}{h} \qquad dA = b\frac{h-y}{h}\,dy$$

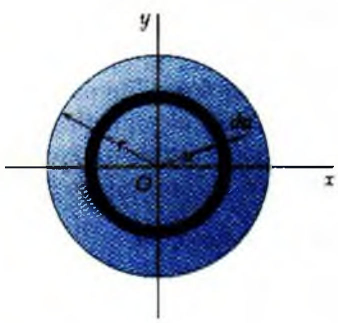
Con la integración de dI_x desde $y = 0$ hasta $y = h$, se obtiene

$$I_x = \int y^2\,dA = \int_0^h y^2 b\frac{h-y}{h}\,dy = \frac{b}{h}\int_0^h (hy^2 - y^3)\,dy$$

$$= \frac{b}{h}\left[h\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^h \qquad I_x = \frac{bh^3}{12} \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESUELTO 9.2

a) Determine el momento polar centroidal de inercia de un área circular por integración directa; *b*) utilice el resultado del inciso *a*) y determine el momento de inercia de un área circular con respecto a uno de sus diámetros.



SOLUCIÓN

***a*) Momento polar de inercia.** Se selecciona dA como un elemento anular diferencial de área. Como todas las porciones del área diferencial están a la misma distancia desde el origen, se escribe

$$dJ_O = u^2\,dA \qquad dA = 2\pi u\,du$$

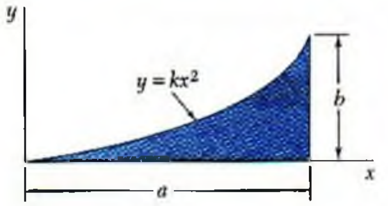
$$J_O = \int dJ_O = \int_0^r u^2(2\pi u\,du) = 2\pi\int_0^r u^3\,du$$

$$J_O = \frac{\pi}{2}r^4 \blacktriangleleft$$

***b*) Momento de inercia con respecto a un diámetro.** Debido a la simetría del área circular, se tiene que $I_x = I_y$. Entonces, se escribe

$$J_O = I_x + I_y = 2I_x \qquad \frac{\pi}{2}r^4 = 2I_x \qquad I_{\text{diámetro}} = I_x = \frac{\pi}{4}r^4 \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESUELTO 9.3

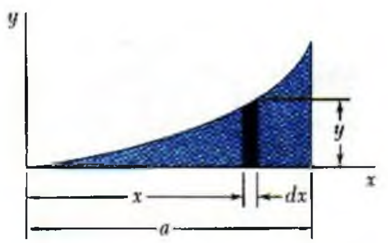


a) Determine el momento de inercia con respecto a cada uno de los ejes coordenados correspondientes al área sombreada que se muestra en la figura (las propiedades de esta área fueron consideradas en el problema resuelto 5.4), *b*) utilice los resultados del inciso *a*) y determine el radio de giro del área sombreada con respecto de cada uno de los ejes coordenados.

SOLUCIÓN

Haciendo referencia al problema resuelto 5.4, se obtienen las siguientes expresiones para la ecuación de la curva y para el área total:

$$y = \frac{b}{a^2}x^2 \qquad A = \tfrac{1}{3}ab$$



Momento de inercia I_x. Se selecciona dA como un elemento diferencial vertical de área. Como todas las porciones de este elemento *no* están a la misma distancia desde el eje x, se debe tratar al elemento como un rectángulo delgado. Entonces, el momento de inercia del elemento con respecto al eje x es

$$dI_x = \tfrac{1}{3}y^3\,dx = \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a^2}x^2\right)^3 dx = \frac{1}{3}\frac{b^3}{a^6}x^6\,dx$$

$$I_x = \int dI_x = \int_0^a \frac{1}{3}\frac{b^3}{a^6}x^6\,dx = \left[\frac{1}{3}\frac{b^3}{a^6}\frac{x^7}{7}\right]_0^a$$

$$I_x = \frac{ab^3}{21} \quad ◀$$

Momento de inercia I_y. Se utiliza el mismo elemento diferencial vertical de área. Como todas las porciones del elemento están a la misma distancia desde el eje y, se escribe

$$dI_y = x^2\,dA = x^2(y\,dx) = x^2\left(\frac{b}{a^2}x^2\right)dx = \frac{b}{a^2}x^4\,dx$$

$$I_y = \int dI_y = \int_0^a \frac{b}{a^2}x^4\,dx = \left[\frac{b}{a^2}\frac{x^5}{5}\right]_0^a$$

$$I_y = \frac{a^3b}{5} \quad ◀$$

Radios de giro k_x y k_y. Por definición, se tiene que

$$k_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{ab^3/21}{ab/3} = \frac{b^2}{7} \qquad k_x = \sqrt{\tfrac{1}{7}}\,b \quad ◀$$

y

$$k_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{a^3b/5}{ab/3} = \tfrac{3}{5}a^2 \qquad k_y = \sqrt{\tfrac{3}{5}}\,a \quad ◀$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

El propósito de esta lección fue introducir los *momentos rectangulares y polares de inercia de áreas* y los *radios de giro* correspondientes. A pesar de que los problemas propuestos que se deben resolver pueden parecer más apropiados para una clase de cálculo que para una de mecánica, se espera que los comentarios hechos en la introducción hayan convencido al lector de la relevancia de los momentos de inercia para el estudio de diversos temas de ingeniería.

1. *Cálculo de los momentos rectangulares de inercia I_x e I_y.* Estas cantidades se definieron como

$$I_x = \int y^2\, dA \qquad I_y = \int x^2\, dA \tag{9.1}$$

donde dA es un elemento diferencial de área $dx\, dy$. Los momentos de inercia son *los segundos momentos de un área*; es por esta razón que I_x, por ejemplo, depende de la distancia perpendicular y al área dA. Conforme se estudie la sección 9.3, se debe reconocer la importancia de definir con cuidado la forma y la orientación de dA. Más aún, se deben observar los siguientes puntos:

a) Los momentos de inercia de la mayoría de las áreas se pueden obtener por medio de una sola integración. Las expresiones proporcionadas en las figuras 9.3*b* y *c* y en la figura 9.5 se pueden utilizar para calcular I_x e I_y. Sin importar si se realiza una sola integración o una integración doble, siempre se debe mostrar en el croquis el elemento dA que se ha seleccionado.

b) El momento de inercia de un área siempre es positivo, sin importar la ubicación del área con respecto a los ejes coordenados. Esto se debe a que el momento de inercia se obtiene integrando el producto de dA y el *cuadrado* de una distancia. (Obsérvese cómo lo anterior difiere de los resultados para el primer momento del área.) Sólo cuando un área se *remueve* (como en el caso de un agujero) su momento de inercia se utilizará en los cálculos con un signo negativo.

c) Como una comprobación parcial del trabajo realizado, observe que los momentos de inercia son iguales a un área por el cuadrado de una longitud. Por tanto, cada término en la expresión para un momento de inercia debe ser una *longitud elevada a la cuarta potencia*.

2. *Cálculo del momento polar de inercia J_O.* J_O se definió como

$$J_O = \int r^2\, dA \tag{9.3}$$

donde $r^2 = x^2 + y^2$. Si el área dada posee simetría circular (como en el problema resuelto 9.2), es posible expresar dA como una función de r y calcular J_O con una sola integración. Cuando el área no posee simetría circular, es más fácil calcular primero I_x e I_y y, entonces, determinar J_O a partir de la siguiente expresión

$$J_O = I_x + I_y \tag{9.4}$$

Por último, si la ecuación de la curva que acota al área dada está expresada en coordenadas polares, entonces $dA = r\, dr\, d\theta$ y se requiere una integración doble para calcular la integral para J_O [véase el problema propuesto 9.27].

3. *Determinación de los radios de giro k_x y k_y y del radio polar de giro k_O.* Estas cantidades se definieron en la sección 9.5 y se debe observar que sólo pueden determinarse una vez que se han calculado el área y los momentos de inercia apropiados. Es importante recordar que k_x está medido en la dirección de y mientras que k_y está medido en la dirección de x; se debe estudiar con detalle la sección 9.5 hasta que se haya comprendido este punto.

Problemas

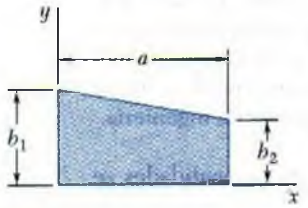


Figura P9.1 y P9.5

9.1 a 9.4 Para el área sombreada que muestra cada figura, determine por integración directa el momento de inercia respecto al eje y.

9.5 a 9.8 Para el área sombreada que muestra cada figura, determine por integración directa los momentos de inercia respecto al eje x.

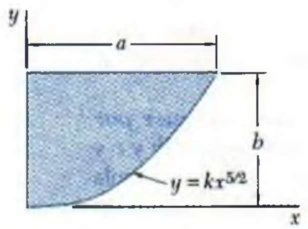


Figura P9.2 y P9.6

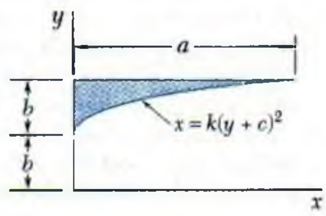


Figura P9.3 y P9.7

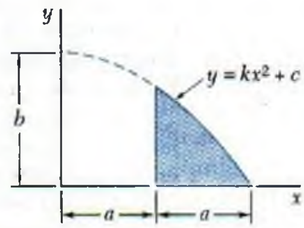


Figura *P9.4* y *P9.8*

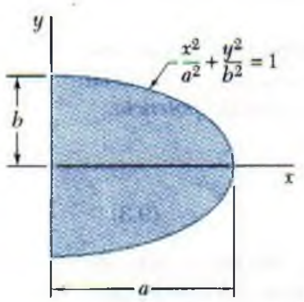


Figura P9.9 y P9.12

9.9 a 9.11 Para el área sombreada que muestra cada figura, determine por integración directa el momento de inercia respecto al eje x.

9.12 a 9.14 Para el área sombreada que muestra cada figura, determine por integración directa los momentos de inercia respecto al eje y.

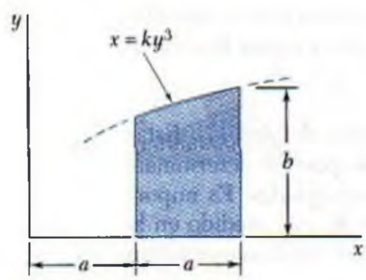


Figura *P9.10* y *P9.13*

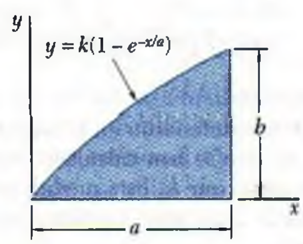


Figura P9.11 y P9.14

9.15 y 9.16 Para el área sombreada que muestra cada figura, determine el momento de inercia y el radio de giro respecto al eje x.

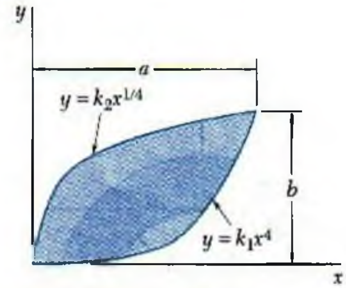


Figura *P9.15* y *P9.17*

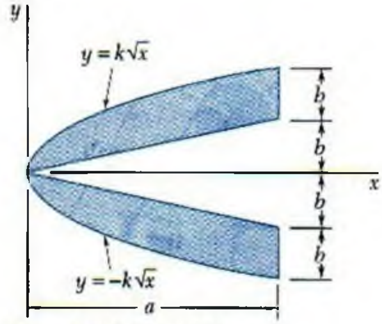


Figura P9.16 y P9.18

***9.17* y 9.18** Para el área sombreada que muestra cada figura, determine el momento de inercia y el radio de giro respecto al eje y.

9.19 Para el área sombreada què muestra la figura, determine el momento de inercia y el radio de giro respecto al eje x.

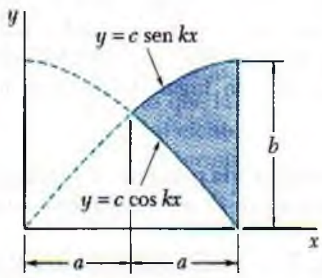


Figura P9.19 y P9.20

9.20 Para el área sombreada que muestra la figura, determine el momento de inercia y el radio de giro respecto al eje y.

9.21 Para el rectángulo mostrado en la figura, determine el momento polar de inercia y el radio de giro polar respecto al punto medio de uno de sus lados más *a*) largos, *b*) cortos.

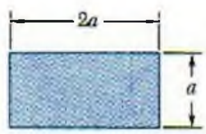


Figura P9.21

9.22 Para el área sombreada que muestra la figura, determine el momento polar de inercia y el radio de giro polar respecto al punto P.

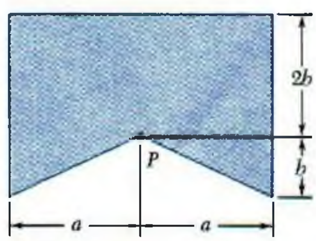


Figura P9.22

***9.23* y 9.24** Para el área sombreada que muestra la figura, determine el momento polar de inercia y el radio de giro polar respecto al punto P.

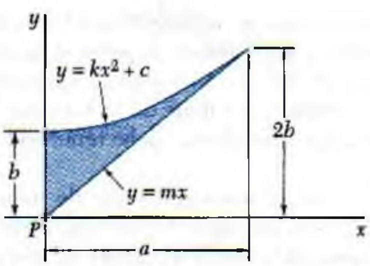


Figura *P9.23*

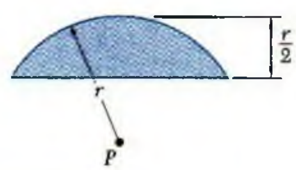


Figura P9.24

9.25 *a*) Determine por integración directa el momento polar de inercia del área que muestra la figura respecto al punto *O*. *b*) Use el resultado del inciso *a*) para determinar los momentos de inercia del área dada respecto a los ejes *x* y *y*.

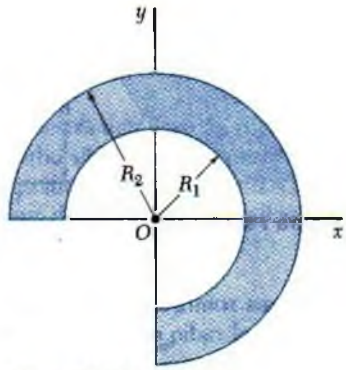


Figura P9.25 y P9.26

9.26 *a*) Muestre que el radio de giro polar k_O del área que muestra la figura es aproximadamente igual al radio medio $R_m = (R_1 + R_2)/2$ para valores pequeños del espesor $t = R_2 - R_1$. *b*) Determine el porcentaje de error generado al utilizar R_m en lugar de k_O para los siguientes valores de t/R_m: 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$.

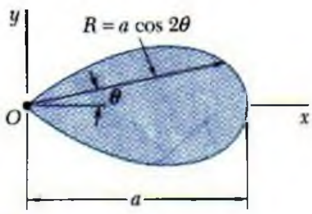


Figura P9.27

9.27 Para el área sombreada que muestra la figura, determine el momento polar de inercia y el radio de giro polar respecto al punto *O*.

9.28 Para el triángulo isósceles que muestra la figura, determine el momento polar de inercia y el radio de giro polar respecto al punto *O*.

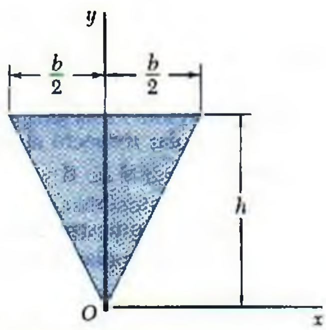


Figura *P9.28*

***9.29** Utilice el momento polar de inercia del triángulo isósceles del problema 9.28, y demuestre que el momento polar de inercia centroidal de un área circular de radio *r* es $\pi r^4/2$. (*Sugerencia*: A medida que el área de un círculo se divide en un número creciente de sectores circulares del mismo tamaño, ¿cuál es la forma aproximada que debe tener cada sector circular?)

***9.30** Demuestre que el momento polar de inercia centroidal de un área dada *A* no puede ser menor que $A^2/2\pi$. (*Sugerencia*: Compare el momento de inercia del área dada con el momento de inercia de un círculo que tenga la misma área y el mismo centroide.)

9.6. TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS O TEOREMA DE STEINER

Considere el momento de inercia I de un área A con respecto a un eje AA' (figura 9.9). Si se representa con y la distancia desde un elemento de área dA hasta AA', se escribe

$$I = \int y^2\, dA$$

Ahora, se dibuja a través del centroide C del área un eje BB' que es paralelo a AA', dicho eje es llamado *eje centroidal*. Representando con

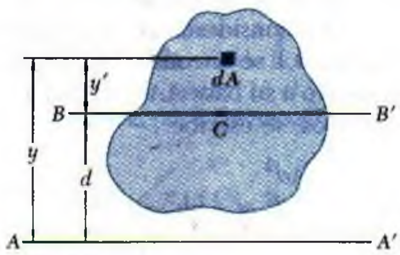


Figura 9.9

y' la distancia desde el elemento dA hasta BB', se escribe $y = y' + d$, donde d es la distancia entre los ejes AA' y BB'. Sustituyendo por y en la integral anterior, se escribe

$$I = \int y^2\, dA = \int (y' + d)^2\, dA$$
$$= \int y'^2\, dA + 2d \int y'\, dA + d^2 \int dA$$

La primera integral representa el momento de inercia $\bar{I}$ del área con respecto al eje centroidal BB'. La segunda integral representa el primer momento del área con respecto a BB'; como el centroide C del área está localizado sobre dicho eje, la segunda integral debe ser igual a cero. Finalmente, se observa que la última integral es igual al área total A. Por tanto, se tiene

$$I = \bar{I} + Ad^2 \qquad (9.9)$$

Esta fórmula expresa que el momento de inercia I de un área con respecto a cualquier eje dado AA' es igual al momento de inercia $\bar{I}$ del área con respecto a un eje centroidal BB' que es paralelo a AA' *más* el producto del área A y el cuadrado de la distancia d entre los dos ejes. Este teorema se conoce como el *teorema de los ejes paralelos* o *teorema de Steiner*. Sustituyendo k^2A por I y $\bar{k}^2A$ por $\bar{I}$, el teorema también se puede expresar de la siguiente forma

$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2 \qquad (9.10)$$

Se puede utilizar un teorema similar para relacionar el momento polar de inercia J_O de un área, con respecto a un punto O, con el momento polar de inercia $\bar{J}_C$, de la misma área con respecto a su centroide C. Denotando con d la distancia entre O y C, se escribe

$$J_O = \bar{J}_C + Ad^2 \qquad \text{o} \qquad k_O^2 = \bar{k}_C^2 + d^2 \qquad (9.11)$$

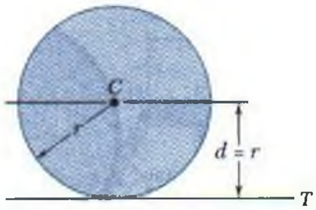


Figura 9.10

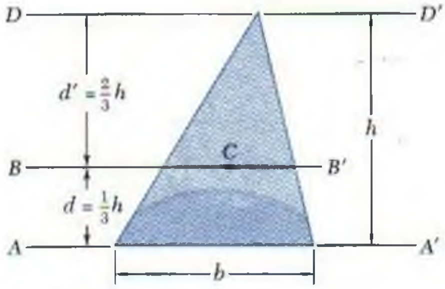


Figura 9.11

Ejemplo 1. Como una aplicación del teorema de los ejes paralelos, se procederá a determinar el momento de inercia I_T de un área circular con respecto a una línea tangente al círculo (figura 9.10). En el problema resuelto 9.2 se encontró que el momento de inercia de un área circular con respecto a un eje centroidal es $\bar{I} = \frac{1}{4}\pi r^4$. Por tanto se puede escribir

$$I_T = \bar{I} + Ad^2 = \tfrac{1}{4}\pi r^4 + (\pi r^2)r^2 = \tfrac{5}{4}\pi r^4$$

Ejemplo 2. El teorema de los ejes paralelos también se puede utilizar para determinar el momento centroidal de inercia de un área cuando se conoce el momento de inercia del área con respecto a un eje paralelo. Por ejemplo, considere un área triangular (figura 9.11). En el problema resuelto 9.1 se encontró que el momento de inercia del triángulo con respecto a su base AA' es igual a $\frac{1}{12}bh^3$. Con el teorema de los ejes paralelos, se escribe

$$I_{AA'} = \bar{I}_{BB'} + Ad^2$$
$$\bar{I}_{BB'} = I_{AA'} - Ad^2 = \tfrac{1}{12}bh^3 - \tfrac{1}{2}bh(\tfrac{1}{3}h)^2 = \tfrac{1}{36}bh^3$$

Es necesario resaltar que el producto Ad^2 fue *restado* del momento de inercia dado, con el fin de obtener el momento centroidal de inercia del triángulo. Observe que dicho producto se *suma* cuando se pasa *de* un eje centroidal a un eje paralelo, pero debe *restarse* cuando se pasa *a* un eje centroidal. En otras palabras, el momento de inercia de un área siempre es menor en relación a un eje centroidal que con respecto a cualquier otro eje paralelo.

En la figura 9.11 se observa que el momento de inercia del triángulo con respecto a la línea DD' (la cual se ha dibujado a través de un vértice del triángulo) se puede obtener escribiendo

$$I_{DD'} = \bar{I}_{BB'} + Ad'^2 = \tfrac{1}{36}bh^3 + \tfrac{1}{2}bh(\tfrac{2}{3}h)^2 = \tfrac{1}{4}bh^3$$

Observe que $I_{DD'}$ no se habría podido obtener directamente a partir de $I_{AA'}$. El teorema de los ejes paralelos sólo se puede aplicar si uno de los dos ejes paralelos pasa a través del centroide del área.

9.7. MOMENTOS DE INERCIA DE ÁREAS COMPUESTAS

Un área compuesta A que está constituida por varias áreas componentes $A_1, A_2, A_3, \ldots$ Como la integral que representa el momento de inercia de A puede subdividirse en integrales evaluadas sobre A_1, A_2, $A_3, \ldots$, el momento de inercia de A con respecto a un eje dado se obtiene sumando los momentos de las áreas $A_1, A_2, A_3, \ldots$ con respecto al mismo eje. Por tanto, el momento de inercia de un área que consta de varias de las formas comunes mostradas en la figura 9.12, se puede obtener con las fórmulas proporcionadas en dicha figura. Sin embargo, antes de sumar los momentos de inercia de las áreas componentes, es posible que se tenga que utilizar el teorema de los ejes paralelos para pasar cada momento de inercia al eje deseado. Esto se muestra en los problemas resueltos 9.4 y 9.5.

En la figura 9.13 se proporcionan las propiedades de las secciones transversales de varias formas (o perfiles) estructurales. Como se señaló en la sección 9.2, el momento de inercia de una sección de una viga con respecto a su eje neutro está relacionado con el cálculo del momento flector en esa sección de la viga. Por tanto, la determinación de los momentos de inercia es un prerrequisito para el análisis y el diseño de elementos estructurales.



Fotografía 9.1 En la figura 9.13 se tabularon los datos de una pequeña muestra de todas las formas de acero laminado que se encuentran con facilidad. En la fotografía se muestran dos ejemplos de vigas de patín ancho que se usan en la construcción de edificios.

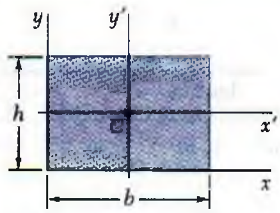
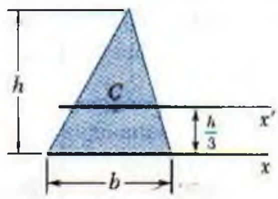
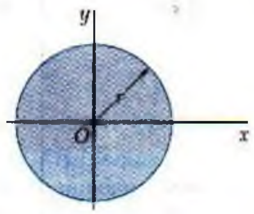
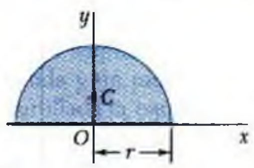
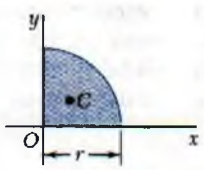
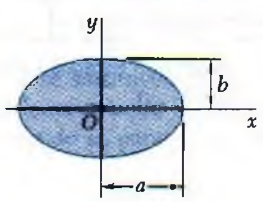
Rectángulo		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$ $I_x = \frac{1}{3}bh^3$ $I_y = \frac{1}{3}b^3h$ $J_C = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$
Triángulo		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3$
Círculo		$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{2}\pi r^4$
Semicírculo		$I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{4}\pi r^4$
Cuarto de círculo		$I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{8}\pi r^4$
Elipse		$\bar{I}_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi a^3b$ $J_O = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$

Figura 9.12 Momentos de inercia de formas geométricas comunes.

Es necesario señalar que el radio de giro de un área compuesta *no* es igual a la suma de los radios de giro de las áreas componentes. Para determinar el radio de giro de un área compuesta, es necesario que primero se calcule el momento de inercia del área.

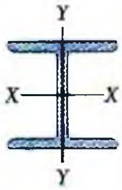
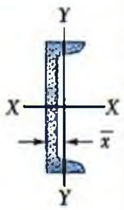
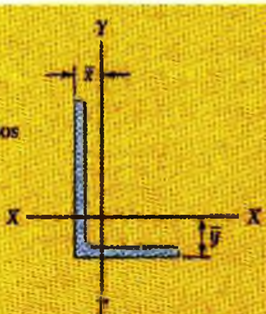
	Designación	Área in.^{2}	Altura in.	Ancho in.	Eje X-X $\bar{I}_x$, in.^{4}	Eje X-X $\bar{k}_x$, in.	Eje X-X $\bar{y}$, in.	Eje Y-Y $\bar{I}_y$, in.^{4}	Eje Y-Y $\bar{k}_y$, in.	Eje Y-Y $\bar{x}$, in.
Formas tipo W (formas de patín ancho) 	W18 × 50†	14.7	17.99	7.495	800	7.38		40.1	1.65	
	W16 × 40	11.8	16.01	6.995	518	6.63		28.9	1.57	
	W14 × 30	8.85	13.84	6.730	291	5.73		19.6	1.49	
	W8 × 24	7.08	7.93	6.495	82.8	3.42		18.3	1.61	
Formas tipo S (formas estándar estadounidenses) 	S18 × 70†	20.6	18.00	6.251	926	6.71		24.1	1.08	
	S12 × 50	14.7	12.00	5.477	305	4.55		15.7	1.03	
	S10 × 35	10.3	10.00	4.944	147	3.78		8.36	0.901	
	S6 × 17.25	5.07	6.00	3.565	26.3	2.28		2.31	0.675	
Formas tipo C (canales estándar estadounidenses) 	C12 × 25†	7.35	12.00	3.047	144	4.43		4.47	0.780	0.674
	C10 × 20	5.88	10.00	2.739	78.9	3.66		2.81	0.692	0.606
	C8 × 13.75	4.04	8.00	2.343	36.1	2.99		1.53	0.615	0.553
	C6 × 10.5	3.09	6.00	2.034	15.2	2.22		0.866	0.529	0.499
Ángulos 	L6 × 6 × $\frac{3}{4}$‡	8.44			28.2	1.83	1.78	28.2	1.83	1.78
	L4 × 4 × $\frac{1}{2}$	3.75			5.56	1.22	1.18	5.56	1.22	1.18
	L3 × 3 × $\frac{1}{4}$	1.44			1.24	0.930	0.842	1.24	0.930	0.842
	L6 × 4 × $\frac{1}{2}$	4.75			17.4	1.91	1.99	6.27	1.15	0.987
	L5 × 3 × $\frac{1}{2}$	3.75			9.45	1.59	1.75	2.58	0.829	0.750
	L3 × 2 × $\frac{1}{4}$	1.19			1.09	0.957	0.993	0.392	0.574	0.493

Figura 9.13A Propiedades de secciones de acero laminado (sistema de unidades de uso común en Estados Unidos).*

*Cortesía del American Institute of Steel Construction, Chicago, Illinois

†Altura nominal en pulgadas y peso en libras por pie

‡Altura, ancho y espesor en pulgadas

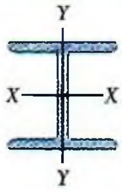
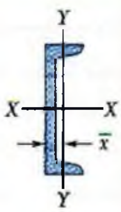
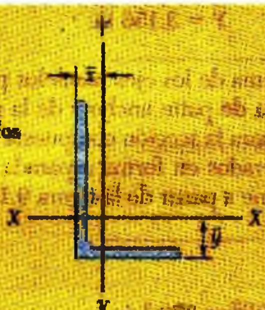
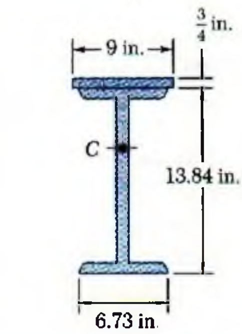
	Designación	Área mm²	Altura mm	Ancho mm	Eje X-X: $\bar{I}_x$ 10^6 mm⁴	Eje X-X: $\bar{k}_x$ mm	Eje X-X: $\bar{y}$ mm	Eje Y-Y: $\bar{I}_y$ 10^6 mm⁴	Eje Y-Y: $\bar{k}_y$ mm	Eje Y-Y: $\bar{x}$ mm
Formas tipo W (formas de patín ancho) 	W460 × 74†	9 450	457	190	333	188		16.6	41.9	
	W410 × 60	7 580	407	178	216	169		12.1	40.0	
	W360 × 44	5 730	352	171	122	146		8.18	37.8	
	W200 × 35.9	4 580	201	165	34.4	86.7		7.64	40.8	
Formas tipo S (formas estándar estadounidenses) 	S460 × 104†	13 300	457	159	385	170		10.4	27.5	
	S310 × 74	9 480	305	139	126	115		6.69	26.1	
	S250 × 52	6 670	254	126	61.2	95.8		3.59	22.9	
	S150 × 25.7	3 270	152	91	19.8	57.5		1.00	17.2	
Formas tipo C (canales estándar estadounidenses) 	C310 × 37†	5 690	305	77	59.7	112		1.83	19.7	17.0
	C250 × 30	3 780	254	69	32.6	92.9		1.14	17.4	15.3
	C200 × 27.9	3 560	203	64	18.2	71.5		0.817	15.1	14.3
	C150 × 15.6	1 980	152	51	6.21	56.0		0.347	13.2	12.5
Ángulos 	L152 × 152 × 19.0‡	5 420			11.6	46.3	44.9	11.6	46.3	44.9
	L102 × 102 × 12.7	2 430			2.34	31.0	30.2	2.34	31.0	30.2
	L76 × 76 × 6.4	932			0.517	23.6	21.4	0.517	23.6	21.4
	L152 × 102 × 12.7	3 060			7.20	48.5	50.3	2.64	29.4	25.3
	L127 × 76 × 12.7	2 420			3.93	40.3	44.4	1.06	20.9	19.0
	L76 × 51 × 6.4	772			0.453	24.2	25.1	0.166	14.7	12.8

Figura 9.13B Propiedades de secciones de acero laminado (unidades del SI).

†Altura nominal en milímetros y masa en kilogramos por metro

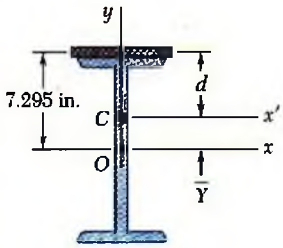
‡Altura, ancho y espesor en milímetros

PROBLEMA RESUELTO 9.4



La resistencia de una viga W14 × 30 de acero laminado se incrementa uniéndole una placa de $9 \times \frac{3}{4}$ in. a su patín superior, como se muestra en la figura. Determine el momento de inercia y el radio de giro de la sección compuesta con respecto a un eje que es paralelo a la placa y que pasa a través del centroide C de la sección.

SOLUCIÓN



Se coloca el origen O de las coordenadas en el centroide de la forma de patín ancho y se calcula la distancia $\overline{Y}$ al centroide de la sección compuesta utilizando los métodos del capítulo 5. El área de la forma de patín ancho hace referencia a la figura 9.13A. El área y la coordenada y del centroide de la placa están dados por

$$A = (9 \text{ in.})(0.75 \text{ in.}) = 6.75 \text{ in.}^2$$
$$\overline{y} = \tfrac{1}{2}(13.84 \text{ in.}) + \tfrac{1}{2}(0.75 \text{ in.}) = 7.295 \text{ in.}$$

Sección	Área, in.^{2}	$\overline{y}$, in.	$\overline{y}A$, in.^{3}
Placa	6.75	7.295	49.24
Forma de patín ancho	8.85	0	0
	$\Sigma A = 15.60$		$\Sigma\overline{y}A = 49.24$

$$\overline{Y}\Sigma A = \Sigma\overline{y}A \qquad \overline{Y}(15.60) = 49.24 \qquad \overline{Y} = 3.156 \text{ in.}$$

Momento de inercia. Se utiliza el teorema de los ejes paralelos para determinar los momentos de inercia de la forma de patín ancho y de la placa con respecto al eje x'. Este eje es centroidal para la sección compuesta pero *no* para cualquiera de los elementos considerados en forma separada. El valor de $\overline{I}_x$ para la forma de patín ancho se obtiene a partir de la figura 9.13A.

Para la forma de patín ancho,

$$I_{x'} = \overline{I}_x + A\overline{Y}^2 = 291 + (8.85)(3.156)^2 = 379.1 \text{ in.}^4$$

Para la placa,

$$I_{x'} = \overline{I}_x + Ad^2 = (\tfrac{1}{12})(9)(\tfrac{3}{4})^3 + (6.75)(7.295 - 3.156)^2 = 116.0 \text{ in.}^4$$

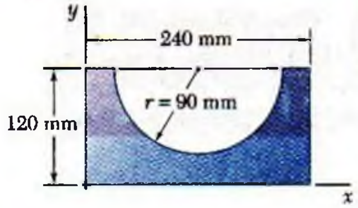
Para el área compuesta,

$$I_{x'} = 379.1 + 116.0 = 495.1 \text{ in.}^4 \qquad I_{x'} = 495 \text{ in.}^4 \blacktriangleleft$$

Radio de giro. Se tiene que

$$k_{x'}^2 = \frac{I_{x'}}{A} = \frac{495.1 \text{ in.}^4}{15.60 \text{ in.}^2} \qquad k_{x'} = 5.63 \text{ in.} \blacktriangleleft$$

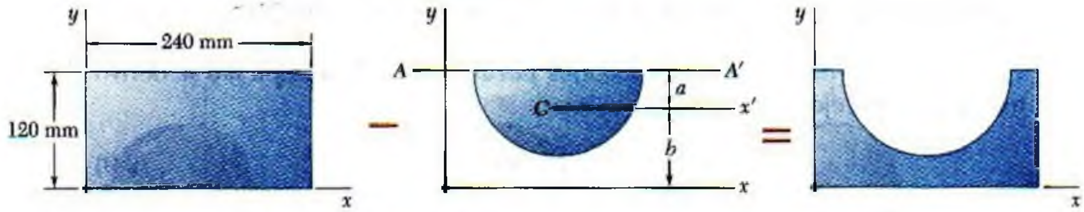
PROBLEMA RESUELTO 9.5



Determine el momento de inercia del área sombreada con respecto al eje x.

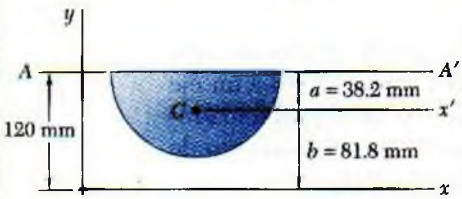
SOLUCIÓN

El área dada puede obtenerse restándole un semicírculo a un rectángulo. Los momentos de inercia del rectángulo y del semicírculo serán calculados en forma separada.



Momento de inercia del rectángulo. Haciendo referencia a la figura 9.12, se obtiene

$$I_x = \tfrac{1}{3}bh^3 = \tfrac{1}{3}(240\text{ mm})(120\text{ mm})^3 = 138.2 \times 10^6\text{ mm}^4$$



Momento de inercia del semicírculo. Haciendo referencia a la figura 5.8, se determina la ubicación del centroide C del semicírculo con respecto al diámetro AA'.

$$a = \frac{4r}{3\pi} = \frac{(4)(90\text{ mm})}{3\pi} = 38.2\text{ mm}$$

La distancia b desde el centroide C hasta el eje x es

$$b = 120\text{ mm} - a = 120\text{ mm} - 38.2\text{ mm} = 81.8\text{ mm}$$

Ahora, en referencia a la figura 9.12, se calcula el momento de inercia del semicírculo con respecto al diámetro AA'; además, se calcula el área del semicírculo.

$$I_{AA'} = \tfrac{1}{8}\pi r^4 = \tfrac{1}{8}\pi(90\text{ mm})^4 = 25.76 \times 10^6\text{ mm}^4$$
$$A = \tfrac{1}{2}\pi r^2 = \tfrac{1}{2}\pi(90\text{ mm})^2 = 12.72 \times 10^3\text{ mm}^2$$

Con el teorema de los ejes paralelos, se obtiene el valor de $\bar{I}_{x'}$:

$$I_{AA'} = \bar{I}_{x'} + Aa^2$$
$$25.76 \times 10^6\text{ mm}^4 = \bar{I}_{x'} + (12.72 \times 10^3\text{ mm}^2)(38.2\text{ mm})^2$$
$$\bar{I}_{x'} = 7.20 \times 10^6\text{ mm}^4$$

De nuevo, con el teorema de los ejes paralelos, se obtiene el valor de I_x:

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ab^2 = 7.20 \times 10^6\text{ mm}^4 + (12.72 \times 10^3\text{ mm}^2)(81.8\text{ mm})^2$$
$$= 92.3 \times 10^6\text{ mm}^4$$

Momento de inercia del área dada. Si se le resta el momento de inercia del semicírculo al momento de inercia del rectángulo, se obtiene

$$I_x = 138.2 \times 10^6\text{ mm}^4 - 92.3 \times 10^6\text{ mm}^4$$

$$I_x = 45.9 \times 10^6\text{ mm}^4 \quad ◀$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se introdujo el *teorema de los ejes paralelos* y se ilustró cómo se puede utilizar dicho teorema para facilitar el cálculo de momentos y momentos polares de inercia de áreas compuestas. Las áreas consideradas en los problemas propuestos que se presentan a continuación consistirán de formas comunes y de formas de acero laminado. Además, se utilizará el teorema de los ejes paralelos para localizar el punto de aplicación (el centro de presión) de la resultante de las fuerzas hidrostáticas que actúan sobre un área plana que está sumergida.

1. *Aplicación del teorema de los ejes paralelos.* En la sección 9.6 se derivó el teorema de los ejes paralelos

$$I = \bar{I} + Ad^2 \tag{9.9}$$

el cual establece que el momento de inercia I de un área A con respecto a un eje dado es igual a la suma del momento de inercia $\bar{I}$ de esa misma área con respecto a un *eje centroidal paralelo* y el producto Ad^2, donde d es la distancia entre los dos ejes. Es importante que se recuerden los puntos siguientes cuando se utilice el teorema de los ejes paralelos.

a) El momento centroidal de inercia $\bar{I}$ de un área A puede obtenerse restándole el producto Ad^2 al momento de inercia I del área con respecto a un eje paralelo. Por tanto, como notamos en el ejemplo 2 y se ilustró en el problema resuelto 9.5 se concluye que el momento de inercia $\bar{I}$ es *menor* que el momento de inercia I de la misma área con respecto a cualquier otro eje paralelo.

b) El teorema de los ejes paralelos sólo se puede aplicar si uno de los dos ejes involucrados es un eje centroidal. Como se señaló en el ejemplo 2, para calcular el momento de inercia de un área con respecto a un *eje que no es centroidal* cuando se conoce el momento de inercia de dicha área con respecto a *otro eje que no es centroidal*, es necesario *calcular primero* el momento de inercia del área con respecto a *un eje centroidal paralelo a los dos ejes dados*.

2. *Cálculo de los momentos y momentos polares de inercia de áreas compuestas.* Los problemas resueltos 9.4 y 9.5 ilustran los pasos que se deben seguir para resolver problemas de este tipo. Como en todos los problemas que involucran áreas compuestas, se debe mostrar en un esquema las formas comunes o las formas de acero laminado que constituyen los distintos elementos del área dada, al igual que las distancias entre los ejes centroidales de los elementos y los ejes con respecto a los cuales se calculan los momentos de inercia. Además, es importante que se tomen en cuenta los siguientes puntos:

a) El momento de inercia de un área siempre es positivo, sin importar la posición del eje con respecto al cual se calcula dicho momento de inercia. Como se señaló en los comentarios para la lección anterior, sólo cuando se *remueve* un área (como en el caso de un agujero) se debe utilizar su momento de inercia en los cálculos con un signo negativo.

b) Los momentos de inercia de una semielipse y de un cuarto de elipse se pueden determinar con la división del momento de inercia de una elipse entre 2 y entre 4, respectivamente. Sin embargo, se debe señalar que los momentos de inercia que se obtienen de esta forma son *con respecto a los ejes de simetría de la elipse*. Para obtener los momentos *centroidales* de inercia para estas formas, se debe utilizar el teorema de los ejes paralelos. Nótese que este comentario también se aplica a un semicírculo y a un cuarto de círculo y que las expresiones proporcionadas para estas formas en la figura 9.12 *no* son momentos centroidales de inercia.

c) Para calcular el momento polar de inercia de un área compuesta, se pueden utilizar las expresiones para J_O proporcionadas en la figura 9.12 o se puede emplear la relación

$$J_O = I_x + I_y \tag{9.4}$$

lo cual depende de la forma del área dada.

d) Antes de calcular los momentos centroidales de inercia de un área dada, es posible que sea necesario localizar primero el centroide del área con los métodos del capítulo 5.

3. *Localización del punto de aplicación de la resultante de un sistema de fuerzas hidrostáticas.* En la sección 9.2 se encontró que

$$R = \gamma \int y\, dA = \gamma \bar{y} A$$
$$M_x = \gamma \int y^2\, dA = \gamma I_x$$

donde $\bar{y}$ es la distancia desde el eje x hasta el centroide del área plana que está sumergida. Como **R** es equivalente al sistema de fuerzas hidrostáticas elementales, se concluye que

$$\Sigma M_x: \qquad y_P R = M_x$$

donde y_P es la profundidad del punto de aplicación de **R**. Entonces,

$$y_P(\gamma \bar{y} A) = \gamma I_x \qquad \text{o} \qquad y_P = \frac{I_x}{\bar{y} A}$$

Para finalizar, se recomienda estudiar con detalle la notación utilizada en la figura 9.13 para las formas de acero laminado, puesto que es probable volverla a encontrar en cursos de ingeniería posteriores.

Problemas

9.31 y 9.32 Para el área sombreada que muestra la figura, determine el momento de inercia y el radio de giro del área respecto al eje x.

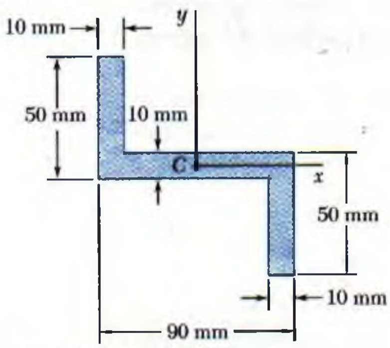


Figura P9.31 y P9.33

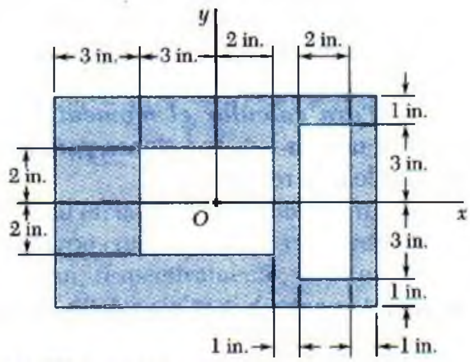


Figura P9.32 y P9.34

9.33 y 9.34 Para el área sombreada que muestra cada figura, determine el momento de inercia y el radio de giro del área respecto al eje y.

9.35* y *9.36 Para el área sombreada que muestra cada figura, determine los momentos de inercia respecto a los ejes x y y.

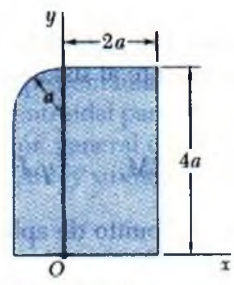


Figura *P9.35*

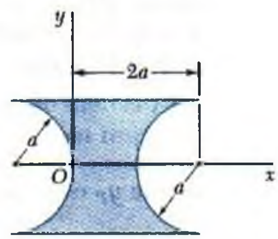


Figura *P9.36*

9.37 Para la figura que se muestra, determine el área sombreada y su momento de inercia respecto al eje centroidal paralelo AA' si los momentos de inercia respecto a AA' y BB' son, respectivamente, 2.2×10^6 mm^4 y 4×10^6 mm^4, y $d_1 = 25$ mm y $d_2 = 10$ mm.

9.38 Si el área sombreada de la figura es igual a 6 000 mm^2 y su momento de inercia respecto a AA' es de 18×10^6 mm^4, determine su momento de inercia respecto a BB' para $d_1 = 50$ mm y $d_2 = 10$ mm.

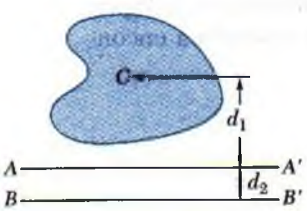


Figura P9.37 y P9.38

9.39 Si $d_1 = 2a$, determine la distancia a y el momento polar de inercia centroidal del área sombreada de 24 in.^{2} que se muestra en la figura, al ser $d_2 = 2$ in. y los momentos polares de inercia del área respecto a los puntos A y B de 256 in.^{4} y 190 in.^{4}, respectivamente.

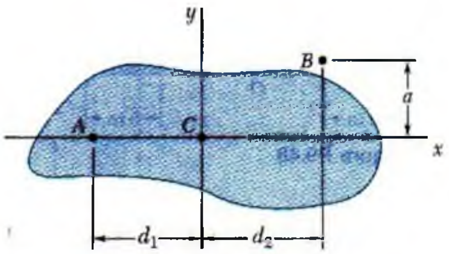


Figura P9.39 y *P9.40*

9.40 El momento polar de inercia centroidal $\bar{J}_C$ del área sombreada de 30 in.^{2} que se muestra en la figura es de 52.5 in.^{4}. Si $d_1 = d_2 = 2.5$ in., determine *a*) la distancia a para que $J_B = 3J_A$, *b*) el momento polar de inercia J_B.

9.41 a 9.44 Para el área que muestra cada figura, determine los momentos de inercia $\bar{I}_x$ e $\bar{I}_y$ respecto a los ejes centroidales paralelo y perpendicular al lado AB, respectivamente.

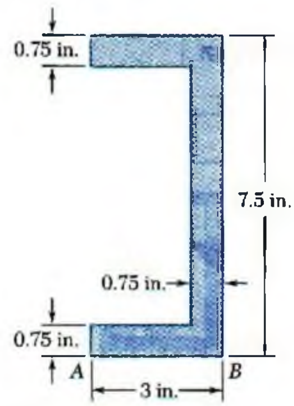


Figura P9.41

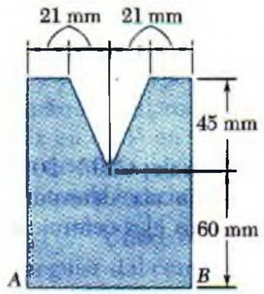


Figura P9.42

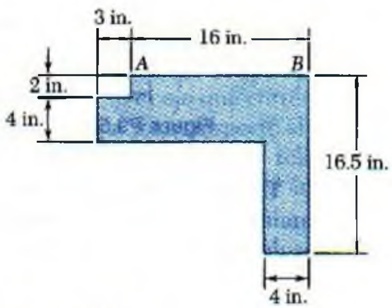


Figura *P9.43*

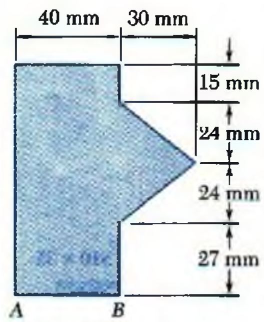


Figura P9.44

9.45 y 9.46 Para el área que muestra cada figura, determine el momento polar de inercia respecto a *a*) el punto O, *b*) el centroide del área.

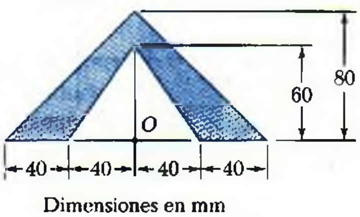


Figura P9.45

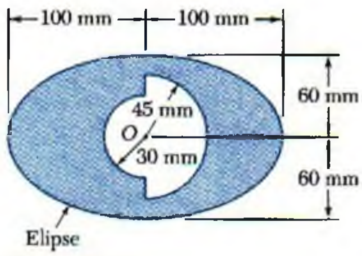


Figura P9.46

9.47 y 9.48 Para el área que muestra cada figura, determine el momento polar de inercia respecto a *a*) el punto *O*, *b*) el centroide del área.

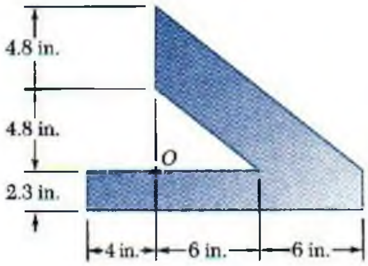


Figura *P9.47*

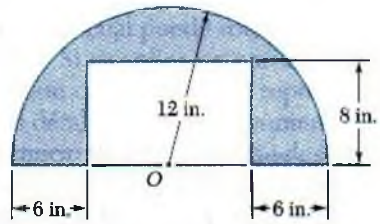


Figura P9.48

9.49 Para formar la sección que muestra la figura, dos ángulos de $6 \times 4 \times \frac{1}{2}$ in. se sueldan entre sí. Determine los momentos de inercia y los radios de giro de la sección respecto a los ejes centroidales señalados.

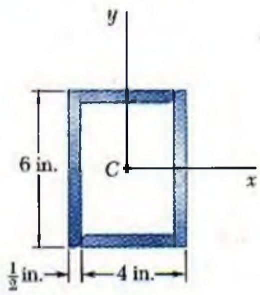


Figura P9.49

9.50 Con el propósito de formar la sección de la columna que muestra la figura, se utilizan dos canales y dos placas. Determine los momentos de inercia y los radios de giro de la sección combinada respecto a los ejes centroidales señalados.

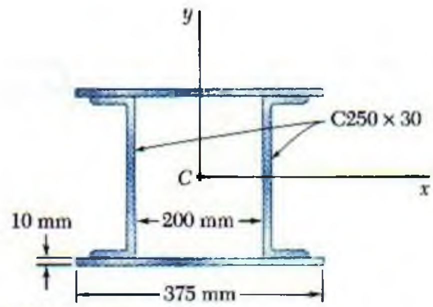


Figura P9.50

9.51 Tal como indica la figura, se sueldan dos canales C10 × 20 a una sección laminada S de 10 × 35. Para la sección combinada, determine los momentos de inercia y los radios de giro respecto a los ejes centroidales *x* y *y*.

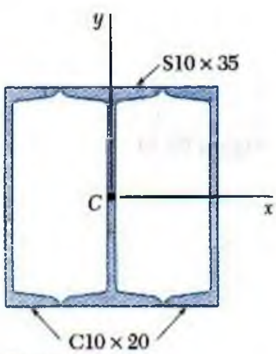


Figura *P9.51*

9.52 Tal como indica la figura, se sueldan dos canales a una placa de acero $d \times 300$ mm. Determine el ancho *d* para el cual la relación de los momentos de inercia centroidales de la sección $\bar{I}_x/\bar{I}_y$ es 16.

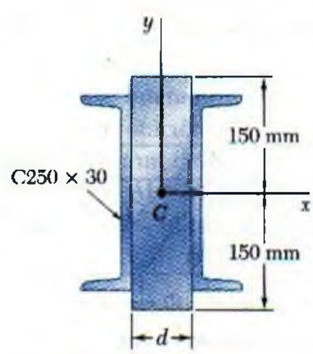


Figura P9.52

9.53 Tal como indica la figura, se sueldan dos ángulos L76 × 76 × 6.4 mm a un canal C250 × 30. Determine los momentos de inercia de la sección combinada respecto a los ejes centroidales paralelo y perpendicular al alma del canal, respectivamente.

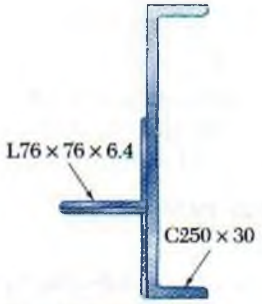


Figura P9.53

9.54 Para formar una viga asimétrica como la que muestra la figura, se sueldan dos ángulos L3 × 3 × $\frac{1}{4}$ in. y dos L6 × 4 × $\frac{1}{2}$ in. a una placa de acero de 0.8 in. de espesor. Determine los momentos de inercia de la sección combinada respecto a sus ejes centroidales x y y.

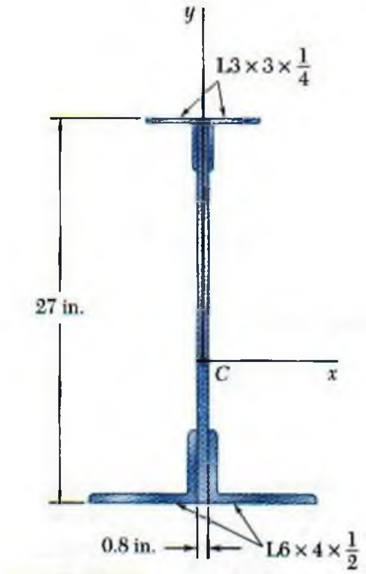


Figura *P9.54*

9.55 Tal como indica la figura, dos ángulos L127 × 76 × 12.7 mm se sueldan a una placa de acero de 10 mm. Si $\bar{I}_y = 3\bar{I}_x$, determine la distancia b y los momentos centroidales de inercia $\bar{I}_x$ e $\bar{I}_y$ de la sección combinada.

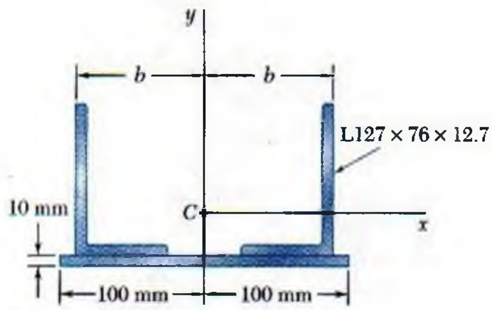


Figura P9.55

9.56 Un canal y un ángulo se sueldan a una placa de acero a × 0.75 in. Si el eje centroidal y se localiza como indica la figura, determine *a*) el ancho a, *b*) los momentos de inercia respecto a los ejes centroidales x y y.

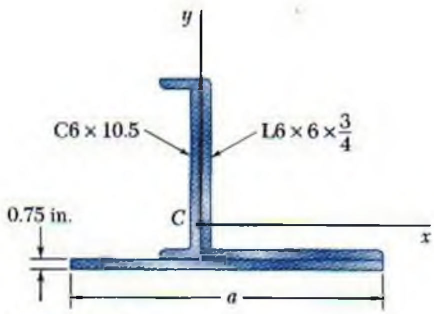


Figura P9.56

9.57 y *9.58* Cada figura muestra un panel que conforma uno de los extremos de una pila, la cual se llena con agua hasta la línea AA'. Con referencia a la sección 9.2, determine la profundidad del punto de aplicación de la resultante de las fuerzas hidrostáticas que actúan sobre el panel (centro de presión).

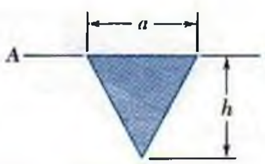


Figura P9.57

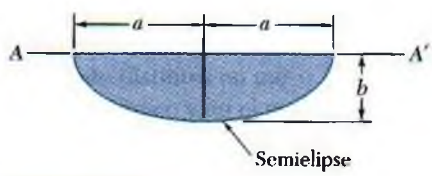


Figura *P9.58*

9.59 y *9.60* Cada figura muestra un panel que conforma uno de los extremos de una pila, la cual se llena con agua hasta la línea AA'. Con referencia a la sección 9.2, determine la profundidad del punto de aplicación de la resultante de las fuerzas hidrostáticas que actúan sobre el panel (centro de presión).

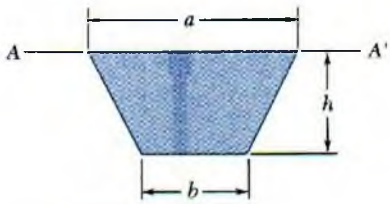


Figura P9.59

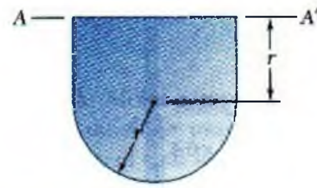


Figura *P9.60*

9.61 La cubierta para un acceso de 250 × 550 mm en un tanque de almacenamiento de petróleo se fija al tanque por medio de cuatro pernos como indica la figura. Si la densidad del petróleo es de 920 kg/m^3 y el centro de la cubierta está localizado 3 m por debajo de la superficie, determine la fuerza adicional sobre cada perno debida a la presión del petróleo.

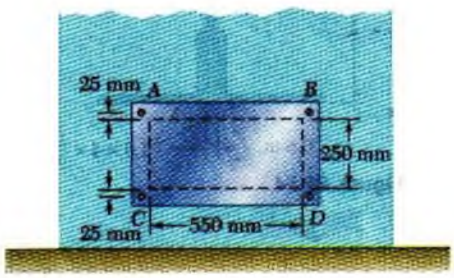


Figura P9.61

9.62 Una compuerta vertical trapezoidal, como la mostrada en la figura, se emplea como una válvula automática que se mantiene cerrada por medio de dos resortes localizados a lo largo del canto AB. Si cada resorte ejerce un par de 8 kips · ft, de magnitud, determine la profundidad necesaria d del agua para que la compuerta se abra.

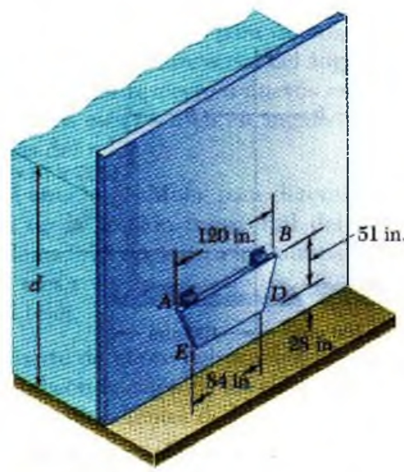


Figura P9.62

***9.63** Determine la coordenada x del centroide para el volumen mostrado en la figura. (*Sugerencia*: La altura y el volumen es proporcional a la coordenada x; considere una analogía entre esta altura y la presión del agua sobre una superficie sumergida.)

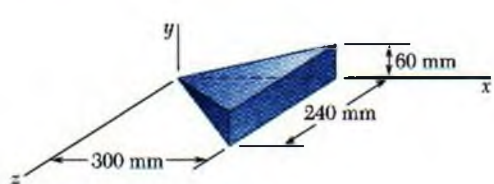


Figura P9.63

***9.64** Determine la coordenada x del centroide para el volumen mostrado en la figura; este volumen se obtuvo al intersecar un cilindro circular con un plano oblicuo. (*Sugerencia*: La altura y del volumen es proporcional a la coordenada x; considere una analogía entre esta altura y la presión del agua sobre una superficie sumergida.)

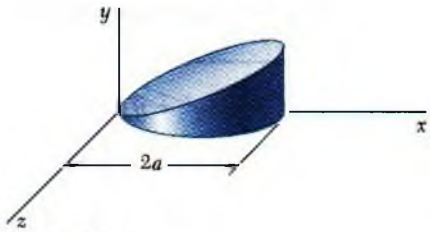


Figura P9.64

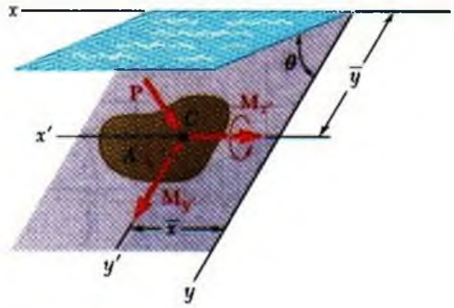


Figura P9.65

***9.65** Muestre que el sistema de las fuerzas hidrostáticas que actúan sobre un área plana A sumergida puede reducirse a una fuerza $\mathbf{P}$ sobre el centroide C y a dos pares. La fuerza $\mathbf{P}$ es perpendicular al área y su magnitud es $P = \gamma A\bar{y}$ sen θ, donde γ es el peso específico del líquido y los pares son $\mathbf{M}_{x'} = (\gamma \bar{I}_{x'}$ sen $\theta)\mathbf{i}$ y $\mathbf{M}_{y'} = (\gamma \bar{I}_{x'y'}$ sen $\theta)\mathbf{j}$, donde $\bar{I}_{x'y'} = \int x'y'dA$ (vea la sección 9.8). Advierta que los pares son independientes de la profundidad a la cual está sumergida el área.

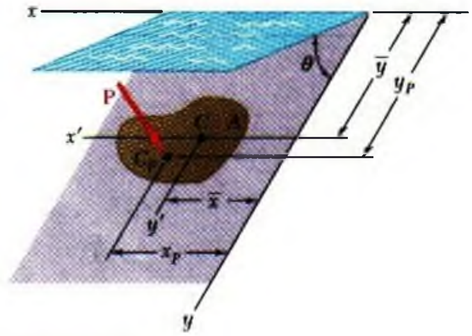


Figura P9.66

***9.66** Muestre que la resultante de las fuerzas hidrostáticas que actúan sobre un área plana A sumergida es una fuerza $\mathbf{P}$ perpendicular al área y con magnitud de $P = \gamma A\bar{y}$ sen $\theta = \bar{p}A$, donde γ es el peso específico del líquido y $\bar{p}$ es la presión que actúa sobre el centroide C del área. Además, demuestre que $\mathbf{P}$ es una fuerza que actúa sobre el punto C_p, llamado centro de presión, cuyas coordenadas son $x_p = I_{xy}/A\bar{y}$ y $y_p = I_x/A\bar{y}$, donde $I_{xy} = \int xy\, dA$ (vea la sección 9.8). También demuestre que el valor de la diferencia de ordenadas $y_p - \bar{y}$ es igual a $\bar{k}_{x'}^2/\bar{y}$ y que, por tanto, depende de la profundidad a la cual está sumergida el área.

*9.8. PRODUCTO DE INERCIA

La integral

$$I_{xy} = \int xy\, dA \qquad (9.12)$$

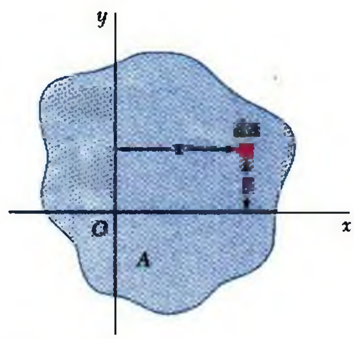


Figura 9.14

que se obtiene al multiplicar a cada elemento dA de un área A por sus coordenadas x y y, e integrando sobre toda el área (figura 9.14), es conocida como el *producto de inercia* del área A respecto a los ejes x y y. A diferencia de los momentos de inercia I_x e I_y, el producto de inercia I_{xy} puede ser positivo, negativo o cero.

Cuando uno o ambos ejes x y y son ejes de simetría del área A, el producto de inercia I_{xy} es igual a cero. Por ejemplo, considérese la sección en forma de canal que muestra la figura 9.15. Puesto que esta sección es simétrica respecto al eje x, con cada elemento dA de coordenadas x y y se puede asociar un elemento dA' de coordenadas x y $-y$. Desde luego, las contribuciones a I_{xy} de cualquier par de elementos seleccionados de esta forma se cancela y, por tanto, la integral (9.12) se reduce a cero.

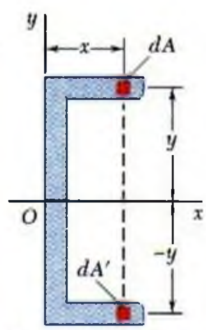


Figura 9.15

Para los productos de inercia, es posible derivar un teorema de ejes paralelos similar al establecido en la sección 9.6 para momentos de inercia. Considere un área A y un sistema de coordenadas rectangulares x y

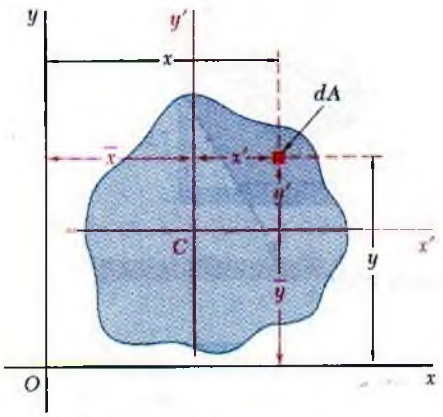


Figura 9.16

y (figura 9.16). A través del centroide C del área, cuyas coordenadas son $\bar{x}$ y $\bar{y}$, se dibujan dos *ejes centroidales* x' y y' que son paralelos, respectivamente, a los ejes x y y. Representando con x y y las coordenadas de un elemento de área dA con respecto a los ejes originales y con x' y y' las coordenadas del mismo elemento con respecto a los ejes centroidales, se escribe $x = x' + \bar{x}$ y $y = y' + \bar{y}$. Al sustituir las relaciones anteriores en la ecuación (9.12), se obtiene la siguiente expresión para el producto de inercia I_{xy}:

$$I_{xy} = \int xy\, dA = \int (x' + \bar{x})(y' + \bar{y})\, dA$$
$$= \int x'y'\, dA + \bar{y}\int x'\, dA + \bar{x}\int y'\, dA + \bar{x}\bar{y}\int dA$$

La primera integral representa el producto de inercia $\bar{I}_{x'y'}$ del área A con respecto a los ejes centroidales x' y y'. Las dos integrales siguientes representan los primeros momentos del área con respecto a los ejes centroidales; dichas integrales se reducen a cero puesto que el centroide C está localizado sobre esos ejes. La última integral es igual al área total A. Por tanto, se tiene que

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}A \tag{9.13}$$

*9.9. EJES PRINCIPALES Y MOMENTOS PRINCIPALES DE INERCIA

Considere el área A y los ejes coordenados x y y (figura 9.17). Suponiendo que los momentos y el producto de inercia

$$I_x = \int y^2\, dA \qquad I_y = \int x^2\, dA \qquad I_{xy} = \int xy\, dA \tag{9.14}$$

del área A son conocidos, se desea determinar los momentos y el producto de inercia $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ de A con respecto a nuevos ejes x' y y' que se obtienen rotando los ejes originales alrededor del origen a través de un ángulo θ.

Primero se deben señalar las siguientes relaciones entre las coordenadas x', y' y x, y de un elemento de área dA:

$$x' = x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta \qquad y' = y\cos\theta - x\operatorname{sen}\theta$$

Si se sustituye y' en la expresión para $I_{x'}$, se escribe

$$I_{x'} = \int (y')^2\, dA = \int (y\cos\theta - x\operatorname{sen}\theta)^2\, dA$$
$$= \cos^2\theta \int y^2\, dA - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\int xy\, dA + \operatorname{sen}^2\theta\int x^2\, dA$$

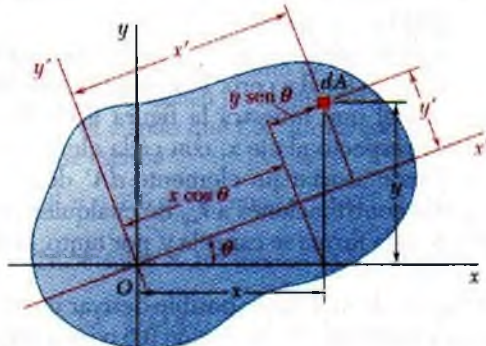


Figura 9.17

Con las relaciones (9.14), se escribe

$$I_{x'} = I_x \cos^2 \theta - 2I_{xy} \operatorname{sen} \theta \cos \theta + I_y \operatorname{sen}^2 \theta \qquad (9.15)$$

En forma similar, se obtienen las siguientes expresiones para $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$

$$I_{y'} = I_x \operatorname{sen}^2 \theta + 2I_{xy} \operatorname{sen} \theta \cos \theta + I_y \cos^2 \theta \qquad (9.16)$$

$$I_{x'y'} = (I_x - I_y) \operatorname{sen} \theta \cos \theta + I_{xy}(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) \qquad (9.17)$$

Recordando las relaciones trigonométricas

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \qquad \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$$

y

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \qquad \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

Se pueden escribir las ecuaciones (9.15), (9.16) y (9.17) de la siguiente forma:

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \qquad (9.18)$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \qquad (9.19)$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \qquad (9.20)$$

Si se suman las ecuaciones (9.18) y la (9.19), se observa que

$$I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y \qquad (9.21)$$

Este resultado pudo haberse anticipado puesto que ambos miembros de la ecuación (9.21) son iguales al momento polar de inercia J_O.

Las ecuaciones (9.18) y (9.20) son las ecuaciones paramétricas de un círculo. Esto significa que si se selecciona un conjunto de ejes rectangulares y se grafica un punto M de abscisa $I_{x'}$ y ordenada $I_{x'y'}$ y para cualquier valor dado del parámetro θ, todos los puntos que se obtienen de esta forma estarán localizados sobre un círculo. Para establecer esta propiedad, se elimina θ de las ecuaciones (9.18) y (9.20); lo anterior se lleva a cabo transponiendo el término $(I_x + I_y)/2$ en la ecuación (9.18), elevando al cuadrado ambos miembros de las ecuaciones (9.18) y (9.20) y sumando las expresiones obtenidas. Así se escribe

$$\left(I_{x'} - \frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + I_{x'y'}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2 \qquad (9.22)$$

Estableciendo

$$I_{\text{prom}} = \frac{I_x + I_y}{2} \quad \text{y} \quad R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \qquad (9.23)$$

se escribe la identidad (9.22) de la siguiente forma

$$(I_{x'} - I_{\text{prom}})^2 + I_{x'y'}^2 = R^2 \qquad (9.24)$$

ésta es la ecuación de un círculo de radio R que tiene su centro en el punto C cuyas coordenadas x y y son I_{prom} y 0, respectivamente (figura 9.18*a*). Se observa que las ecuaciones (9.19) y (9.20) son las ecuaciones paramétricas del mismo círculo. Además, debido a la simetría del círculo con res-

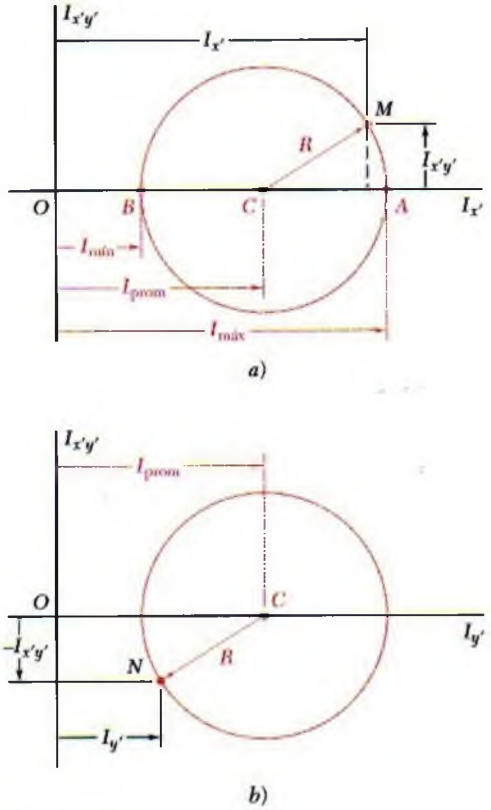


Figura 9.18

pecto al eje horizontal, se habría obtenido el mismo resultado si en lugar de graficar M se hubiera graficado un punto N de coordenadas $I_{y'}$ y $-I_{x'y'}$ (figura 9.18*b*). Esta propiedad se utilizará en la sección 9.10.

Los dos puntos A y B donde el círculo antes mencionado interseca el eje horizontal (figura 9.18*a*) son de interés especial: el punto A corresponde al máximo valor del momento de inercia $I_{x'}$ mientras que el punto B corresponde al mínimo valor para dicha cantidad. Además, ambos puntos corresponden a un valor de cero para el producto de inercia $I_{x'y'}$. Por tanto, los valores θ_m del parámetro θ que corresponden a los puntos A y B pueden obtenerse tomando $I_{x'y'} = 0$ en la ecuación (9.20). De esta forma se obtiene[†]

$$\tan 2\theta_m = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \qquad (9.25)$$

Esta ecuación define dos valores de $2\theta_m$ que están separados 180° y, por tanto, dos valores θ_m que están separados 90°. Uno de estos valores corresponde al punto A en la figura 9.18*a* y también corresponde a un eje a través de O en la figura 9.17 con respecto al cual el momento de inercia del área dada es máximo, el otro valor corresponde al punto B y a un eje a través de O con respecto al cual el momento de inercia del área es mínimo. Los dos ejes definidos de esta forma son perpendiculares entre sí, se conocen como los *ejes principales del área con respecto a O* y los valores correspondientes $I_{máx}$ e $I_{mín}$ del momento de inercia se llaman *momentos principales de inercia del área con respecto a O*. Como los dos valores θ_m definidos por la ecuación (9.25) se obtuvieron estableciendo $I_{x'y'} = 0$ en la ecuación (9.20), el producto de inercia de un área dada con respecto a sus ejes principales es igual a cero.

A partir de la figura 9.18*a* se observa que

$$I_{máx} = I_{prom} + R \qquad I_{mín} = I_{prom} - R \qquad (9.26)$$

Con el uso de los valores para I_{prom} y R correspondientes a las fórmulas (9.23), se escribe

$$I_{máx,mín} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \qquad (9.27)$$

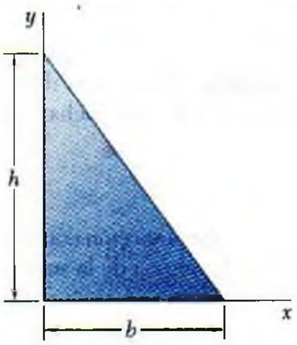
A menos que se pueda decidir por inspección cuál de los dos ejes principales corresponde a $I_{máx}$ y cuál corresponde a $I_{mín}$, es necesario sustituir uno de los valores de θ_m en la ecuación (9.18) para poder determinar cuál de los dos corresponde al máximo valor del momento de inercia del área con respecto a O.

Haciendo referencia a la sección 9.8, se observa que si un área posee un eje de simetría a través de un punto O, dicho eje debe ser un eje principal del área con respecto a O. Por otra parte, un eje principal no tiene que ser necesariamente un eje de simetría; sin importar si un área posee o no ejes de simetría, ésta tendrá dos ejes principales de inercia con respecto a cualquier punto O.

Las propiedades que se acaban de establecer son válidas para cualquier punto O localizado dentro o fuera del área dada. Si se selecciona el punto O de manera que coincida con el centroide del área, cualquier eje que pasa a través de O es un eje centroidal; los dos ejes principales de un área con respecto a su centroide reciben el nombre de *ejes centroidales principales del área*.

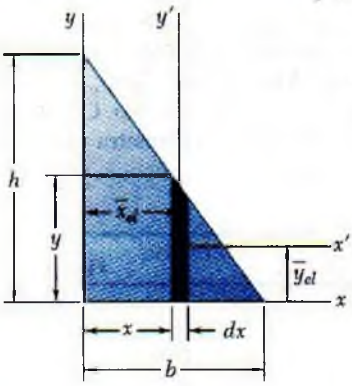
[†]Esta relación también se puede obtener al diferenciar $I_{x'}$ en la ecuación (9.18) y tomando $dI_{x'}/d\theta = 0$.

PROBLEMA RESUELTO 9.6



Determine el producto de inercia del triángulo rectángulo mostrado en la figura, *a*) con respecto a los ejes x y y, y *b*) en relación con los ejes centroidales que son paralelos a los ejes x y y.

SOLUCIÓN



***a*) Producto de inercia I_{xy}.** Se selecciona una tira rectangular vertical como el elemento diferencial de área. Con el teorema de los ejes paralelos, se escribe

$$dI_{xy} = dI_{x'y'} + \bar{x}_{el}\bar{y}_{el}\,dA$$

Como el elemento es simétrico con respecto a los ejes x' y y', se observa que $dI_{x'y'} = 0$. Con base en la geometría del triángulo se obtiene

$$y = h\left(1 - \frac{x}{b}\right) \qquad dA = y\,dx = h\left(1 - \frac{x}{b}\right)dx$$

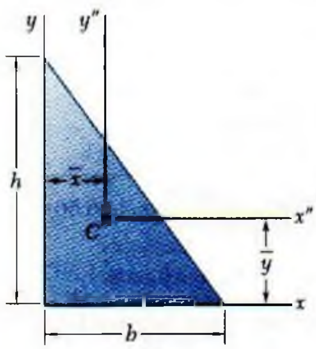
$$\bar{x}_{el} = x \qquad \bar{y}_{el} = \tfrac{1}{2}y = \tfrac{1}{2}h\left(1 - \frac{x}{b}\right)$$

Integrando dI_{xy} desde $x = 0$ hasta $x = b$, se obtiene

$$I_{xy} = \int dI_{xy} = \int \bar{x}_{el}\bar{y}_{el}\,dA = \int_0^b x(\tfrac{1}{2})h^2\left(1 - \frac{x}{b}\right)^2 dx$$

$$= h^2\int_0^b \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{2b^2}\right)dx = h^2\left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3b} + \frac{x^4}{8b^2}\right]_0^b$$

$$I_{xy} = \tfrac{1}{24}b^2h^2 \quad ◀$$



***b*) Producto de inercia $\bar{I}_{x''y''}$.** Las coordenadas del centroide del triángulo con respecto a los ejes x y y son

$$\bar{x} = \tfrac{1}{3}b \qquad \bar{y} = \tfrac{1}{3}h$$

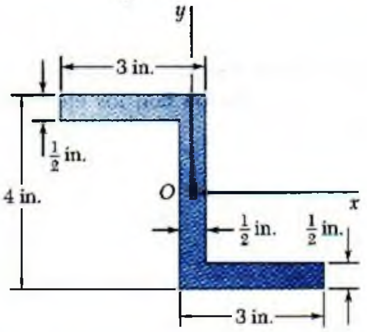
Con la expresión para I_{xy} obtenida en el inciso *a*), se aplica el teorema de los ejes paralelos y se escribe

$$I_{xy} = \bar{I}_{x''y''} + \bar{x}\bar{y}A$$

$$\tfrac{1}{24}b^2h^2 = \bar{I}_{x''y''} + (\tfrac{1}{3}b)(\tfrac{1}{3}h)(\tfrac{1}{2}bh)$$

$$\bar{I}_{x''y''} = \tfrac{1}{24}b^2h^2 - \tfrac{1}{18}b^2h^2$$

$$\bar{I}_{x''y''} = -\tfrac{1}{72}b^2h^2 \quad ◀$$



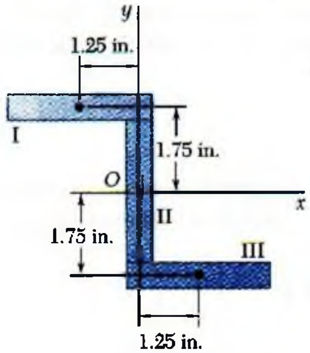
PROBLEMA RESUELTO 9.7

Para la sección mostrada en la figura se han calculado los valores de los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y y se sabe que dichas cantidades son iguales a

$$I_x = 10.38 \text{ in.}^4 \qquad I_y = 6.97 \text{ in.}^4$$

Determine: *a*) la orientación de los ejes principales de la sección con respecto a O y *b*) los valores de los momentos principales de inercia de la sección con respecto a O.

SOLUCIÓN



Primero se calcula el producto de inercia con respecto a los ejes x y y. El área se divide en tres rectángulos, como se muestra en la figura. Se observa que para cada uno de los rectángulos, el producto de inercia $\bar{I}_{x'y'}$ con respecto a ejes centroidales paralelos a los ejes x y y es igual a cero. Con el uso del teorema de los ejes paralelos $I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}A$, se encuentra que, para cada uno de los rectángulos, I_{xy} se reduce a $\bar{x}\bar{y}A$.

Rectángulo	Área, in.^{2}	$\bar{x}$, in.	$\bar{y}$, in.	$\bar{x}\bar{y}A$, in.^{4}
I	1.5	−1.25	+1.75	−3.28
II	1.5	0	0	0
III	1.5	+1.25	−1.75	−3.28
				$\Sigma\bar{x}\bar{y}A = -6.56$

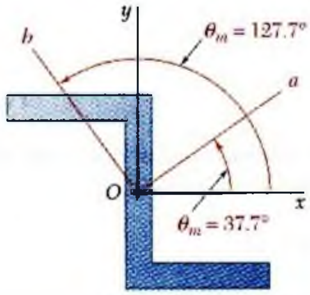
$$I_{xy} = \Sigma\bar{x}\bar{y}A = -6.56 \text{ in.}^4$$

***a*) Ejes principales.** Como se conocen las magnitudes de I_x, I_y e I_{xy} se utiliza la ecuación (9.25) para determinar los valores de θ_m:

$$\tan 2\theta_m = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = -\frac{2(-6.56)}{10.38 - 6.97} = +3.85$$

$$2\theta_m = 75.4° \text{ y } 255.4°$$

$$\theta_m = 37.7° \qquad \text{y} \qquad \theta_m = 127.7° \blacktriangleleft$$



***b*) Momentos principales de inercia.** Con la ecuación (9.27), se escribe

$$I_{\text{máx,mín}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$= \frac{10.38 + 6.97}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10.38 - 6.97}{2}\right)^2 + (-6.56)^2}$$

$$I_{\text{máx}} = 15.45 \text{ in.}^4 \qquad I_{\text{mín}} = 1.897 \text{ in.}^4 \blacktriangleleft$$

Observe que los elementos del área de la sección están distribuidos más cerca del eje b que del eje a; se concluye que $I_a = I_{\text{máx}} = 15.45$ in.^{4} e $I_b = I_{\text{mín}} = 1.897$ in.^{4}. Esta conclusión se puede verificar sustituyendo $\theta = 37.7°$ en las ecuaciones (9.18) y (9.19).

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los problemas propuestos correspondientes a esta lección se continuará trabajando con *momentos de inercia* y se utilizarán varias técnicas para calcular *productos de inercia*. A pesar de que en general los problemas propuestos son sencillos de resolver, es importante tomar en cuenta los siguientes puntos:

1. Calcular el producto de inercia I_{xy} por integración. El producto de inercia se definió como

$$I_{xy} = \int xy\, dA \qquad (9.12)$$

y se estableció que su valor puede ser positivo, negativo o cero. El producto de inercia se puede calcular directamente a partir de la ecuación anterior con una integración doble o puede determinarse empleando una sola integración, como se hizo en el problema resuelto 9.6. Cuando se aplique esta última técnica y se utilice el teorema de los ejes paralelos, es importante recordar que $\bar{x}_{el}$ y $\bar{y}_{el}$ en la ecuación

$$dI_{xy} = dI_{x'y'} + \bar{x}_{el}\bar{y}_{el}\, dA$$

son las coordenadas del centroide del elemento de área dA. Por tanto, si dA no está en el primer cuadrante, una o ambas coordenadas serán negativas.

2. Calcular los productos de inercia de áreas compuestas. Los productos de inercia de áreas compuestas se pueden calcular a partir de los productos de inercia de sus partes componentes utilizando el teorema de los ejes paralelos

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}A \qquad (9.13)$$

La técnica apropiada que se debe utilizar para problemas de este tipo se ilustra en los problemas resueltos 9.6 y 9.7. Además de las reglas habituales para problemas que involucran áreas compuestas, es esencial que se recuerden los puntos siguientes.

a) Si cualquiera de los ejes centroidales de un área componente es un eje de simetría para dicha área, el producto de inercia $\bar{I}_{x'y'}$ para el área bajo consideración es igual a cero. En este sentido, $\bar{I}_{x'y'}$ es igual a cero para áreas componentes como círculos, semicírculos, rectángulos y triángulos isósceles que poseen un eje de simetría paralelo a uno de los ejes coordenados.

b) Se debe prestar mucha atención a los signos de las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ de cada área componente cuando se use el teorema de los ejes paralelos [problema resuelto 9.7].

3. Determinación de los momentos de inercia y de los productos de inercia para ejes coordenados que han sido rotados. En la sección 9.9 se derivaron las ecuaciones (9.18), (9.19) y (9.20) a partir de las cuales pueden calcularse los momentos de inercia y el producto de inercia para ejes coordenados que han sido rotados alrededor del origen O. Para aplicar estas ecuaciones, es necesario conocer un conjunto de valores I_x, I_y e I_{xy} para una orientación dada de los ejes y se debe recordar θ que es positivo para rotaciones de los ejes en un sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj y negativa para rotaciones de los ejes en un sentido a favor del movimiento de las manecillas del reloj.

4. Cálculo de los momentos principales de inercia. En la sección 9.9 se mostró que existe una orientación en particular de los ejes coordenados, para la cual los momentos de inercia alcanzan sus valores máximo y mínimo, $I_{máx}$ e $I_{mín}$, y para la cual el producto de inercia es igual a cero. La ecuación (9.27) se puede utilizar para calcular estos valores, que se conocen como los *momentos principales de inercia* del área con respecto a O y su orientación está definida por la ecuación (9.25). *Para determinar cuál de los ejes principales corresponde a $I_{máx}$ y cuál a $I_{mín}$*, se puede seguir el procedimiento que se describió después de la ecuación (9.27) o también se puede observar con respecto a cuál de los dos ejes principales está más cerca del área distribuida; dicho eje corresponde a $I_{mín}$ [problema resuelto 9.7].

Problemas

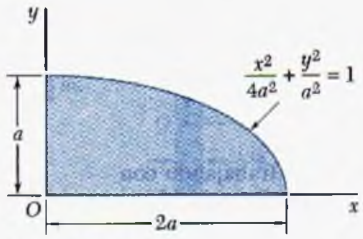


Figura *P9.67*

9.67 a 9.70 Para el área que muestra cada figura, determine por integración directa el producto de inercia respecto a los ejes x y y.

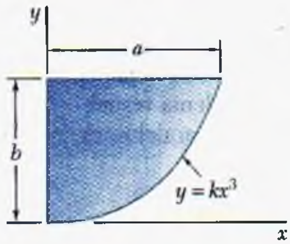


Figura P9.68

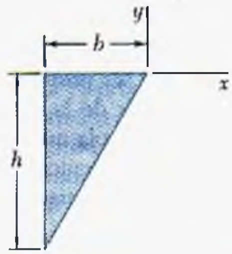


Figura P9.69

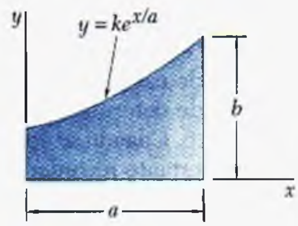


Figura P9.70

9.71 a 9.74 Utilice el teorema de los ejes paralelos para determinar, respecto a los ejes centroidales x y y, el producto de inercia del área que muestra la figura.

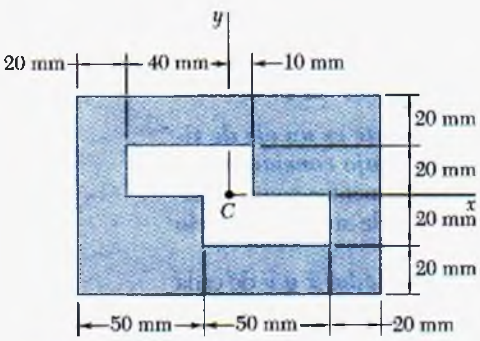


Figura P9.71

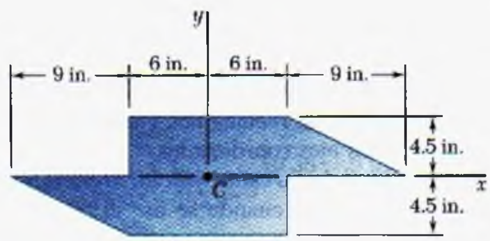


Figura P9.72

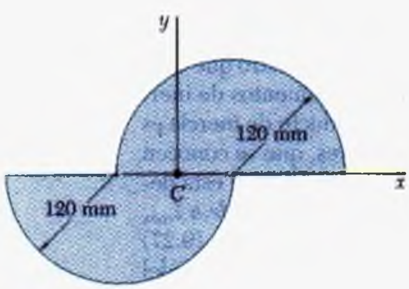


Figura P9.73

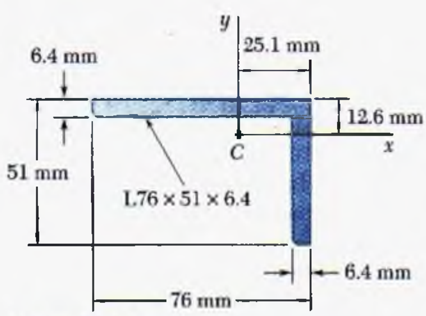


Figura P9.74

9.75 a 9.78 Utilice el teorema de los ejes paralelos para determinar, respecto a los ejes centroidales x y y, el producto de inercia del área que muestra la figura.

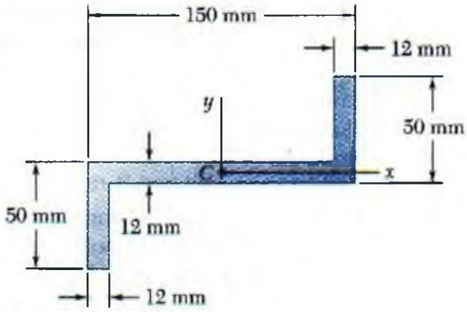


Figura P9.75

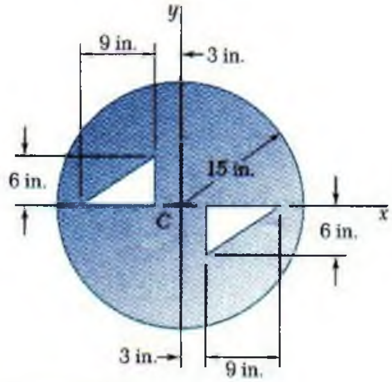


Figura *P9.76*

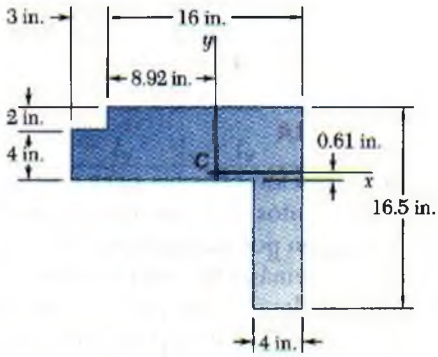


Figura *P9.77*

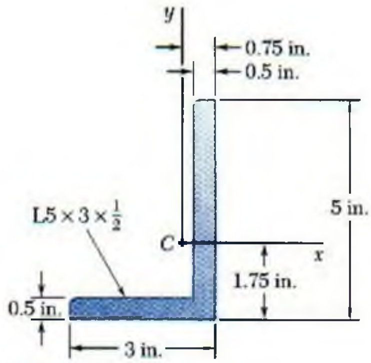


Figura P9.78

9.79 Determine los momentos y el producto de inercia del cuarto de elipse mostrado en el problema 9.67 respecto a un nuevo sistema de ejes, el cual se obtiene al rotar los ejes x y y alrededor de O en un ángulo de a) 45° en sentido contrario al de las manecillas del reloj, b) 30° en el mismo sentido que las manecillas del reloj.

9.80 Determine los momentos y los productos de inercia del área mostrada en el problema 9.72 respecto a nuevos ejes centroidales, los cuales se obtienen al rotar los ejes x y y en un ángulo de 45° en el mismo sentido que las manecillas del reloj.

9.81 Determine los momentos y los productos de inercia del área mostrada en el problema 9.73 respecto a nuevos ejes centroidales, los cuales se obtienen al rotar los ejes x y y en un ángulo de 30° en el mismo sentido que las manecillas del reloj.

9.82 Determine los momentos y los productos de inercia del área mostrada en el problema 9.75 respecto a nuevos ejes centroidales, los cuales se obtienen al rotar los ejes x y y en un ángulo de 60° en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

9.83 Determine los momentos y los productos de inercia de la sección transversal del ángulo L76 × 51 × 6.4 mm mostrado en el problema 9.74 respecto a nuevos ejes centroidales, los cuales se obtienen al rotar los ejes x y y en un ángulo de 45° en el mismo sentido que las manecillas del reloj.

9.84 Determine los momentos y los productos de inercia de la sección transversal del ángulo L5 × 3 × $\frac{1}{2}$ in. mostrado en el problema 9.78 respecto a nuevos ejes centroidales, los cuales se obtienen al rotar los ejes x y y en un ángulo de 30° en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

9.85 Para el cuarto de elipse del problema 9.67, determine la orientación de los ejes principales que pasan por el origen y los valores correspondientes de los momentos de inercia.

9.86 a 9.88 Para el área indicada, determine la orientación de los ejes principales que pasan por el origen y los valores correspondientes a los momentos de inercia.

9.86 Área del problema 9.72
9.87 Área del problema 9.73
9.88 Área del problema 9.75

9.89 y 9.90 Para la sección transversal del ángulo indicado, determine la orientación de los ejes principales que pasan por el origen y los valores correspondientes a los momentos de inercia.

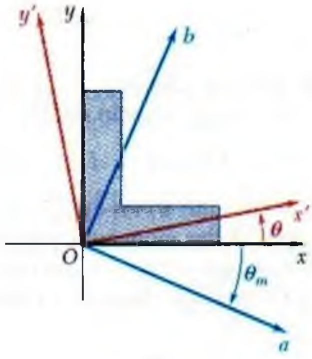
9.89 La sección transversal del ángulo L76 × 51 × 6.4 mm del problema 9.74
9.90 La sección transversal del ángulo L5 × 3 × $\frac{1}{2}$ in. del problema 9.78

*9.10. CÍRCULO DE MOHR PARA MOMENTOS Y PRODUCTOS DE INERCIA

El círculo utilizado en la sección anterior para ilustrar las relaciones que existen entre los momentos y productos de inercia de un área dada respecto a ejes que pasan por un punto fijo O fue presentado inicialmente por el ingeniero alemán Otto Mohr (1835-1918), y se conoce como *círculo de Mohr*. Se demostrará que si se conocen los momentos y productos de inercia de un área A respecto a dos ejes rectangulares x y y que pasan por un punto O, el círculo de Mohr se puede utilizar para determinar gráficamente *a*) los ejes principales y los momentos principales de inercia del área respecto a O, *b*) los momentos y el producto de inercia del área respecto a cualquier otro par de ejes rectangulares x' y y' que pasen por O.

Considere un área dada A y dos ejes coordenados rectangulares x y y (figura 9.19*a*). Suponiendo que los momentos de inercia I_x e I_y y el producto de inercia I_{xy} son conocidos estarán representados en un diagrama al graficar un punto X de coordenadas I_x e I_{xy} y un punto Y de coordenadas I_y y $-I_{xy}$ (figura 9.19*b*). Si I_{xy} es positivo, como se supuso en la figura 9.19*a*, el punto X estará localizado por encima del eje horizontal, y el punto Y se ubicará por debajo de dicho eje, como indica la figura 9.19*b*. Si I_{xy} es negativo, X se localizará por debajo del eje horizontal y Y por encima de ese eje. Uniendo X y Y mediante una línea recta, se representa con C el punto de intersección de la línea XY con el eje horizontal y se traza un círculo cuyo centro sea C y su diámetro XY. Al advertir que la abscisa de C y el radio del círculo son iguales, respectivamente, a las cantidades I_{prom} y R definidas mediante la fórmula (9.23), se concluye que el círculo obtenido es el círculo de Mohr para el área dada respecto al punto O. Por tanto, las abscisas de los puntos A y B donde el círculo corta al eje horizontal representan, respectivamente, los momentos principales de inercia $I_{\text{máx}}$ e $I_{\text{mín}}$ del área.

También se observa que, puesto que $\tan(XCA) = 2I_{xy}/(I_x - I_y)$, el ángulo XCA es igual en magnitud a uno de los ángulos $2\theta_m$ que satisfacen la ecuación (9.25); por tanto, el ángulo θ_m, que define al eje principal Oa en la figura 9.19*a* y corresponde al punto A en la figura 9.19*b*, es igual a la mitad del ángulo XCA del círculo de Mohr. Además, se ob-



a)

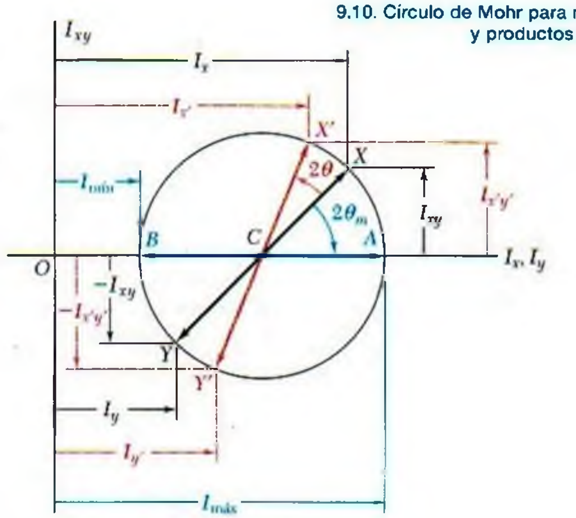


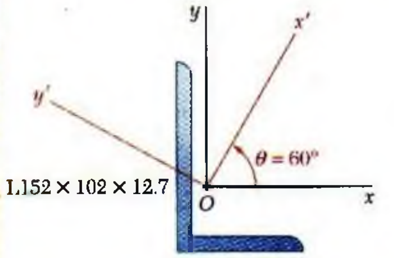
Figura 9.19 b)

serva que si $I_x > I_y$ e $I_{xy} > 0$, como en el caso que se considera aquí, la rotación que lleva a CX hasta CA es en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. En estas condiciones, el ángulo θ_m que se obtiene a partir de la ecuación (9.25), el cual define el eje principal Oa en la figura 9.19*a*, es negativo; por tanto, la rotación que lleva a Ox hasta Oa también es en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. Se concluye que los sentidos de rotación en ambas partes de la figura 9.19 son los mismos. Si se requiere una rotación en el sentido de las manecillas del reloj a través de un ángulo $2\theta_m$ para llevar a CX hasta CA en el círculo de Mohr, entonces una rotación en el sentido de las manecillas del reloj a través de un ángulo θ_m llevará a Ox hasta el eje principal correspondiente Oa en la figura 9.19*a*.

Como el círculo de Mohr está definido en forma única, el mismo círculo se puede obtener considerando los momentos y el producto de inercia del área A respecto a los ejes rectangulares x' y y' (figura 9.19*a*). Entonces, el punto X' de coordenadas $I_{x'}$ e $I_{x'y'}$ y el punto Y' de coordenadas $I_{y'}$ y $-I_{x'y'}$ están localizados sobre el círculo de Mohr y el ángulo $X'CA$ en la figura 9.19*b* debe ser igual al doble del ángulo $x'Oa$ en la figura 9.19*a*. Puesto que, como se señaló anteriormente, el ángulo XCA es igual al doble del ángulo xOa, se concluye que el ángulo XCX' en la figura 9.19*b* es el doble del ángulo xOx' en la figura 9.19*a*. El diámetro $X'Y'$ define a los momentos y al producto de inercia $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ del área dada con respecto a los ejes rectangulares x' y y' que forman un ángulo θ con los ejes x y y, se puede obtener rotando a través de un ángulo 2θ al diámetro XY, el cual corresponde a los momentos y al producto de inercia I_x, I_y e I_{xy}. Se observa que la rotación que lleva al diámetro XY hasta el diámetro $X'Y'$ en la figura 9.19*b* tiene el mismo sentido que la rotación que lleva a los ejes x y y hasta los ejes x' y y' en la figura 9.19*a*.

Es necesario señalar que el uso del círculo de Mohr no está limitado a las soluciones gráficas, esto es, a las soluciones basadas en dibujar y medir los distintos parámetros involucrados. Simplemente, al hacer un bosquejo del círculo de Mohr y con la trigonometría se pueden derivar las distintas relaciones que se requieren para la solución numérica de un problema dado (véase problema resuelto 9.8).

PROBLEMA RESUELTO 9.8

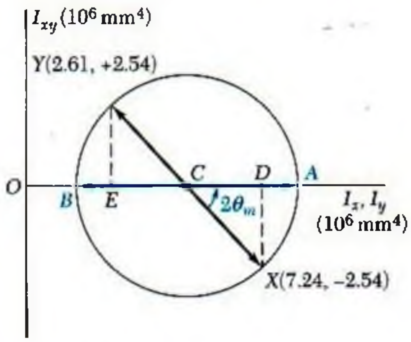


Para la sección mostrada en la figura, se sabe que los momentos y el producto de inercia con respecto a los ejes x y y están dados por

$$I_x = 7.24 \times 10^6 \text{ mm}^4 \qquad I_y = 2.61 \times 10^6 \text{ mm}^4 \qquad I_{xy} = -2.54 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Con el uso del círculo de Mohr, determine: *a*) los ejes principales de la sección con respecto a O, *b*) los valores de los momentos principales de inercia de la sección con respecto a O y *c*) los momentos y el producto de inercia de la sección con respecto a los ejes x' y y' que forman un ángulo de 60° con los ejes x y y.

SOLUCIÓN



Dibujo del círculo de Mohr. Primero se grafica el punto X de coordenadas $I_x = 7.24$, $I_{xy} = -2.54$ y el punto Y de coordenadas $I_y = 2.61$, $-I_{xy} = +2.54$. Uniendo los puntos X y Y con una línea recta, se define el centro C del círculo de Mohr. La abscisa de C, la cual representa I_{prom}, y el radio R del círculo se pueden medir directamente o se pueden calcular de la siguiente forma:

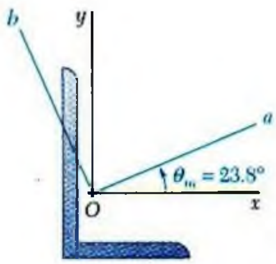
$$I_{\text{prom}} = OC = \tfrac{1}{2}(I_x + I_y) = \tfrac{1}{2}(7.24 \times 10^6 + 2.61 \times 10^6) = 4.925 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$CD = \tfrac{1}{2}(I_x - I_y) = \tfrac{1}{2}(7.24 \times 10^6 - 2.61 \times 10^6) = 2.315 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$R = \sqrt{(CD)^2 + (DX)^2} = \sqrt{(2.315 \times 10^6)^2 + (2.54 \times 10^6)^2} = 3.437 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

***a*) Ejes principales.** Los ejes principales de la sección corresponden a los puntos A y B en el círculo de Mohr y el ángulo a través del cual se debe rotar CX para llevarlo a CA define el ángulo $2\theta_m$. Así se tiene que

$$\tan 2\theta_m = \frac{DX}{CD} = \frac{2.54}{2.315} = 1.097 \qquad 2\theta_m = 47.6° \circlearrowleft \qquad \theta_m = 23.8° \circlearrowleft \blacktriangleleft$$



Por tanto, el eje principal Oa correspondiente al valor máximo del momento de inercia se obtiene rotando el eje x a través de 23.8° en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj; el eje principal Ob correspondiente al valor mínimo del momento de inercia se puede obtener rotando el eje y a través del mismo ángulo.

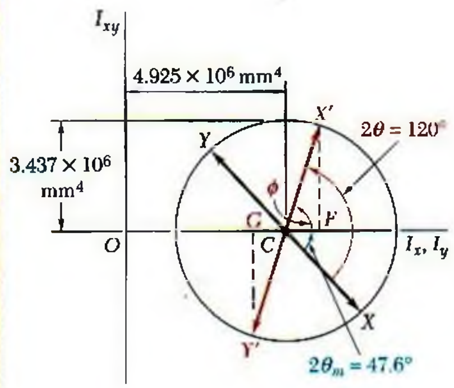
***b*) Momentos principales de inercia.** Los momentos principales de inercia están representados por las abscisas de los puntos A y B. Por tanto, se tiene que

$$I_{\text{máx}} = OA = OC + CA = I_{\text{prom}} + R = (4.925 + 3.437)10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{\text{máx}} = 8.36 \times 10^6 \text{ mm}^4 \blacktriangleleft$$

$$I_{\text{mín}} = OB = OC - BC = I_{\text{prom}} - R = (4.925 - 3.437)10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{\text{mín}} = 1.49 \times 10^6 \text{ mm}^4 \blacktriangleleft$$



***c*) Momentos y producto de inercia con respecto a los ejes x' y y'.** En el círculo de Mohr, los puntos X' y Y' corresponden a los ejes x' y y', aquéllos se obtienen rotando CX y CY a través de un ángulo $2\theta = 2(60°) = 120°$ en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj. Las coordenadas de X' y Y' proporcionan los momentos y el producto de inercia buscados. Observe que el ángulo que CX' forma con la horizontal es $\phi = 120° - 47.6° = 72.4°$, se escribe

$$I_{x'} = OF = OC + CF = 4.925 \times 10^6 \text{ mm}^4 + (3.437 \times 10^6 \text{ mm}^4) \cos 72.4°$$

$$I_{x'} = 5.96 \times 10^6 \text{ mm}^4 \blacktriangleleft$$

$$I_{y'} = OG = OC - GC = 4.925 \times 10^6 \text{ mm}^4 - (3.437 \times 10^6 \text{ mm}^4) \cos 72.4°$$

$$I_{y'} = 3.89 \times 10^6 \text{ mm}^4 \blacktriangleleft$$

$$I_{x'y'} = FX' = (3.437 \times 10^6 \text{ mm}^4) \sin 72.4°$$

$$I_{x'y'} = 3.28 \times 10^6 \text{ mm}^4 \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los problemas propuestos correspondientes a esta lección se utilizará el *círculo de Mohr* para determinar los momentos y productos de inercia de un área dada para diferentes orientaciones de los ejes coordenados. Aunque en algunos casos el uso del círculo de Mohr puede no ser tan directo como sustituir la información necesaria en las ecuaciones apropiadas [ecuaciones (9.18) a la (9.20)], este método de solución tiene la ventaja de que proporciona una representación visual de las relaciones que existen entre las distintas variables. Además, el círculo de Mohr muestra todos los valores de los momentos y productos de inercia que son posibles para un problema dado.

Uso del círculo de Mohr. La teoría correspondiente al círculo de Mohr fue presentada en la sección 9.9 y su aplicación se expuso en la sección 9.10 y en el problema resuelto 9.8. En el problema resuelto se presentaron los pasos que deben seguirse para determinar los *ejes principales*, los *momentos principales de inercia* y los *momentos y el producto de inercia con respecto a una orientación especificada de los ejes coordenados*. Cuando se utiliza el círculo de Mohr para resolver problemas, es importante recordar los siguientes puntos.

a) El círculo de Mohr está completamente definido por las cantidades R e I_{prom}, las cuales representan, respectivamente, el radio del círculo y la distancia desde el origen O hasta el centro del círculo C. Estas cantidades pueden obtenerse a partir de las ecuaciones (9.23) si se conocen los momentos y el producto de inercia para una orientación dada de los ejes. Sin embargo, el círculo de Mohr también puede definirse por medio de otra combinación de valores conocidos [problemas 9.105, 9.108 y 9.109]. Para estos casos, puede ser que sea necesario realizar primero una o más suposiciones, como seleccionar una ubicación arbitraria para el centro del círculo cuando I_{prom} es desconocida, asignarle magnitudes relativas a los momentos de inercia (por ejemplo, $I_x > I_y$), o seleccionar el signo del producto de inercia.

b) El punto X de coordenadas (I_x, I_{xy}) y el punto Y de coordenadas (I_y, $-I_{xy}$) están localizados sobre el círculo de Mohr y son completamente opuestos.

c) Como los momentos de inercia deben ser positivos, todo el círculo de Mohr debe estar localizado a la derecha del eje I_{xy}; por tanto se concluye que $I_{prom} > R$ para todos los casos.

d) Conforme los ejes coordenados se rotan a través de un ángulo θ, la rotación asociada del diámetro del círculo de Mohr es igual a 2θ y es en el mismo sentido (a favor o en contra del movimiento de las manecillas del reloj). Se recomienda que los puntos conocidos sobre la circunferencia del círculo sean identificados con una letra mayúscula apropiada, como se hizo en la figura 9.19*b* y en los círculos de Mohr del problema resuelto 9.8. Esto permitirá determinar, para cada valor de θ, el signo del producto de inercia correspondiente, así como el momento de inercia que está asociado con cada uno de los ejes coordenados [problema resuelto 9.8, incisos *a*) y *c*)].

Aun cuando se ha presentado al círculo de Mohr dentro del contexto específico del estudio de los momentos y productos de inercia, la técnica del círculo de Mohr también se puede aplicar para la solución de problemas análogos pero físicamente distintos en mecánica de materiales. Este uso múltiple de una técnica específica no es único y en el estudio de la ingeniería se pueden encontrar varios métodos de solución que pueden aplicarse a diversos problemas.

Problemas

9.91 Utilice el círculo de Mohr para determinar los momentos y el producto de inercia del cuarto de elipse mostrado en el problema 9.67 respecto a un nuevo sistema de ejes, el cual se obtiene al rotar los ejes x y y alrededor de O en un ángulo de *a*) 45° en sentido contrario al de las manecillas del reloj, *b*) 30° en el mismo sentido que las manecillas del reloj.

9.92 Utilice el círculo de Mohr para determinar los momentos y el producto de inercia del área mostrada en el problema 9.72 respecto a nuevos ejes centroidales, los cuales se obtienen al rotar los ejes x y y en un ángulo de 45° en el mismo sentido que las manecillas del reloj.

9.93 Utilice el círculo de Mohr para determinar los momentos y el producto de inercia del área mostrada en el problema 9.73 respecto a nuevos ejes centroidales, los cuales se obtienen al rotar los ejes x y y en un ángulo de 30° en el mismo sentido que las manecillas del reloj.

9.94 Utilice el círculo de Mohr para determinar los momentos y el producto de inercia del área mostrada en el problema 9.75 respecto a nuevos ejes centroidales, los cuales se obtienen al rotar los ejes x y y en un ángulo de 60° en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

9.95 Utilice el círculo de Mohr para determinar los momentos y el producto de inercia de la sección transversal del ángulo L76 × 51 × 6.4 mm mostrado en el problema 9.74 respecto a nuevos ejes centroidales, los cuales se obtienen al rotar los ejes x y y en un ángulo de 45° en el mismo sentido que las manecillas del reloj.

9.96 Utilice el círculo de Mohr para determinar los momentos y el producto de inercia de la sección transversal del ángulo L5 × 3 × $\frac{1}{2}$ in. mostrado en el problema 9.78 respecto a los nuevos ejes centroidales que se obtienen al rotar los ejes x y y en un ángulo de 30° en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

9.97 Para el cuarto de elipse del problema 9.67, utilice el círculo de Mohr para determinar la orientación de los ejes principales que pasan por el origen y los valores correspondientes de los momentos de inercia.

9.98 a 9.104 Utilice el círculo de Mohr y determine, para el área indicada, la orientación de los ejes principales que pasan por el origen y los valores correspondientes de los momentos de inercia.

9.98 Área del problema 9.72
9.99 Área del problema 9.76
9.100 Área del problema 9.73
9.101 Área del problema 9.74
9.102 Área del problema 9.75
9.103 Área del problema 9.71
9.104 Área del problema 9.77

(Los momentos de inercia $\bar{I}_x$ e $\bar{I}_y$ para el área del problema 9.104 se determinaron en el problema 9.43.)

9.105 Los momentos y el producto de inercia de la sección transversal de un ángulo L102 × 76 × 6.4 mm respecto a un sistema de ejes coordenados x y y que pasan por el punto C son, respectivamente, $\bar{I}_x = 0.166 \times 10^6$ mm^4, $\bar{I}_y = 0.453 \times 10^6$ mm^4 e $\bar{I}_{xy} < 0$, con el valor mínimo del momento

de inercia del área respecto a cualquier eje que pase por C igual a $\bar{I}_{\text{mín}} = 0.051 \times 10^6$ mm^4. Utilizando el círculo de Mohr, determine *a*) el producto de inercia $\bar{I}_{xy}$ del área, *b*) la orientación de los ejes principales, *c*) el valor de $\bar{I}_{\text{máx}}$.

9.106 y 9.107 Utilice el círculo de Mohr y determine, para la sección transversal del ángulo de acero laminado que muestra cada figura, la orientación de los ejes centroidales principales y los valores correspondientes de los momentos de inercia. (Las propiedades de la sección transversal se especifican en la figura 9.13.)

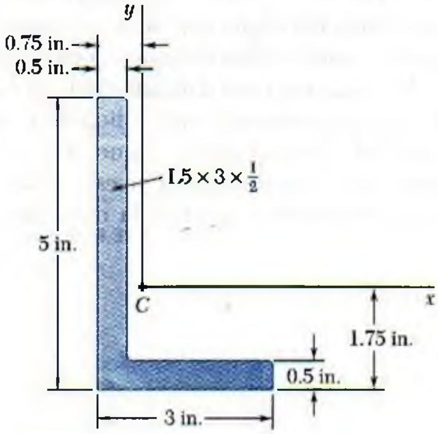


Figura P9.106

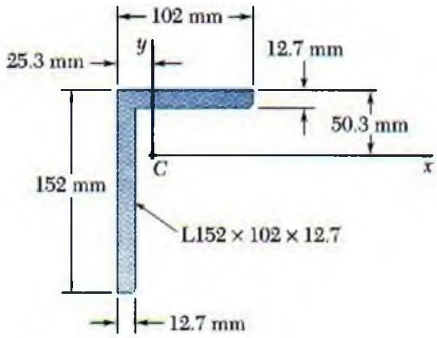


Figura P9.107

***9.108** Los momentos de inercia respecto a los ejes centroidales rectangulares x y y de cierta área son, respectivamente, $\bar{I}_x = 640$ in.^{4} e $\bar{I}_y = 280$ in.^{4}. Si después de rotar respecto al centroide los ejes x y y en un ángulo de 60°, en el mismo sentido que las manecillas del reloj, el valor del producto de inercia relativo a los ejes rotados es de -180 in.^{4}, utilice el círculo de Mohr para determinar *a*) la orientación de los ejes principales, *b*) los momentos de inercia centroidales principales.

9.109 Se sabe que para un área dada $\bar{I}_y = 300$ in.^{4} e $\bar{I}_{xy} = -125$ in.^{4}, donde x y y son ejes rectangulares centroidales. Si el eje que corresponde al valor máximo del producto de inercia se obtiene al rotar, respecto al punto C, el eje x en 67.5° en sentido contrario al de las manecillas del reloj, use el círculo de Mohr para determinar *a*) el momento de inercia $\bar{I}_x$ del área, *b*) los momentos de inercia centroidales principales.

9.110 Utilice el círculo de Mohr y demuestre que, para cualquier polígono regular (tal como un pentágono) *a*) el momento de inercia respecto a cualquier eje que pase por el centroide siempre es el mismo, *b*) el producto de inercia respecto a cualquier par de ejes rectangulares que pasen por el centroide siempre es cero.

9.111 Utilice el círculo de Mohr para demostrar que la expresión $I_{x'}I_{y'} - I^2_{x'y'}$ es independiente de la orientación de los ejes x' y y' donde $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ representan, respectivamente, los momentos y el producto de inercia de un área dada respecto a los ejes rectangulares x' y y' que pasan por el punto O. Demuestre también que la expresión anterior es igual al cuadrado de la longitud de una línea tangente al círculo de Mohr y trazada desde el origen del sistema de ejes coordenados.

9.112 Utilizando la propiedad de invariabilidad establecida en el problema anterior, exprese el producto de inercia I_{xy} de un área A, respecto a los dos ejes rectangulares que pasan por el punto O, en términos de los momentos de inercia I_x e I_y de dicha área y los principales momentos de inercia $I_{\text{mín}}$ e $I_{\text{máx}}$ de A alrededor de O. Si el momento de inercia máximo es de 524×10^3 mm^4, aplique la fórmula obtenida para calcular el producto de inercia $\bar{I}_{xy}$ para la sección transversal del ángulo de $76 \times 51 \times 6.4$ mm que se muestra en la figura 9.13B.

MOMENTOS DE INERCIA DE MASAS

9.11. MOMENTO DE INERCIA DE UNA MASA

Considere una pequeña masa Δm que está montada sobre una barra de masa insignificante, la cual puede rotar libremente alrededor de un eje AA' (figura 9.20*a*). Si se aplica un par al sistema, la barra y la masa, las cuales se supone que estaban en reposo, comienzan a girar alrededor de AA'. Los detalles de este movimiento serán estudiados posteriormente en dinámica. Por ahora sólo se desea indicar que el tiempo requerido para que el sistema alcance una velocidad de rotación dada es proporcional a la masa Δm y al cuadrado de la distancia r. Por tanto, el producto $r^2\,\Delta m$ proporciona una medida de la *inercia* del sistema, esto es, una medida de la resistencia que ofrece el sistema cuando se trata de ponerlo en movimiento. Por esta razón, el producto $r^2\,\Delta m$ es llamado el *momento de inercia* de la masa Δm con respecto al eje AA'.

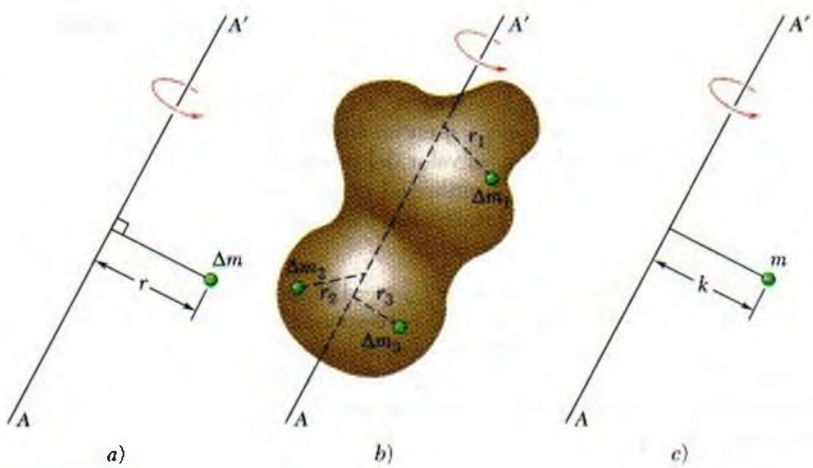


Figura 9.20

Ahora considere un cuerpo de masa m, el cual se hará girar alrededor de un eje AA' (figura 9.20*b*). Si se divide el cuerpo en elementos de masa Δm_1, Δm_2, etc., se encuentra que la resistencia que ofrece el cuerpo al movimiento de rotación se mide por la suma $r_1^2\,\Delta m_1 + r_2^2\,\Delta m_2 + \cdots$. Por tanto, esta suma define el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje AA'. Al incrementar el número de elementos se encuentra que, en el límite, el momento de inercia es igual a la integral

$$I = \int r^2\,dm \tag{9.28}$$

El *radio de giro* k del cuerpo con respecto al eje AA' está definido por la relación

$$I = k^2 m \qquad \text{o} \qquad k = \sqrt{\frac{I}{m}} \tag{9.29}$$

En este sentido, el radio de giro k representa la distancia a la cual se debe concentrar toda la masa del cuerpo si su momento de inercia con respecto a AA' debe permanecer inalterado (figura 9.20*c*). Sin importar si la masa m se conserva en su forma original (figura 9.20*b*) o si se concentra como se muestra en la figura 9.20*c*, ésta reaccionará de la misma forma a una rotación o *giro* con respecto a AA'.

Si se utilizan las unidades del SI, el radio de giro k está expresado en metros y la masa m está expresada en kilogramos, por tanto, la unidad empleada para el momento de inercia de una masa es $\text{kg} \cdot \text{m}^2$. Si se utilizan las unidades de uso común en Estados Unidos, el radio de giro se expresa en pies y la masa en *slugs* (esto es en $\text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$), por tanto, la unidad derivada empleada para el momento de inercia de una masa es $\text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$.[1]

El momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje coordenado puede expresarse en términos de las coordenadas x, y y z del elemento de masa dm (figura 9.21). Por ejemplo, observe que el cuadrado de la distancia r desde el elemento dm hasta el eje y es igual a $z^2 + x^2$, se expresa el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje y como

$$I_y = \int r^2\, dm = \int (z^2 + x^2)\, dm$$

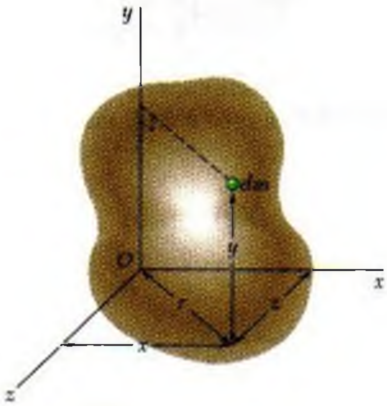


Figura 9.21

Se pueden obtener expresiones similares para los momentos de inercia respecto a los ejes x y z. Así se escribe

$$\begin{aligned} I_x &= \int (y^2 + z^2)\, dm \\ I_y &= \int (z^2 + x^2)\, dm \\ I_z &= \int (x^2 + y^2)\, dm \end{aligned} \tag{9.30}$$



Fotografía 9.2 Como se expondrá en el curso de dinámica, el comportamiento rotacional del eje que se muestra en la fotografía depende del momento de inercia de masa del eje con respecto a su eje de rotación.

[1] Cuando se convierte el momento de inercia de masa de unidades de uso común en Estados Unidos o las unidades del SI, se debe recordar que la unidad base *libra* utilizada en la unidad derivada $\text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$ es una unidad de fuerza (*no* de masa) y por tanto, debe convertirse a newtons. Así se tiene que

$$1\ \text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2 = (4.45\ \text{N})(0.3048\ \text{m})(1\ \text{s})^2 = 1.356\ \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$$

o, como $1\ \text{N} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$,

$$1\ \text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2 = 1.356\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

9.12. TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS

Considere un cuerpo de masa m. Sea $Oxyz$ un sistema de coordenadas rectangulares cuyo origen está localizado en el punto arbitrario O y sea $Gx'y'z'$ un sistema de *ejes centroidales* paralelo, esto es, un sistema cuyo origen está en el centro de gravedad G del cuerpo[†] y cuyos ejes x', y' y z' son paralelos a los ejes x, y y z, respectivamente (figura 9.22). Representando con $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$ las coordenadas de G con respecto a $Oxyz$, se escriben las siguientes relaciones entre las coordenadas x, y y z del elemento dm con respecto a $Oxyz$ y las coordenadas x', y' y z' de dicho elemento con respecto a los ejes centroidales $Gx'y'z'$:

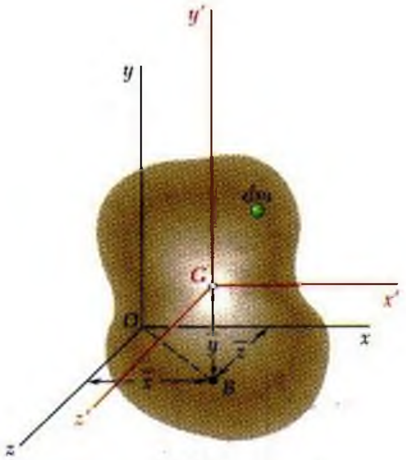


Figura 9.22

$$x = x' + \bar{x} \qquad y = y' + \bar{y} \qquad z = z' + \bar{z} \tag{9.31}$$

Con las ecuaciones (9.30) se puede expresar el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje x de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} I_x &= \int (y^2 + z^2)\, dm = \int [(y' + \bar{y})^2 + (z' + \bar{z})^2]\, dm \\ &= \int (y'^2 + z'^2)\, dm + 2\bar{y} \int y'\, dm + 2\bar{z} \int z'\, dm + (\bar{y}^2 + \bar{z}^2) \int dm \end{aligned}$$

La primera integral en la expresión anterior representa el momento de inercia $\bar{I}_{x'}$ del cuerpo con respecto al eje centroidal x'; la segunda y la tercera representan, respectivamente, el primer momento del cuerpo con respecto a los planos $z'x'$ y $x'y'$, como ambos planos contienen al punto G, las dos integrales son iguales a *cero*; la última integral es igual a la masa total m del cuerpo. Por tanto, se escribe,

$$I_x = \bar{I}_{x'} + m(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) \tag{9.32}$$

y, en forma similar,

$$I_y = \bar{I}_{y'} + m(\bar{z}^2 + \bar{x}^2) \qquad I_z = \bar{I}_{z'} + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \tag{9.32'}$$

Con base en la figura 9.22 se puede verificar que la suma $\bar{z}^2 + \bar{x}^2$ representa el cuadrado de la distancia OB entre los ejes y y y'. En forma análoga, $\bar{y}^2 + \bar{z}^2$ y $\bar{x}^2 + \bar{y}^2$ representan, respectivamente, los cuadrados de la distancia entre los ejes x y x' y entre los ejes z y z'. Por tanto, representando con d la distancia entre un eje arbitrario AA' y un eje centroidal paralelo BB' (figura 9.23) se puede escribir la siguiente relación general entre el momento de inercia I del cuerpo con respecto a AA' y su momento de inercia $\bar{I}$ con respecto a BB':

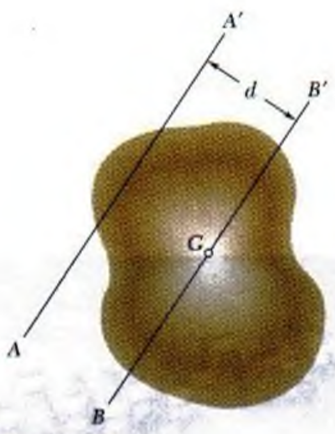


Figura 9.23

$$I = \bar{I} + md^2 \tag{9.33}$$

Expresando los momentos de inercia en términos de los radios de giro correspondientes, también se puede escribir

$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2 \tag{9.34}$$

donde k y $\bar{k}$ representan, respectivamente, los radios de giro del cuerpo con respecto a AA' y BB'.

[†]Observe que el término *centroidal* se usa para definir el eje que pasa por el centro de gravedad G del cuerpo, aunque no coincida G con el centroide del volumen del cuerpo.

9.13. MOMENTOS DE INERCIA DE PLACAS DELGADAS

Considere una placa delgada de espesor uniforme t, la cual está hecha de material homogéneo de densidad ρ (densidad = masa por unidad de volumen). El momento de inercia de masa de la placa con respecto a un eje AA' *contenido en el plano* de la placa (figura 9.24*a*) está dado por

$$I_{AA',\,\text{masa}} = \int r^2\,dm$$

Como $dm = \rho t\,dA$, se escribe

$$I_{AA',\,\text{masa}} = \rho t \int r^2\,dA$$

Pero r representa la distancia que hay desde el elemento de área dA

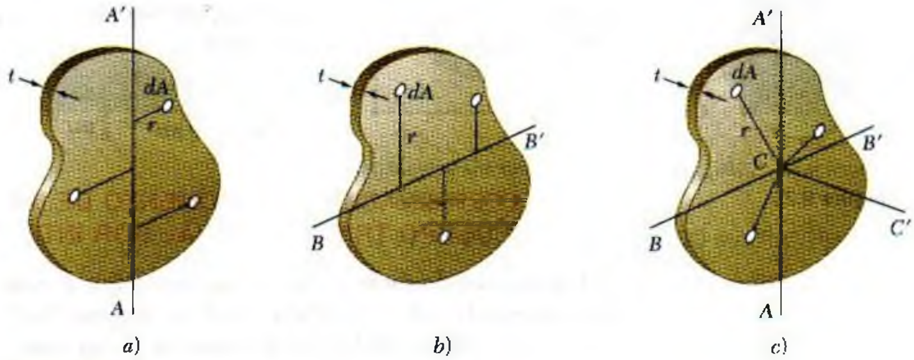


Figura 9.24

hasta el eje AA'; por tanto, la integral es igual al momento de inercia del área de la placa con respecto a AA'. Así se tiene que

$$I_{AA',\,\text{masa}} = \rho t I_{AA',\,\text{área}} \tag{9.35}$$

En forma similar, para un eje BB' que está contenido en el plano de la placa y que es perpendicular a AA' (figura 9.24*b*), se tiene que

$$I_{BB',\,\text{masa}} = \rho t I_{BB',\,\text{área}} \tag{9.36}$$

Ahora, considerando al eje CC' que es *perpendicular* a la placa y que pasa a través del punto de intersección C de AA' y BB' (figura 9.24*c*), se escribe

$$I_{CC',\,\text{masa}} = \rho t J_{C,\,\text{área}} \tag{9.37}$$

donde J_C es el momento *polar* de inercia del área de la placa con respecto al punto C.

Recordando la relación $J_C = I_{AA'} + I_{BB'}$ que existe entre el momento polar de inercia y los momentos rectangulares de inercia de un área se escribe la siguiente relación entre los momentos de inercia de masa de una placa delgada:

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} \tag{9.38}$$

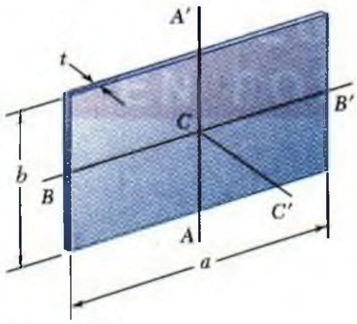


Figura 9.25

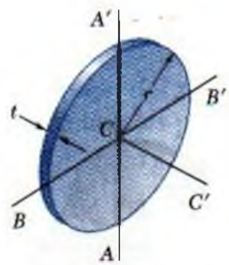
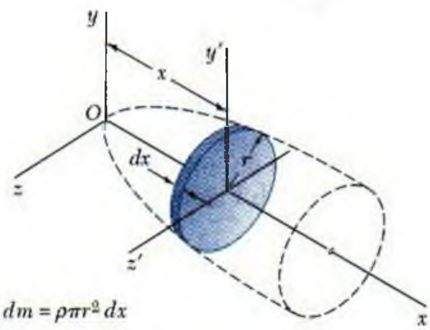


Figura 9.26



$dm = \rho\pi r^2\, dx$

$dI_x = \frac{1}{2} r^2\, dm$

$dI_y = dI_{y'} + x^2\, dm = \left(\frac{1}{4} r^2 + x^2\right) dm$

$dI_z = dI_{z'} + x^2\, dm = \left(\frac{1}{4} r^2 + x^2\right) dm$

Figura 9.27 Determinación del momento de inercia de un cuerpo de revolución.

Placa rectangular. En el caso de una placa rectangular de lados a y b (figura 9.25), se obtienen los siguientes momentos de inercia de masa con respecto a ejes que pasan a través del centro de gravedad de la placa:

$$I_{AA',\text{ masa}} = \rho t I_{AA',\text{ área}} = \rho t(\tfrac{1}{12}a^3 b)$$
$$I_{BB',\text{ masa}} = \rho t I_{BB',\text{ área}} = \rho t(\tfrac{1}{12}ab^3)$$

Observando que el producto ρabt es igual a la masa m de la placa, se escriben los momentos de inercia de masa de una placa rectangular delgada de la forma siguiente:

$$I_{AA'} = \tfrac{1}{12}ma^2 \qquad I_{BB'} = \tfrac{1}{12}mb^2 \tag{9.39}$$
$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \tfrac{1}{12}m(a^2 + b^2) \tag{9.40}$$

Placa circular. En el caso de una placa circular o disco de radio r (figura 9.26), se escribe

$$I_{AA',\text{ masa}} = \rho t I_{AA',\text{ área}} = \rho t(\tfrac{1}{4}\pi r^4)$$

Observando que el producto $\rho\pi r^2 t$ es igual a la masa m de la placa y que $I_{AA'} = I_{BB'}$, se escriben los momentos de inercia de masa de una placa circular de la siguiente forma:

$$I_{AA'} = I_{BB'} = \tfrac{1}{4}mr^2 \tag{9.41}$$
$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \tfrac{1}{2}mr^2 \tag{9.42}$$

9.14. DETERMINACIÓN DEL MOMENTO DE INERCIA DE UN CUERPO TRIDIMENSIONAL POR INTEGRACIÓN

El momento de inercia de un cuerpo tridimensional se obtiene evaluando la integral $I = \int r^2\, dm$. Si el cuerpo está hecho de material homogéneo de densidad ρ, el elemento de masa dm es igual a ρdV y se puede escribir $I = \rho \int r^2\, dV$. Esta integral sólo depende de la forma del cuerpo. Por tanto, para calcular el momento de inercia de un cuerpo tridimensional será necesario llevar a cabo una triple integración o, cuando menos, una doble integración.

Sin embargo, si el cuerpo posee dos planos de simetría, es posible determinar el momento de inercia del cuerpo con una sola integración seleccionando como elemento de masa dm una placa delgada que es perpendicular a los planos de simetría. Por ejemplo, en el caso de cuerpos de revolución, el elemento de masa será un disco delgado (figura 9.27). Con la fórmula (9.42), el momento de inercia del disco con respecto al eje de revolución se puede expresar como se indica en la figura 9.27. Por otra parte, el momento de inercia del disco con respecto a cada uno de los otros dos ejes coordenados se obtiene con la fórmula (9.41) y el teorema de los ejes paralelos. Integrando las expresiones obtenidas de esta forma, se obtienen los elementos de inercia del cuerpo.

9.15. MOMENTOS DE INERCIA DE CUERPOS COMPUESTOS

En la figura 9.28 se muestran los momentos de inercia de algunas formas comunes. Para un cuerpo que consiste de varias de estas formas simples, se puede obtener el momento de inercia de dicho cuerpo con respecto a un eje dado calculando primero los momentos de inercia de las partes que lo constituyen con respecto al eje deseado y sumándolos después. Como en el caso de las áreas, el radio de giro de un cuerpo compuesto *no se puede* obtener sumando los radios de giro de las partes que lo constituyen.

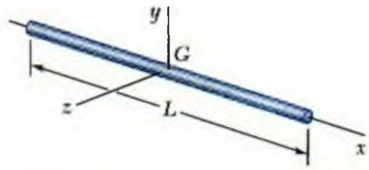
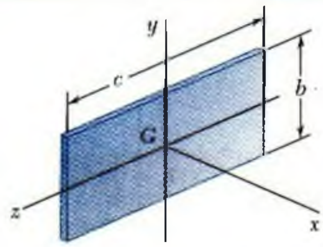
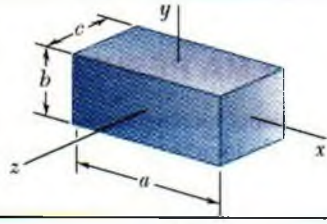
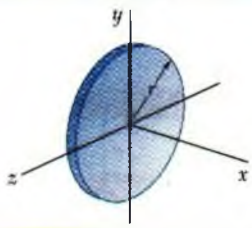
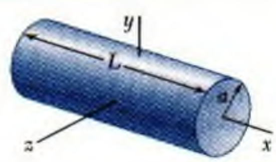
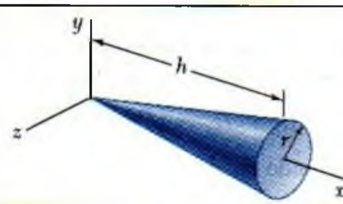
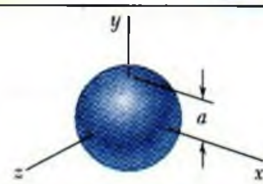
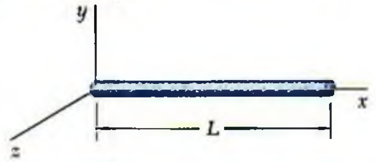
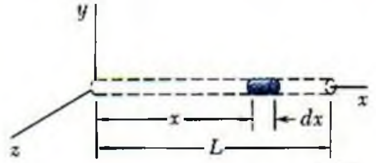
Barra delgada		$I_y = I_z = \frac{1}{12} mL^2$
Placa rectangular delgada		$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12} mc^2$ $I_z = \frac{1}{12} mb^2$
Prisma rectangular		$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12} m(c^2 + a^2)$ $I_z = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$
Disco delgado		$I_x = \frac{1}{2} mr^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4} mr^2$
Cilindro circular		$I_x = \frac{1}{2} ma^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{12} m(3a^2 + L^2)$
Cono circular		$I_x = \frac{3}{10} ma^2$ $I_y = I_z = \frac{3}{5} m(\frac{1}{4} a^2 + h^2)$
Esfera		$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} ma^2$

Figura 9.28 Momentos de inercia de masa de formas geométricas comunes.



PROBLEMA RESUELTO 9.9

Determine el momento de inercia de una barra delgada de longitud L y masa m con respecto a un eje que es perpendicular a la barra y que pasa a través de uno de sus extremos.

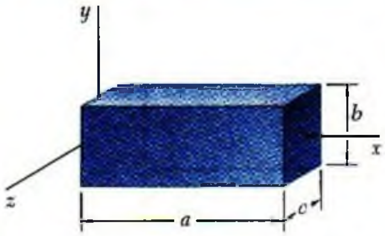


SOLUCIÓN

Si se selecciona el elemento diferencial de masa mostrado en la figura, se escribe

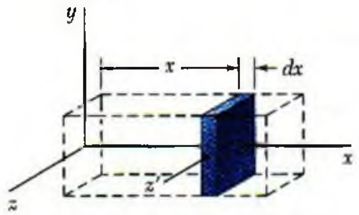
$$dm = \frac{m}{L}\,dx$$

$$I_y = \int x^2\,dm = \int_0^L x^2 \frac{m}{L}\,dx = \left[\frac{m}{L}\frac{x^3}{3}\right]_0^L \qquad I_y = \tfrac{1}{3}mL^2 \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 9.10

Para el prisma rectangular homogéneo mostrado en la figura, determine el momento de inercia con respecto al eje z.



SOLUCIÓN

Se selecciona como elemento diferencial de masa a la placa delgada mostrada en la figura; por tanto,

$$dm = \rho bc\,dx$$

Haciendo referencia a la sección 9.13, se encuentra que el momento de inercia del elemento con respecto al eje z' está dado por

$$dI_{z'} = \tfrac{1}{12}b^2\,dm$$

Con la aplicación del teorema de los ejes paralelos, se obtiene el momento de inercia de masa de la placa con respecto al eje z.

$$dI_z = dI_{z'} + x^2\,dm = \tfrac{1}{12}b^2\,dm + x^2\,dm = (\tfrac{1}{12}b^2 + x^2)\,\rho bc\,dx$$

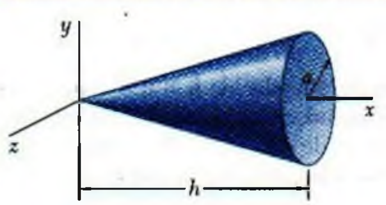
Integrando desde $x = 0$ hasta $x = a$, se obtiene

$$I_z = \int dI_z = \int_0^a (\tfrac{1}{12}b^2 + x^2)\,\rho bc\,dx = \rho abc(\tfrac{1}{12}b^2 + \tfrac{1}{3}a^2)$$

Como la masa total del prisma es $m = \rho abc$, se puede escribir

$$I_z = m(\tfrac{1}{12}b^2 + \tfrac{1}{3}a^2) \qquad I_z = \tfrac{1}{12}m(4a^2 + b^2) \blacktriangleleft$$

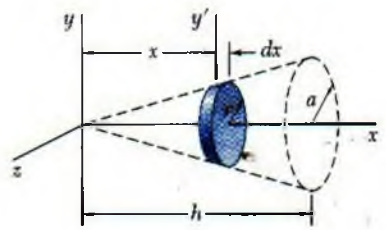
Se observa que si el prisma es delgado, b es pequeño en comparación con a y la expresión para I_z se reduce a $\tfrac{1}{3}ma^2$, la cual es el resultado obtenido en el problema resuelto 9.9 cuando $L = a$.



PROBLEMA RESUELTO 9.11

Determine el momento de inercia de un cono circular recto con respecto a: *a*) su eje longitudinal, *b*) un eje que pasa a través del ápice del cono y que es perpendicular a su eje longitudinal y *c*) un eje que pasa a través del centroide del cono y que es perpendicular a su eje longitudinal.

SOLUCIÓN



Se selecciona el elemento diferencial de masa mostrado en la figura.

$$r = a\frac{x}{h} \qquad dm = \rho\pi r^2\,dx = \rho\pi\frac{a^2}{h^2}x^2\,dx$$

***a*) Momento de inercia I_x.** Con el uso de la expresión derivada en la sección 9.13 para un disco delgado, se calcula el momento de inercia de masa del elemento diferencial con respecto al eje x.

$$dI_x = \tfrac{1}{2}r^2\,dm = \tfrac{1}{2}\left(a\frac{x}{h}\right)^2\left(\rho\pi\frac{a^2}{h^2}x^2\,dx\right) = \tfrac{1}{2}\rho\pi\frac{a^4}{h^4}x^4\,dx$$

Integrando desde $x = 0$ hasta $x = h$, se obtiene

$$I_x = \int dI_x = \int_0^h \tfrac{1}{2}\rho\pi\frac{a^4}{h^4}x^4\,dx = \tfrac{1}{2}\rho\pi\frac{a^4}{h^4}\frac{h^5}{5} = \tfrac{1}{10}\rho\pi a^4 h$$

Como la masa total del cono es $m = \frac{1}{3}\rho\pi a^2 h$, se puede escribir

$$I_x = \tfrac{1}{10}\rho\pi a^4 h = \tfrac{3}{10}a^2(\tfrac{1}{3}\rho\pi a^2 h) = \tfrac{3}{10}ma^2 \qquad I_x = \tfrac{3}{10}ma^2 \blacktriangleleft$$

***b*) Momento de inercia I_y.** Se utiliza el mismo elemento diferencial. Aplicando el teorema de los ejes paralelos y con la expresión derivada en la sección 9.13 para un disco delgado, se escribe

$$dI_y = dI_{y'} + x^2\,dm = \tfrac{1}{4}r^2\,dm + x^2\,dm = (\tfrac{1}{4}r^2 + x^2)\,dm$$

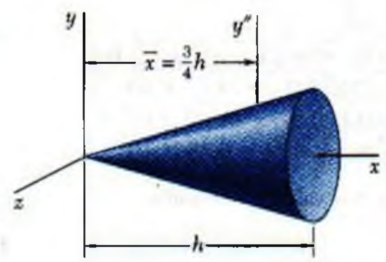
Si se sustituyen las expresiones para r y para dm en la ecuación anterior, se obtiene

$$dI_y = \left(\frac{1}{4}\frac{a^2}{h^2}x^2 + x^2\right)\left(\rho\pi\frac{a^2}{h^2}x^2\,dx\right) = \rho\pi\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{a^2}{4h^2} + 1\right)x^4\,dx$$

$$I_y = \int dI_y = \int_0^h \rho\pi\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{a^2}{4h^2} + 1\right)x^4\,dx = \rho\pi\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{a^2}{4h^2} + 1\right)\frac{h^5}{5}$$

Con la introducción de la expresión para la masa total del cono m, se reescribe I_y de la forma siguiente:

$$I_y = \tfrac{3}{5}(\tfrac{1}{4}a^2 + h^2)\tfrac{1}{3}\rho\pi a^2 h \qquad I_y = \tfrac{3}{5}m(\tfrac{1}{4}a^2 + h^2) \blacktriangleleft$$



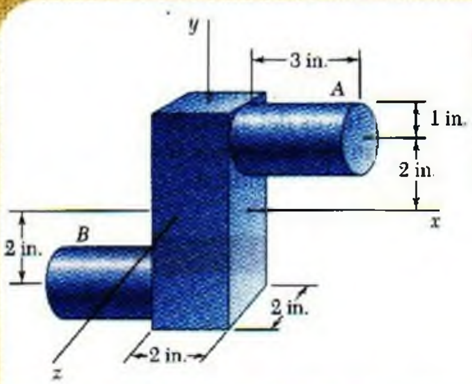
***c*) Momento de inercia $\bar{I}_{y''}$.** Se aplica el teorema de los ejes paralelos y se escribe

$$I_y = \bar{I}_{y''} + m\bar{x}^2$$

Resolviendo para $\bar{I}_{y''}$ y recordando de la figura 5.21 que $\bar{x} = \frac{3}{4}h$, se tiene que

$$\bar{I}_{y''} = I_y - m\bar{x}^2 = \tfrac{3}{5}m(\tfrac{1}{4}a^2 + h^2) - m(\tfrac{3}{4}h)^2$$

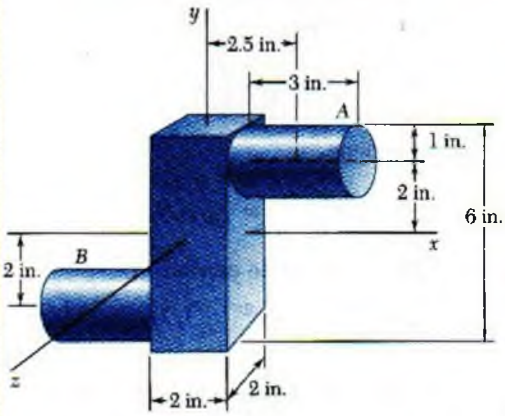
$$\bar{I}_{y''} = \tfrac{3}{20}m(a^2 + \tfrac{1}{4}h^2) \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 9.12

Una pieza de acero consta de un prisma rectangular de $6 \times 2 \times 2$ in. y dos cilindros de 2 in. de diámetro y 3 in. de longitud, como se muestra en la figura. Si se sabe que el peso específico del acero es de 490 lb/ft^3, determine los momentos de inercia de la pieza con respecto a los ejes coordenados.

SOLUCIÓN



Cálculo de las masas

Prisma

$$V = (2 \text{ in.})(2 \text{ in.})(6 \text{ in.}) = 24 \text{ in.}^3$$

$$W = (24 \text{ in.}^3)(490 \text{ lb/ft}^3)\left(\frac{1 \text{ ft}}{12 \text{ in.}}\right)^3 = 6.81 \text{ lb}$$

$$m = \frac{6.81 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} = 0.211 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$$

Cada uno de los cilindros

$$V = \pi(1 \text{ in.})^2(3 \text{ in.}) = 9.42 \text{ in.}^3$$

$$W = (9.42 \text{ in.}^3)(490 \text{ lb/ft}^3)\left(\frac{1 \text{ ft}}{12 \text{ in.}}\right)^3 = 2.67 \text{ lb}$$

$$m = \frac{2.67 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} = 0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$$

Momentos de inercia. A partir de la figura 9.28 se calculan los momentos de inercia de cada una de las partes que constituyen la pieza, utilizando el teorema de los ejes cuando sea necesario. Observe que todas las longitudes deben estar expresadas en pies.

Prisma

$$I_x = I_z = \tfrac{1}{12}(0.211 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})[(\tfrac{6}{12} \text{ ft})^2 + (\tfrac{2}{12} \text{ ft})^2] = 4.88 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$

$$I_y = \tfrac{1}{12}(0.211 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})[(\tfrac{2}{12} \text{ ft})^2 + (\tfrac{2}{12} \text{ ft})^2] = 0.977 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$

Cada uno de los cilindros

$$I_x = \tfrac{1}{2}ma^2 + m\bar{y}^2 = \tfrac{1}{2}(0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})(\tfrac{1}{12} \text{ ft})^2 + (0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})(\tfrac{2}{12} \text{ ft})^2 = 2.59 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$

$$I_y = \tfrac{1}{12}m(3a^2 + L^2) + m\bar{x}^2 = \tfrac{1}{12}(0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})[3(\tfrac{1}{12} \text{ ft})^2 + (\tfrac{3}{12} \text{ ft})^2] + (0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})(\tfrac{2.5}{12} \text{ ft})^2 = 4.17 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$

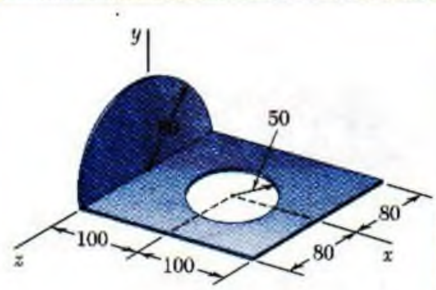
$$I_z = \tfrac{1}{12}m(3a^2 + L^2) + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) = \tfrac{1}{12}(0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})[3(\tfrac{1}{12} \text{ ft})^2 + (\tfrac{3}{12} \text{ ft})^2] + (0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})[(\tfrac{2.5}{12} \text{ ft})^2 + (\tfrac{2}{12} \text{ ft})^2] = 6.48 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$

Pieza completa. Con la suma de los valores obtenidos, se tiene que

$$I_x = 4.88 \times 10^{-3} + 2(2.59 \times 10^{-3}) \qquad I_x = 10.06 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2 \blacktriangleleft$$

$$I_y = 0.977 \times 10^{-3} + 2(4.17 \times 10^{-3}) \qquad I_y = 9.32 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2 \blacktriangleleft$$

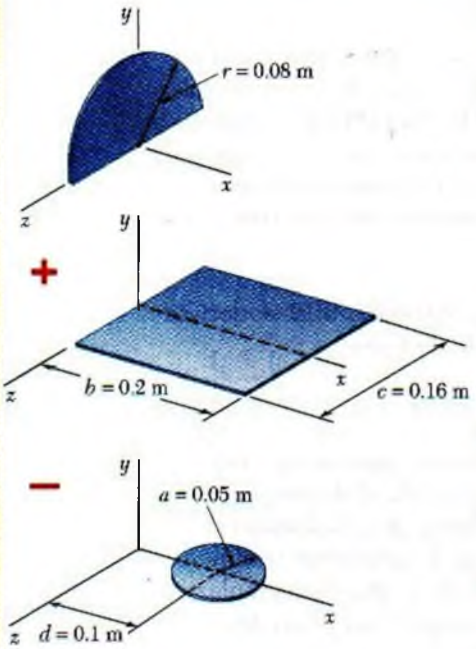
$$I_z = 4.88 \times 10^{-3} + 2(6.48 \times 10^{-3}) \qquad I_z = 17.84 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2 \blacktriangleleft$$



Dimensiones en mm

PROBLEMA RESUELTO 9.13

Una placa delgada de acero de 4 mm de espesor se corta y se dobla para formar la pieza de maquinaria mostrada en la figura. Si se sabe que la densidad del acero es 7 850 kg/m^3, determine los momentos de inercia de la pieza con respecto a los ejes coordenados.



SOLUCIÓN

Se observa que la pieza consta de una placa semicircular y de una placa rectangular a la cual se le ha removido una placa circular.

Cálculo de las masas. ***Placa semicircular***

$$V_1 = \tfrac{1}{2}\pi r^2 t = \tfrac{1}{2}\pi(0.08 \text{ m})^2(0.004 \text{ m}) = 40.21 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$
$$m_1 = \rho V_1 = (7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(40.21 \times 10^{-6} \text{ m}^3) = 0.3156 \text{ kg}$$

Placa rectangular

$$V_2 = (0.200 \text{ m})(0.160 \text{ m})(0.004 \text{ m}) = 128 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$
$$m_2 = \rho V_2 = (7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(128 \times 10^{-6} \text{ m}^3) = 1.005 \text{ kg}$$

Placa circular

$$V_3 = \pi a^2 t = \pi(0.050 \text{ m})^2(0.004 \text{ m}) = 31.42 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$
$$m_3 = \rho V_3 = (7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(31.42 \times 10^{-6} \text{ m}^3) = 0.2466 \text{ kg}$$

Momentos de inercia. Con el uso del método presentado en la sección 9.13 se calculan los momentos de inercia de cada uno de los componentes.

Placa semicircular. A partir de la figura 9.28, se observa que para una placa circular de masa m y radio r, se tiene que

$$I_x = \tfrac{1}{2}mr^2 \qquad I_y = I_z = \tfrac{1}{4}mr^2$$

Debido a la simetría, se observa que para una placa semicircular

$$I_x = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}mr^2) \qquad I_y = I_z = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4}mr^2)$$

Como la masa de la placa semicircular es $m_1 = \tfrac{1}{2}m$, se tiene que

$$I_x = \tfrac{1}{2}m_1 r^2 = \tfrac{1}{2}(0.3156 \text{ kg})(0.08 \text{ m})^2 = 1.010 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$I_y = I_z = \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2}mr^2) = \tfrac{1}{4}m_1 r^2 = \tfrac{1}{4}(0.3156 \text{ kg})(0.08 \text{ m})^2 = 0.505 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Placa rectangular

$$I_x = \tfrac{1}{12}m_2 c^2 = \tfrac{1}{12}(1.005 \text{ kg})(0.16 \text{ m})^2 = 2.144 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$I_z = \tfrac{1}{3}m_2 b^2 = \tfrac{1}{3}(1.005 \text{ kg})(0.2 \text{ m})^2 = 13.400 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$I_y = I_x + I_z = (2.144 + 13.400)(10^{-3}) = 15.544 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Placa circular

$$I_x = \tfrac{1}{4}m_3 a^2 = \tfrac{1}{4}(0.2466 \text{ kg})(0.05 \text{ m})^2 = 0.154 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$I_y = \tfrac{1}{2}m_3 a^2 + m_3 d^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(0.2466 \text{ kg})(0.05 \text{ m})^2 + (0.2466 \text{ kg})(0.1 \text{ m})^2 = 2.774 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$I_z = \tfrac{1}{4}m_3 a^2 + m_3 d^2 = \tfrac{1}{4}(0.2466 \text{ kg})(0.05 \text{ m})^2 + (0.2466 \text{ kg})(0.1 \text{ m})^2$$
$$= 2.620 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Pieza completa

$$I_x = (1.010 + 2.144 - 0.154)(10^{-3}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \qquad I_x = 3.00 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \blacktriangleleft$$
$$I_y = (0.505 + 15.544 - 2.774)(10^{-3}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \qquad I_y = 13.28 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \blacktriangleleft$$
$$I_z = (0.505 + 13.400 - 2.620)(10^{-3}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \qquad I_z = 11.29 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se estudió el *momento de inercia de masa* y el *radio de giro* de un cuerpo tridimensional con respecto a un eje dado [ecuaciones (9.28) y (9.29)]. También se derivó el *teorema de los ejes paralelos* para ser utilizado con momentos de inercia de masa y se expuso el cálculo de los momentos de inercia de masa de placas delgadas y de cuerpos tridimensionales.

1. ***Cálculo de los momentos de inercia de masa.*** Para formas simples, el momento de inercia de masa I de un cuerpo con respecto a un eje dado puede calcularse directamente a partir de la definición dada en la figura 9.28 [problema resuelto 9.9]. Sin embargo, en la mayoría de los casos es necesario dividir el cuerpo en placas delgadas, calcular el momento de inercia de una placa delgada típica con respecto al eje dado —con el teorema de los ejes paralelos si es necesario— e integrar la expresión obtenida.

2. ***Aplicación del teorema de los ejes paralelos.*** En la sección 9.12 se derivó el teorema de los ejes paralelos para momentos de inercia de masa

$$I = \bar{I} + md^2 \qquad (9.33)$$

el cual establece que el momento de inercia I de un cuerpo de masa m con respecto a un eje dado es igual a la suma del momento de inercia $\bar{I}$ de dicho cuerpo con respecto a un *eje centroidal paralelo* y el producto md^2, donde d es la distancia entre los dos ejes. Cuando se calcula el momento de inercia de un cuerpo tridimensional con respecto a cada uno de los ejes coordenados, d^2 se puede reemplazar por la suma de los cuadrados de distancias medidas a lo largo de los otros dos ejes coordenados [ecuaciones (9.32) y (9.32′)].

3. ***Evasión de errores relacionados con las unidades.*** Para evitar errores, es esencial ser consistente en el uso de las unidades. Por tanto, todas las longitudes deben expresarse en metros o pies, según convenga y, para problemas en los que se utiliza el sistema de unidades de uso común en Estados Unidos, las masas deben expresarse en $\text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$. Además, se recomienda en forma enfática que se incluyan las unidades a lo largo de la realización de todos los cálculos [problemas resueltos 9.12 y 9.13].

4. ***Cálculo del momento de inercia de masa de placas delgadas.*** En la sección 9.13 se demostró que el momento de inercia de masa de una placa delgada con respecto a un eje dado puede obtenerse multiplicando el momento de inercia de área correspondiente a la placa por la densidad ρ y el espesor t de la misma [ecuaciones (9.35) a la (9.37)]. Observe que como el eje CC' en la figura 9.24*c* es *perpendicular a la placa*, $I_{CC',\,\text{masa}}$ está asociado con el momento *polar* de inercia $J_{C,\,\text{área}}$.

En lugar de calcular directamente el momento de inercia de una placa delgada con respecto a un eje dado, en algunos casos se encontrará que es conveniente calcular primero su momento de inercia con respecto a un eje que es paralelo al eje especificado y después aplicar el teorema de los ejes paralelos. Además para de-

terminar el momento de inercia de una placa delgada con respecto a un eje perpendicular a la misma, puede ser deseable determinar primero sus momentos de inercia con respecto a dos ejes perpendiculares que están en el plano para después utilizar la ecuación (9.38). Por último, se debe recordar que la masa de una placa de área A, espesor t y densidad ρ es $m = \rho t A$.

5. *Determinación del momento de inercia de un cuerpo por medio de una sola integración directa.* En la sección 9.14 se expuso y en los problemas resueltos 9.10 y 9.11 se ilustró cómo se puede usar una integración para calcular el momento de inercia de un cuerpo que puede ser dividido en diversas placas delgadas paralelas. Para estos casos, es necesario expresar la masa del cuerpo en términos de la densidad y de las dimensiones del mismo. Como en los problemas resueltos, el cuerpo ha sido dividido en placas delgadas perpendiculares al eje x, se tendrán que expresar las dimensiones de cada placa como funciones de la variable x.

a) En el caso especial de un cuerpo de revolución, la placa elemental es un disco delgado y se deben utilizar las ecuaciones proporcionadas en la figura 9.27 para determinar los momentos de inercia del cuerpo [problema resuelto 9.11].

b) En el caso general, cuando el cuerpo no es un cuerpo de revolución, el elemento diferencial no es un disco, es una placa delgada de forma diferente y no se pueden utilizar las ecuaciones de la figura 9.27. Por ejemplo, véase el problema resuelto 9.10 en el que el elemento fue una placa rectangular delgada. Para configuraciones más complejas se pueden usar una o más de las siguientes ecuaciones, las cuales están basadas en las ecuaciones (9.32) y (9.32′) de la sección 9.12.

$$dI_x = dI_{x'} + (\bar{y}_{el}^2 + \bar{z}_{el}^2)\, dm$$
$$dI_y = dI_{y'} + (\bar{z}_{el}^2 + \bar{x}_{el}^2)\, dm$$
$$dI_z = dI_{z'} + (\bar{x}_{el}^2 + \bar{y}_{el}^2)\, dm$$

donde las primas se utilizan para denotar los ejes centroidales de cada placa elemental y donde $\bar{x}_{el}$, $\bar{y}_{el}$ y $\bar{z}_{el}$ representan las coordenadas del centroide de dicha placa elemental. Los momentos centroidales de inercia de la placa se determinan de la forma descrita anteriormente para una placa delgada: haciendo referencia a la figura 9.12 de la página 487, se calculan los momentos de inercia de área correspondientes de la placa y se multiplica el resultado por la densidad ρ y por el espesor t de la placa. Además, si se ha dividido el cuerpo en placas delgadas perpendiculares al eje x, se debe recordar que se puede obtener $dI_{x'}$ sumando $dI_{y'}$ y $dI_{z'}$ en lugar de calcularlo directamente. Por último, al usar la geometría del cuerpo se expresa el resultado obtenido en términos de la variable única x y se integra en x.

6. *Cálculo del momento de inercia de un cuerpo compuesto.* Como se estableció en la sección 9.15, el momento de inercia de un cuerpo compuesto con respecto a un eje dado es igual a la suma de los momentos de inercia de las partes que lo constituyen con respecto a ese mismo eje. Los problemas resueltos 9.12 y 9.13 ilustran el método apropiado de solución. También se debe recordar que el momento de inercia de una parte componente será negativo sólo si dicha parte es *removida* (como en el caso de un agujero).

A pesar de que los problemas propuestos en esta lección sobre cuerpos compuestos son relativamente fáciles, es necesario trabajar con cuidado para evitar errores en los cálculos. Además, si alguno de los momentos de inercia que se necesiten no están proporcionados en la figura 9.28, será necesario derivar las fórmulas requeridas con el uso de las técnicas de esta lección.

Problemas

9.113 En la figura se muestra una placa delgada y semicircular con radio a y masa m. Determine su momento de inercia de masa respecto a *a*) el eje centroidal BB', *b*) el eje centroidal CC' que es perpendicular a la placa.

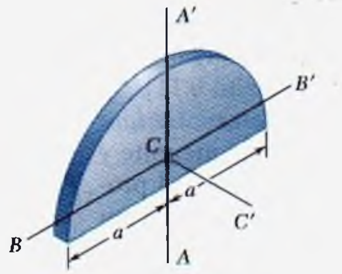


Figura P9.113

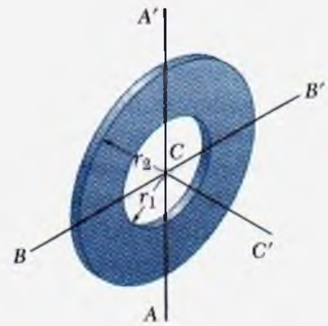


Figura P9.114

9.114 En la figura se muestra un anillo cortado a partir de una placa uniforme delgada. Represente con m la masa del anillo y determine su momento de inercia de masa respecto a *a*) el eje centroidal AA' del anillo, *b*) el eje centroidal CC' perpendicular al plano que contiene al anillo.

9.115 El cuarto de anillo de masa m que se muestra en la figura se cortó a partir de una placa delgada uniforme. Si $r_1 = \frac{1}{2}r_2$ determine el momento de inercia de masa del cuerpo respecto a *a*) el eje AA', *b*) el eje centroidal CC' perpendicular al plano que contiene al cuarto de anillo.

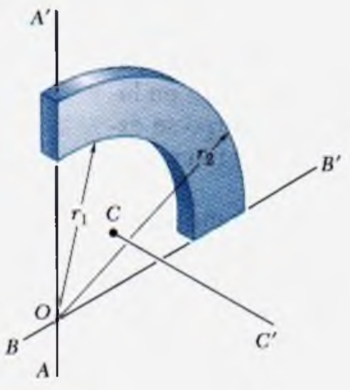


Figura *P9.115*

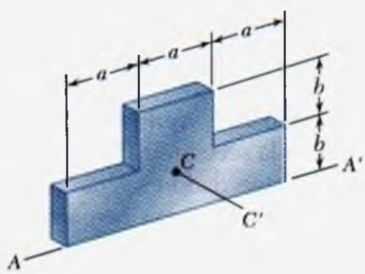


Figura P9.116

9.116 En la figura se muestra un componente de máquina que fue cortado a partir de una placa delgada uniforme. Represente mediante m la masa del componente y determine su momento de inercia de masa respecto a *a*) el eje AA', *b*) el eje centroidal CC' perpendicular al plano que contiene al componente.

9.117 En la figura se muestra un triángulo isósceles de base b y altura h que fue cortado a partir de una placa delgada de masa m. Determine el momento de inercia de masa del triángulo respecto a *a*) los ejes centroidales AA' y BB' localizados en el plano de la placa, *b*) el eje centroidal CC' perpendicular a la placa.

9.118 En la figura se muestra un triángulo isósceles de base b y altura h que fue cortado a partir de una placa delgada de masa m. Determine el momento de inercia de masa del triángulo respecto a los ejes DD' y EE' paralelos a los ejes centroidales AA' y BB', respectivamente, y ubicados a una distancia d del plano de la placa.

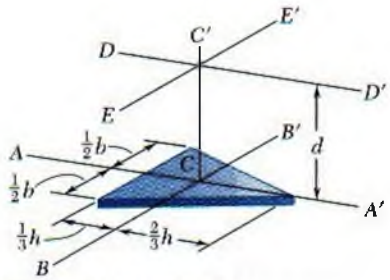


Figura P9.117 y P9.118

9.119 Para la placa delgada de forma trapezoidal y masa m que muestra la figura, determine su momento de inercia de masa respecto a *a*) el eje x, *b*) el eje y.

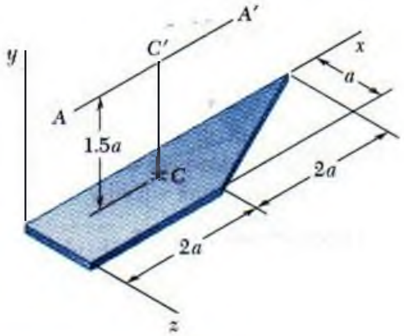


Figura P9.119 y *P9.120*

9.120 Para la placa delgada de forma trapezoidal y masa m que muestra la figura, determine su momento de inercia de masa respecto a *a*) el eje centroidal CC' perpendicular a la placa, *b*) el eje AA' paralelo al eje x y localizado a una distancia de $1.5a$ desde la placa.

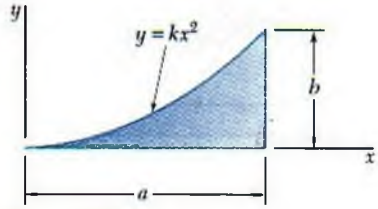


Figura P9.121

9.121 Un sólido homogéneo de revolución y masa m se obtuvo al rotar respecto al eje x la enjuta parabólica que muestra la figura. Use integración directa y exprese en términos de m y b el momento de inercia de masa respecto al eje x del sólido obtenido.

9.122 Respecto al eje z del cono circular derecho truncado que muestra la figura, determine por integración directa el momento de inercia de masa si el radio de la base es $r_1 = 2r_2$ y se supone que el cono tiene densidad uniforme y masa m.

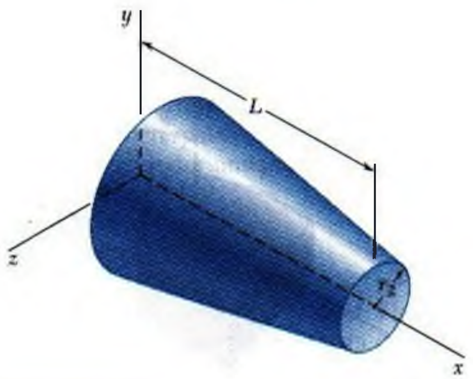


Figura P9.122

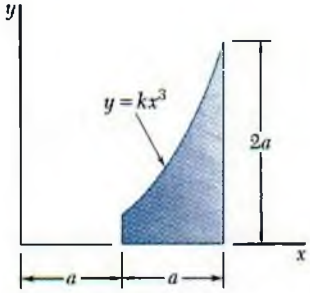


Figura *P9.123*

9.123 El área que muestra la figura se rota respecto al eje x para formar un sólido homogéneo de revolución de masa m. Determine por integración directa el momento de masa de inercia del sólido respecto a *a*) el eje x, *b*) el eje y. Exprese las respuestas en términos de m y a.

9.124 Si la pirámide mostrada en la figura tiene masa m y densidad uniforme, determine por integración directa su momento de inercia de masa respecto al eje x.

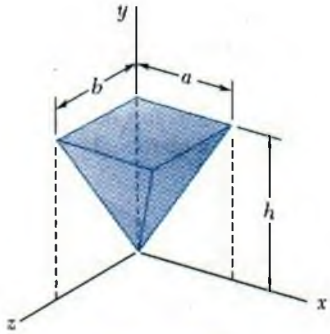


Figura P9.124 y P9.125

9.125 Si la pirámide mostrada en la figura tiene masa m y densidad uniforme, determine por integración directa su momento de inercia de masa respecto al eje y.

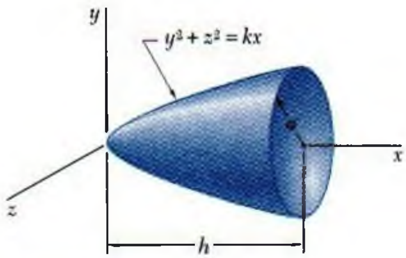


Figura P9.126

9.126 Si el paraboloide de masa m mostrado en la figura tiene densidad uniforme, determine por integración directa su momento de inercia de masa y el radio de giro respecto al eje y.

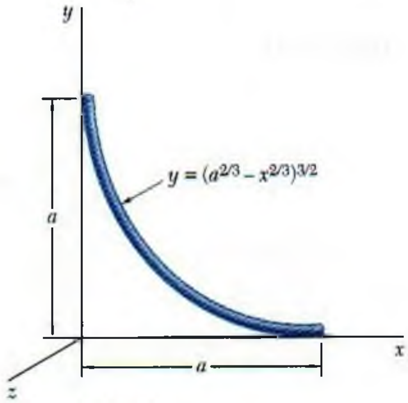


Figura P9.127

***9.127** Un alambre delgado de acero se dobla en la forma indicada por la figura. Representando con m' la masa por unidad de longitud del alambre, determine por integración directa su momento de inercia de masa respecto a cada uno de los ejes coordenados.

9.128 En la figura se muestra una placa triangular delgada de masa m y soldada a un bloque a lo largo de su base AB. Si la placa forma un ángulo θ con el eje y, determine por integración directa el momento de inercia de masa de la placa respecto a *a*) el eje x, *b*) el eje y, *c*) el eje z.

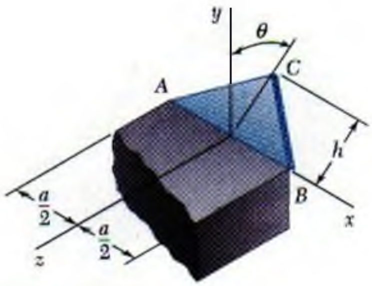


Figura *P9.128*

9.129 En la figura se muestra la sección transversal de la rueda de un eje delantero. Determine su momento de inercia de masa y el radio de giro respecto al eje AA'. (Considere que los pesos específicos del bronce, del acero y del plástico duro son, respectivamente, de 0.310 lb/in.^{3}; de 0.284 lb/in.^{3}, y de 0.043 lb/in.^{3}.)

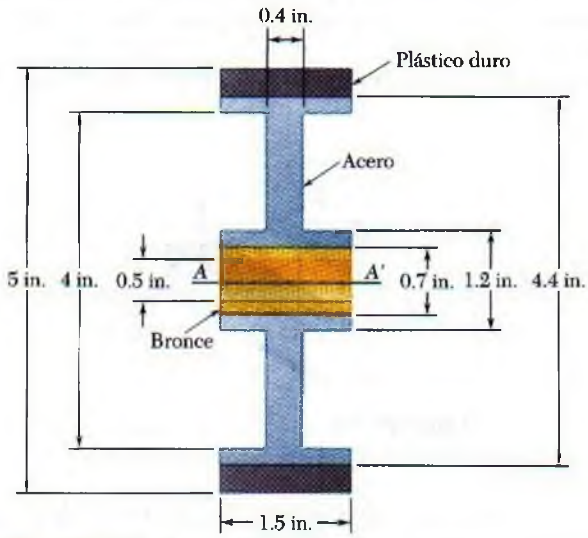


Figura P9.129

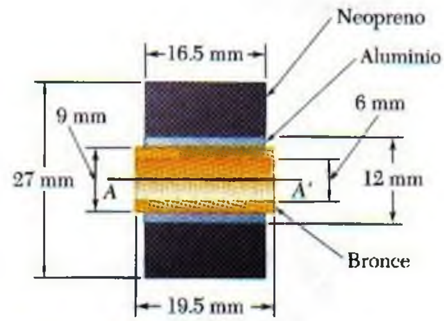


Figura *P9.130*

9.130 Para el rodillo loco de sección transversal como indica la figura, determine el momento de inercia de masa y el radio de giro respecto al eje AA'. (Considere que las densidades del bronce, del aluminio y del neopreno son, respectivamente, de 8 580 kg/m^3, de 2 770 kg/m^3 y de 1 250 kg/m^3.)

9.131 Dados el espesor t y la masa m del cascarón hemisférico delgado que muestra la figura, determine el momento de inercia de masa y el radio de giro respecto al eje x. (*Sugerencia*: Suponga que el cascarón se formó al remover un hemisferio de radio r de un hemisferio de radio $r + t$. En las expresiones resultantes, no tome en cuenta los términos que contengan t^2 y t^3, pero mantenga aquellos términos que contengan t.)

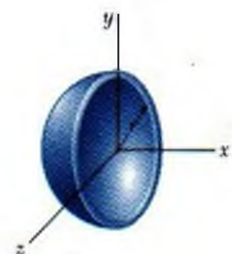


Figura P9.131

9.132 Para el anillo homogéneo de densidad ρ que muestra la figura, determine *a*) el momento de inercia de masa respecto al eje BB', *b*) el valor de a_1 para el cual, dados a_2 y h, $I_{BB'}$ es máximo, *c*) el valor correspondiente de $I_{BB'}$.

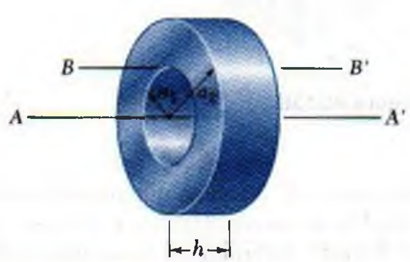


Figura P9.132

9.133 El componente de acero de una máquina mostrado en la figura se forma a partir de la remoción de un hemisferio de la base de un cono truncado. Si la densidad del acero es de 7 850 kg/m^3, determine el momento de inercia de masa del componente respecto al eje y.

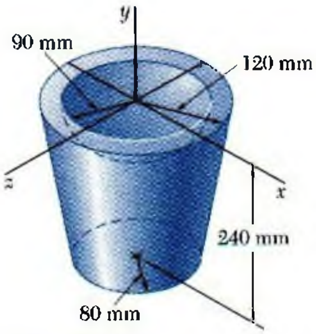


Figura P9.133

9.134 Después de un periodo de uso, una de las hojas de una desfibradora se ha gastado como indica la figura y su peso se ha reducido a 0.4 lb. Si los momentos de inercia de la hoja respecto a los ejes AA' y BB' son, respectivamente, de 0.6×10^{-3} lb · ft · s^2 y 1.26×10^{-3} lb · ft · s^2, determine *a*) la ubicación del eje centroidal GG', *b*) el radio de giro respecto a GG'.

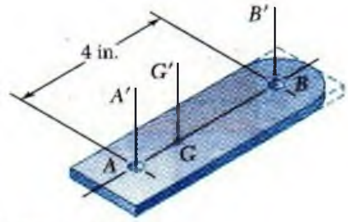


Figura P9.134

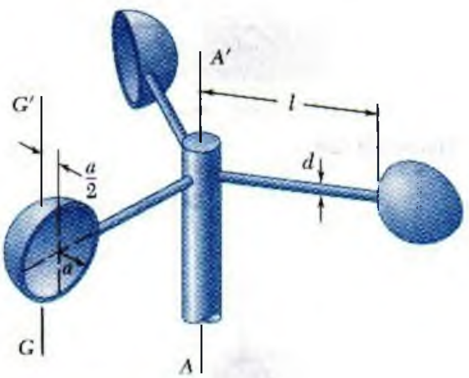


Figura *P9.135*

9.135 En la figura se muestran las tazas y los brazos de un anemómetro fabricados con un material de densidad ρ. Si el momento de inercia de masa de un cascarón semiesférico delgado de masa m y espesor t respecto a su eje centroidal GG' es $5ma^2/12$, determine *a*) el momento de inercia de masa del anemómetro respecto al eje AA', *b*) la relación de a a l para la cual el momento de inercia de masa centroidal de las tazas sea igual al 1 por ciento del momento de inercia de masa de las tazas respecto al eje AA'.

9.136 En la figura se muestra un agujero cuadrangular centrado que se extiende a lo largo del componente de aluminio de una máquina. Determine *a*) el valor de a para que sea máximo el momento de inercia de masa respecto al eje AA', el cual biseca la pared superior del agujero, *b*) los valores correspondientes del momento de inercia de masa y del radio de giro respecto al eje AA'. (La densidad del aluminio es de 2 800 kg/m^3.)

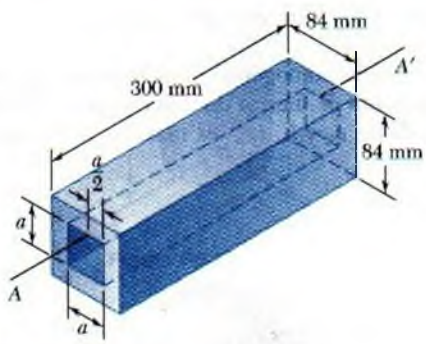


Figura P9.136

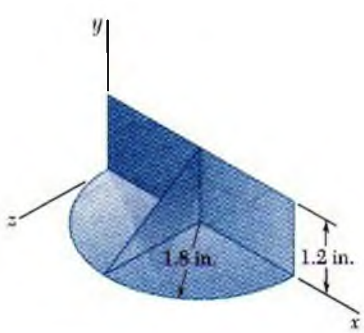


Figura P9.137

9.137 El componente de máquina que muestra la figura está fabricado a partir de una hoja de acero con 0.08 in. de espesor. Si el peso específico del acero es de 490 lb/ft^3, determine el momento de inercia de masa del componente respecto a cada uno de los ejes coordenados.

9.138 Una hoja de acero con 3 mm de espesor se corta y dobla para formar la componente de máquina mostrada en la figura. Si la densidad del acero es de 7 850 kg/m^3, determine el momento de inercia de masa del componente respecto a cada uno de los ejes coordenados.

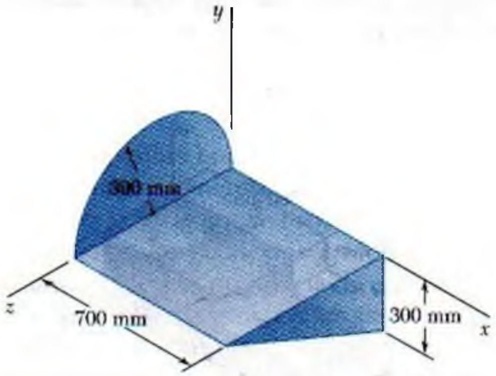


Figura *P9.138*

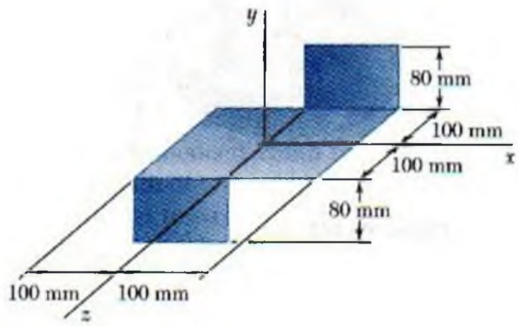


Figura P9.139

9.139 Una hoja de acero con 2 mm de espesor se corta y dobla para formar el componente de máquina mostrado en la figura. Si la densidad del acero es de 7 850 kg/m^3, determine el momento de inercia de masa del componente respecto a cada uno de los ejes coordenados.

9.140 Para el marco de ancla fabricado en acero galvanizado de 2 mm de espesor que muestra la figura, determine el momento de inercia de masa del ancla respecto a cada uno de los ejes coordenados. (La densidad del acero galvanizado es de 7 530 kg/m^3.)

9.141 Una hoja de acero de 0.1 in. de espesor se corta y dobla para formar el componente de máquina mostrado en la figura. Si la densidad del acero es de 490 lb/ft^3, determine el momento de inercia de masa del componente respecto a cada uno de los ejes coordenados.

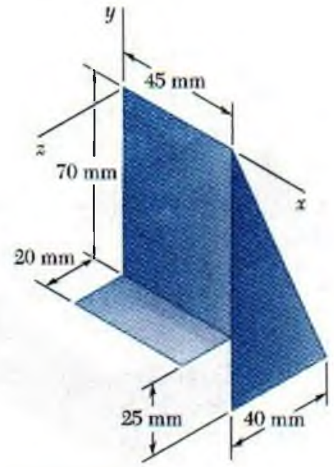


Figura *P9.140*

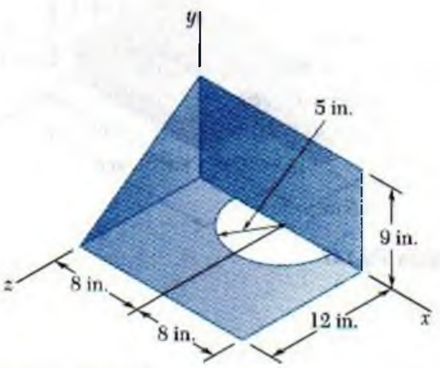


Figura P9.141

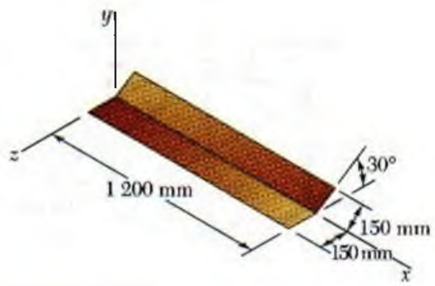


Figura P9.142

***9.142** La pieza para techo que muestra la figura está formada a partir de una hoja de cobre de 0.8 mm de espesor. Si el peso específico del cobre es de 8 940 kg/m^3, determine el momento de inercia de masa de la pieza respecto a cada uno de los ejes coordenados.

9.143 El elemento de máquina que muestra la figura está hecho de acero. Determine el momento de inercia de masa del ensamble respecto a *a*) el eje x, *b*) el eje y, *c*) el eje z. (El peso específico del acero es de 0.284 lb/in.^{3}.)

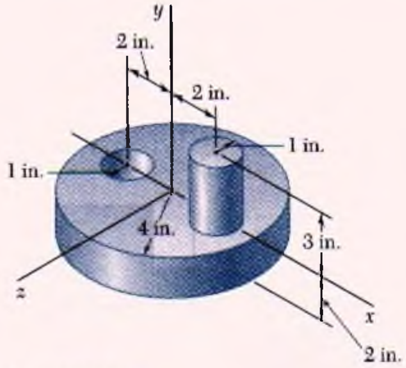


Figura P9.143

9.144 Para el elemento de máquina de acero mostrado en la figura, determine el momento de inercia de masa respecto al eje y. (La densidad del acero es de 7 850 kg/m^3.)

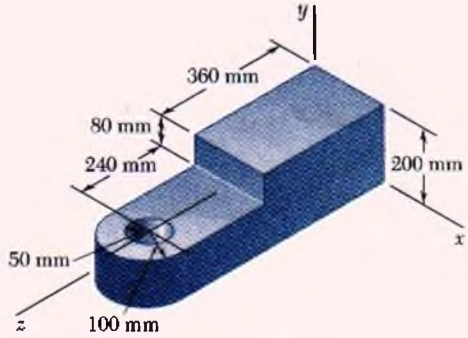


Figura P9.144 y P9.145

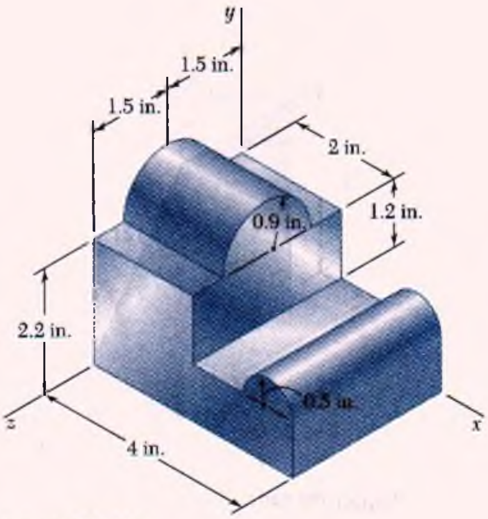


Figura P9.146

9.145 Para el elemento de máquina de acero mostrado en la figura, determine el momento de inercia de masa respecto al eje z. (La densidad del acero es de 7 850 kg/m^3.)

9.146 Para la fundición de aluminio con la forma indicada por la figura, y sabiendo que el peso específico del aluminio es de 0.100 lb/in.^{3}, determine el momento de inercia de masa respecto al eje z.

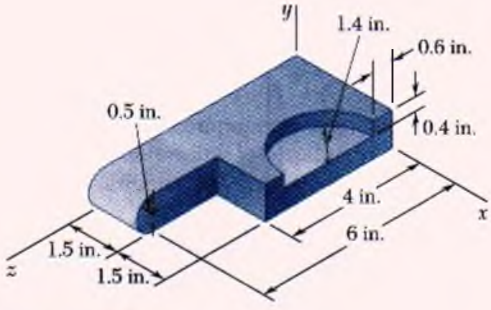


Figura *P9.147*

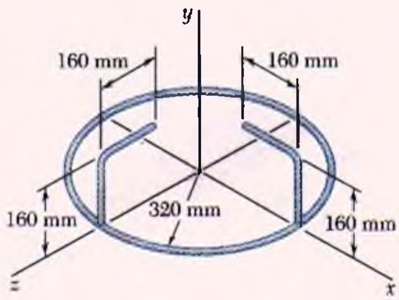


Figura P9.148

9.147 Para el elemento de máquina de acero que muestra la figura, determine el momento de inercia de masa respecto a *a*) el eje x, *b*) el eje y, *c*) el eje z. (El peso específico del acero es de 490 lb/ft^3.)

9.148 Un alambre de aluminio con masa por unidad de longitud de 0.049 kg/m se utiliza para formar un círculo y los elementos rectos mostrados en la figura. Determine el momento de inercia de masa del ensamble respecto a cada uno de los ejes coordenados.

9.149 El arreglo mostrado en la figura se obtuvo a partir de alambre de acero de 3 mm de diámetro. Si la densidad del acero es de 7 850 kg/m^3, determine el momento de inercia de masa del alambre respecto a cada uno de los ejes coordenados.

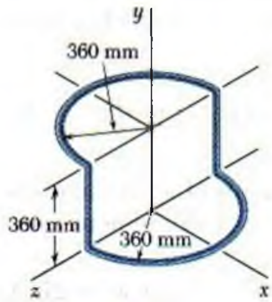


Figura P9.149

9.150 El arreglo mostrado en la figura se obtuvo a partir de alambre homogéneo con peso por unidad de longitud de 0.041 lb/ft. Determine el momento de inercia de masa del alambre respecto a cada uno de los ejes coordenados.

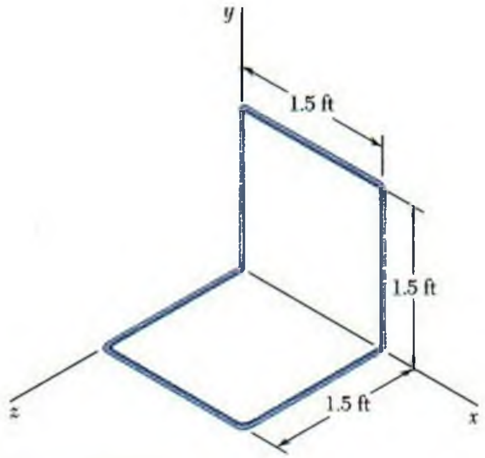


Figura *P9.150*

*9.16. MOMENTO DE INERCIA DE UN CUERPO CON RESPECTO A UN EJE ARBITRARIO QUE PASA POR EL PUNTO *O*. PRODUCTOS DE INERCIA DE MASA

En esta sección se verá cómo puede calcularse el momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje arbitrario OL que pasa por el origen (figura 9.29) si ya se han determinado tanto los momentos de inercia de dicho cuerpo respecto a los tres ejes coordenados como otras cantidades, las cuales se definirán a continuación.

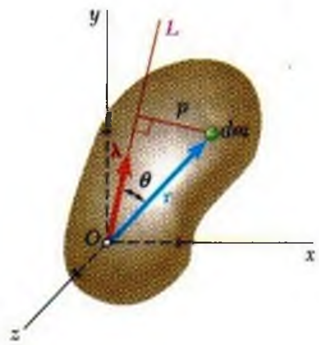


Figura 9.29

El momento de inercia I_{OL} de x, y y z de **r** respecto al eje OL es igual a $\int p^2\,dm$, donde p representa la distancia perpendicular desde el elemento de masa dm hasta el eje OL. Si se representa mediante $\boldsymbol{\lambda}$ al vector unitario localizado a lo largo de OL, y con $\mathbf{r}$ al vector de posición del elemento dm, puede advertirse que la distancia perpendicular p es igual a r sen θ, que es la magnitud del producto vectorial $\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r}$. Por tanto, se escribe

$$I_{OL} = \int p^2\,dm = \int |\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r}|^2\,dm \qquad (9.43)$$

Expresando $|\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r}|^2$ en términos de las componentes rectangulares del producto vectorial, se tiene que

$$I_{OL} = \int [(\lambda_x y - \lambda_y x)^2 + (\lambda_y z - \lambda_z y)^2 + (\lambda_z x - \lambda_x z)^2]\,dm$$

donde las componentes λ_x, λ_y y λ_z del vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ representan los cosenos directores del eje OL, y las componentes x, y y z de $\mathbf{r}$ representan las coordenadas del elemento de masa dm. Al expandir los términos elevados al cuadrado, y reordenando términos, se escribe

$$I_{OL} = \lambda_x^2 \int (y^2 + z^2)\,dm + \lambda_y^2 \int (z^2 + x^2)\,dm + \lambda_z^2 \int (x^2 + y^2)\,dm$$
$$- 2\lambda_x\lambda_y \int xy\,dm - 2\lambda_y\lambda_z \int yz\,dm - 2\lambda_z\lambda_x \int zx\,dm \qquad (9.44)$$

En las ecuaciones (9.30) se observa que las primeras integrales en (9.44) representan, respectivamente, los momentos de inercia I_x, I_y e I_z del cuerpo respecto a los ejes coordenados. Las últimas tres integrales en (9.44) involucran productos de las coordenadas, las cuales reciben el nombre de *productos de inercia* del cuerpo con respecto a los ejes x y y, a los ejes y y z y a los ejes z y x, respectivamente. Así se escribe

$$I_{xy} = \int xy\,dm \qquad I_{yz} = \int yz\,dm \qquad I_{zx} = \int zx\,dm \qquad (9.45)$$

Si se reescribe la ecuación (9.44) en términos de las integrales definidas en las ecuaciones (9.30) y (9.45), se tiene que

$$I_{OL} = I_x\lambda_x^2 + I_y\lambda_y^2 + I_z\lambda_z^2 - 2I_{xy}\lambda_x\lambda_y - 2I_{yz}\lambda_y\lambda_z - 2I_{zx}\lambda_z\lambda_x \qquad (9.46)$$

Es necesario señalar que la definición de los productos de inercia de masa proporcionada en las ecuaciones (9.45) es una extensión de la definición del producto de inercia de un área (sección 9.8). Los productos de inercia de masa se reducen a cero bajo las mismas condiciones de simetría que lo hacen los productos de inercia de áreas, y el teorema de los ejes paralelos para productos de inercia de masa está expresado por relaciones similares a la fórmula derivada para el producto de inercia de un área. Sustituyendo en las ecuaciones (9.45) las expresiones para x, y y z dadas en las ecuaciones (9.45), se encuentra que

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \bar{I}_{x'y'} + m\bar{x}\bar{y} \\ I_{yz} &= \bar{I}_{y'z'} + m\bar{y}\bar{z} \\ I_{zx} &= \bar{I}_{z'x'} + m\bar{z}\bar{x} \end{aligned} \qquad (9.47)$$

donde $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$ son las coordenadas del centro de gravedad G del cuerpo e $\bar{I}_{x'y'}$, $\bar{I}_{y'z'}$ e $\bar{I}_{z'x'}$ representan los productos de inercia del cuerpo con respecto a los ejes centroidales x', y' y z' (figura 9.22).

*9.17. ELIPSOIDE DE INERCIA. EJES PRINCIPALES DE INERCIA

Suponga que se determina el momento de inercia del cuerpo considerado en la sección anterior con respecto a bastantes ejes OL que pasan a través del punto fijo O y que se grafica un punto Q en cada eje OL a una distancia $OQ = 1/\sqrt{I_{OL}}$ desde O. El lugar geométrico de los puntos Q obtenidos de esta manera forman una superficie (figura 9.30). La ecuación de dicha superficie se puede obtener sustituyendo $1/(OQ)^2$ en lugar de I_{OL} en la ecuación (9.46) y después multiplicando ambos lados de la ecuación por $(OQ)^2$. Observando que

$$(OQ)\lambda_x = x \qquad (OQ)\lambda_y = y \qquad (OQ)\lambda_z = z$$

donde x, y y z representan las coordenadas rectangulares de Q, se escribe

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy}xy - 2I_{yz}yz - 2I_{zx}zx = 1 \qquad (9.48)$$

La ecuación obtenida es de una *superficie cuadrática*. Como el momento de inercia I_{LO} es distinto de cero para cada eje OL, ningún punto Q puede estar a una distancia infinita a partir de O. Por tanto, la superficie cuadrática obtenida es un *elipsoide*. Éste define el momento

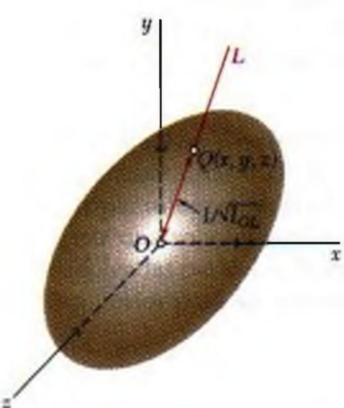


Figura 9.30

de inercia del cuerpo con respecto a cualquier eje que pasa a través de O y se conoce como el *elipsoide de inercia* del cuerpo en O.

Se observa que si se rotan los ejes en la figura 9.30, cambian los coeficientes de la ecuación que define al elipsoide, puesto que dichos coeficientes son iguales a los momentos y productos de inercia del cuerpo con respecto a los ejes coordenados rotados. Sin embargo, el *elipsoide en sí permanece inalterado* puesto que su forma depende sólo de la distribución de la masa en el cuerpo dado. Suponga que se seleccionan como ejes coordenados a los ejes principales x', y' y z' del elipsoide de inercia (figura 9.31). Se sabe que la ecuación del elipsoide con respecto a dichos ejes coordenados tiene la siguiente forma

$$I_{x'}x'^2 + I_{y'}y'^2 + I_{z'}z'^2 = 1 \tag{9.49}$$

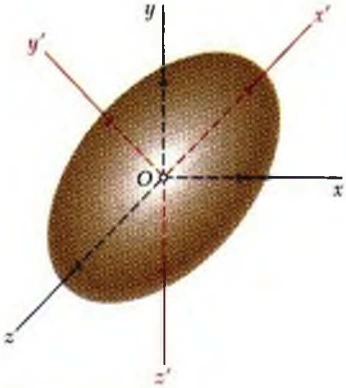


Figura 9.31

la cual no contiene productos de las coordenadas. Comparando las ecuaciones (9.48) y (9.49), se observa que los productos de inercia del cuerpo con respecto a los ejes x', y' y z' deben ser iguales a cero. Los ejes x', y' y z' se conocen como *los ejes principales de inercia* del cuerpo en O. Obsérvese que, dado un cuerpo con forma arbitraria y un punto O, siempre es posible encontrar ejes que sean principales de inercia del cuerpo en O, esto es, ejes con respecto a los cuales los productos de inercia del cuerpo sean iguales a cero. De hecho, sin importar cuál sea la forma del cuerpo, los momentos y productos de inercia del mismo con respecto a los ejes x, y y z que pasan a través de O definirán un elipsoide y dicho elipsoide tendrá ejes principales que, por definición, son los ejes principales de inercia del cuerpo en O.

Si se utilizan los ejes principales de inercia x', y' y z' como ejes coordenados, la expresión obtenida en la ecuación (9.46) para el momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje arbitrario que pasa a través de O se reduce a

$$I_{OL} = I_{x'}\lambda_{x'}^2 + I_{y'}\lambda_{y'}^2 + I_{z'}\lambda_{z'}^2 \tag{9.50}$$

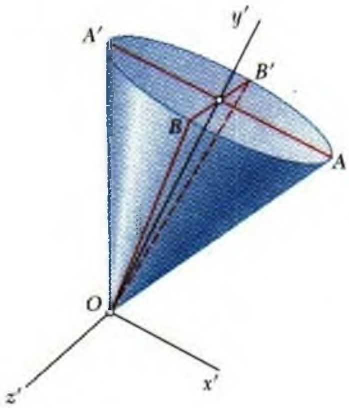


Figura 9.32

La determinación de los ejes principales de inercia de un cuerpo con forma arbitraria es algo complicada y será expuesta en la siguiente sección. Sin embargo, existen muchos casos en los que se pueden identificar dichos ejes de forma inmediata. Por ejemplo, considere el cono homogéneo de base elíptica mostrado en la figura 9.32; dicho cono posee dos planos de simetría mutuamente perpendiculares entre sí OAA' y OBB'. A partir de la definición (9.45), se observa que si se seleccionan los planos $x'y'$ y $y'z'$ de manera que coincidan con los dos planos de simetría, todos los productos de inercia serán iguales a cero. Por tanto, los ejes x', y' y z' seleccionados de esta forma son los ejes principales de inercia del cono O. En el caso del tetraedro regular homogéneo $OABC$ mostrado en la figura 9.33, la línea que une la esquina O con el centro D de la cara opuesta es un eje principal de inercia en O y cualquier línea a través de O que sea perpendicular a OD también es un eje principal de inercia en O. Esta propiedad resulta evidente si se observa que al rotar al tetraedro a través de 120° alrededor de OD permanecen inalteradas su forma y la distribución de su masa. Se concluye que el elipsoide de inercia en O también permanece inalterado bajo dicha rotación. Por tanto, el elipsoide es un cuerpo de revolución cuyo eje de rotación es OD y la línea OD, al igual que cualquier línea perpendicular a ésta que pasa a través de O, debe ser un eje principal del elipsoide.

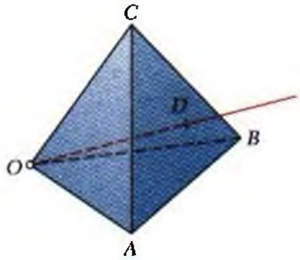


Figura 9.33

*9.18. DETERMINACIÓN DE LOS EJES Y LOS MOMENTOS PRINCIPALES DE INERCIA DE UN CUERPO DE FORMA ARBITRARIA

El método de análisis descrito en esta sección debe utilizarse en casos donde el cuerpo bajo consideración no tenga una propiedad de simetría obvia.

Considere el elipsoide de inercia del cuerpo en un punto dado O (figura 9.34); sea $\mathbf{r}$ el radio vector de un punto P sobre la superficie del elipsoide y sea $\mathbf{n}$ el vector unitario normal a la superficie en P. Se observa que los únicos puntos donde $\mathbf{r}$ y $\mathbf{n}$ son colineales son los puntos P_1, P_2 y P_3, donde los ejes principales intersecan la porción visible de la superficie del elipsoide y los puntos correspondientes que están en el otro lado del elipsoide.

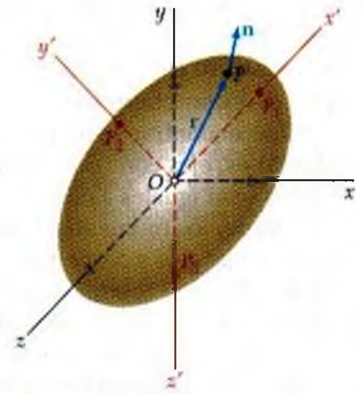


Figura 9.34

Se debe recordar que en el cálculo se establece que la dirección de la normal a la superficie cuya ecuación es $f(x, y, z) = 0$ en un punto $P(x, y, z)$ está definida por el gradiente ∇f de la función f en dicho punto. Por tanto, para obtener los puntos donde los ejes principales intersecan la superficie del elipsoide de inercia, se debe escribir que $\mathbf{r}$ y ∇f son colineales, esto es,

$$\nabla f = (2K)\mathbf{r} \tag{9.51}$$

donde K es una constante, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, y

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{k}$$

Recordando la ecuación (9.48), se observa que la función $f(x, y, z)$ correspondiente al elipsoide de inercia es

$$f(x, y, z) = I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy}xy - 2I_{yz}yz - 2I_{zx}zx - 1$$

Al sustituir a $\mathbf{r}$ y a ∇f en la ecuación (9.51) y también los coeficientes de los vectores unitarios, se escribe

$$\begin{aligned} I_x x - I_{xy}y - I_{zx}z &= Kx \\ -I_{xy}x + I_y y - I_{yz}z &= Ky \\ -I_{zx}x - I_{yz}y + I_z z &= Kz \end{aligned} \tag{9.52}$$

Al dividir cada uno de los términos entre la distancia r desde O hasta P, se obtienen ecuaciones similares que involucran los cosenos directores λ_x, λ_y y λ_z:

$$\begin{aligned} I_x\lambda_x - I_{xy}\lambda_y - I_{zx}\lambda_z &= K\lambda_x \\ -I_{xy}\lambda_x + I_y\lambda_y - I_{yz}\lambda_z &= K\lambda_y \\ -I_{zx}\lambda_x - I_{yz}\lambda_y + I_z\lambda_z &= K\lambda_z \end{aligned} \qquad (9.53)$$

Si se transponen los términos del lado derecho se llega a las siguientes ecuaciones lineales homogéneas:

$$\begin{aligned} (I_x - K)\lambda_x - I_{xy}\lambda_y - I_{zx}\lambda_z &= 0 \\ -I_{xy}\lambda_x + (I_y - K)\lambda_y - I_{yz}\lambda_z &= 0 \\ -I_{zx}\lambda_x - I_{yz}\lambda_y + (I_z - K)\lambda_z &= 0 \end{aligned} \qquad (9.54)$$

Para que este sistema de ecuaciones tenga una solución distinta de $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = 0$, su discriminante debe ser igual a cero:

$$\begin{vmatrix} I_x - K & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_y - K & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_z - K \end{vmatrix} = 0 \qquad (9.55)$$

Al expandir este determinante y cambiar signos, se escribe

$$\begin{aligned} K^3 - (I_x + I_y + I_z)K^2 + (I_xI_y + I_yI_z + I_zI_x - I_{xy}^2 - I_{yz}^2 - I_{zx}^2)K \\ - (I_xI_yI_z - I_xI_{yz}^2 - I_yI_{zx}^2 - I_zI_{xy}^2 - 2I_{xy}I_{yz}I_{zx}) = 0 \end{aligned} \qquad (9.56)$$

Ésta es una ecuación cúbica en K que proporciona tres raíces reales positivas K_1, K_2 y K_3.

Para obtener los cosenos directores del eje principal correspondiente a la raíz K_1, se sustituye K_1 en lugar de K en las ecuaciones (9.54). Puesto que ahora dichas ecuaciones son linealmente dependientes, sólo pueden usarse dos de éstas para determinar a λ_x, λ_y y λ_z. Sin embargo, se puede obtener una ecuación adicional recordando, a partir de la sección 2.12, que los cosenos directores deben satisfacer la relación

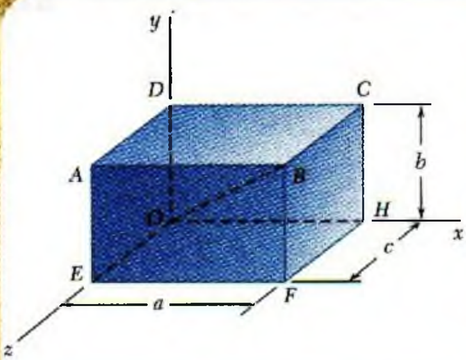
$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1 \qquad (9.57)$$

Si se repite este procedimiento con K_2 y K_3, se obtienen los cosenos directores de los otros dos ejes principales.

Ahora se demostrará que *las raíces K_1, K_2 y K_3 de la ecuación (9.56) son los momentos principales de inercia del cuerpo dado*. Para esto, se sustituye en las ecuaciones (9.53) la raíz K_1 en lugar de K y los valores de los cosenos directores $(\lambda_x)_1$, $(\lambda_y)_1$ y $(\lambda_z)_1$ en lugar de los valores correspondientes de λ_x, λ_y y λ_z; las tres ecuaciones serán satisfechas. Ahora se multiplica cada término en la primera, la segunda y la tercera ecuación por $(\lambda_x)_1$, $(\lambda_y)_1$ y $(\lambda_z)_1$, respectivamente, y se suman las ecuaciones obtenidas así. De esta manera, se escribe

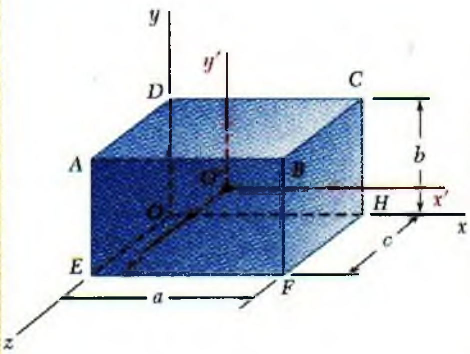
$$\begin{aligned} I_x^2(\lambda_x)_1^2 + I_y^2(\lambda_y)_1^2 + I_z^2(\lambda_z)_1^2 - 2I_{xy}(\lambda_x)_1(\lambda_y)_1 \\ - 2I_{yz}(\lambda_y)_1(\lambda_z)_1 - 2I_{zx}(\lambda_z)_1(\lambda_x)_1 = K_1[(\lambda_x)_1^2 + (\lambda_y)_1^2 + (\lambda_z)_1^2] \end{aligned}$$

Si se recuerda la ecuación (9.46), se observa que el lado izquierdo de esta ecuación representa el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje principal de inercia correspondiente a K_1; por tanto, dicho valor es el momento principal de inercia correspondiente a esa raíz. Por otra parte, recordando la ecuación (9.57), se observa que el lado derecho se reduce a K_1. Por tanto, el propio K_1 es el momento principal de inercia. De la misma forma, se puede demostrar que K_2 y K_3 son los otros dos momentos principales de inercia del cuerpo.



PROBLEMA RESUELTO 9.14

Considere un prisma rectangular de masa m y lados a, b y c. Determine: *a*) los momentos y productos de inercia del prisma con respecto a los ejes coordenados mostrados y *b*) el momento de inercia de dicho cuerpo con respecto a la diagonal OB.



SOLUCIÓN

a*) Momentos y productos de inercia con respecto a los ejes coordenados.** ***Momentos de inercia. Al introducir los ejes centroidales x', y' y z', respecto a los cuales están dados los momentos de inercia en la figura 9.28, se aplica el teorema de los ejes paralelos.

$$I_x = \bar{I}_{x'} + m(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) = \tfrac{1}{12}m(b^2 + c^2) + m(\tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}c^2)$$

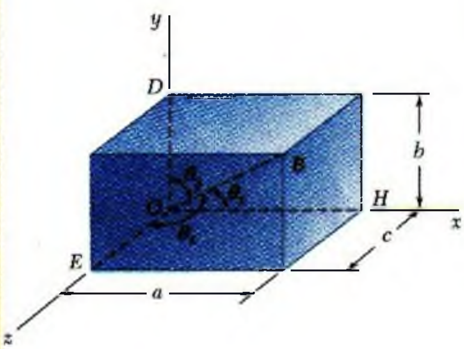
$$I_x = \tfrac{1}{3}m(b^2 + c^2) \quad ◀$$

En forma similar, $I_y = \tfrac{1}{3}m(c^2 + a^2)$ $\qquad$ $I_z = \tfrac{1}{3}m(a^2 + b^2)$ ◀

Productos de inercia. Debido a la simetría, los productos de inercia con respecto a los ejes centroidales x', y' y z' son iguales a cero y dichos ejes son ejes principales de inercia. Utilizando el teorema de los ejes paralelos, se tiene que

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + m\bar{x}\bar{y} = 0 + m(\tfrac{1}{2}a)(\tfrac{1}{2}b) \qquad I_{xy} = \tfrac{1}{4}mab \quad ◀$$

En forma similar, $I_{yz} = \tfrac{1}{4}mbc$ $\qquad$ $I_{zx} = \tfrac{1}{4}mca$ ◀



***b*) Momento de inercia con respecto a *OB*.** Recordando la ecuación (9.46), se tiene que:

$$I_{OB} = I_x\lambda_x^2 + I_y\lambda_y^2 + I_z\lambda_z^2 - 2I_{xy}\lambda_x\lambda_y - 2I_{yz}\lambda_y\lambda_z - 2I_{zx}\lambda_z\lambda_x$$

donde los cosenos directores de OB son

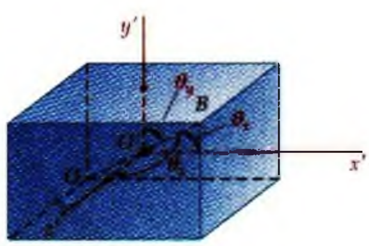
$$\lambda_x = \cos\theta_x = \frac{OH}{OB} = \frac{a}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}}$$

$$\lambda_y = \frac{b}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}} \qquad \lambda_z = \frac{c}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}}$$

Si se sustituyen los valores obtenidos para los momentos y productos de inercia y para los cosenos directores en la ecuación para I_{OB}, se tiene que

$$I_{OB} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}[\tfrac{1}{3}m(b^2 + c^2)a^2 + \tfrac{1}{3}m(c^2 + a^2)b^2 + \tfrac{1}{3}m(a^2 + b^2)c^2 - \tfrac{1}{2}ma^2b^2 - \tfrac{1}{2}mb^2c^2 - \tfrac{1}{2}mc^2a^2]$$

$$I_{OB} = \frac{m}{6}\,\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad ◀$$



Solución alterna. El momento de inercia I_{OB} puede obtenerse directamente a partir de los momentos principales de inercia $\bar{I}_{x'}$, $\bar{I}_{y'}$ e $\bar{I}_{z'}$, puesto que la línea OB pasa a través del centroide O'. Como los ejes x', y' y z' son ejes principales de inercia, se utiliza la ecuación (9.50) y se escribe

$$I_{OB} = \bar{I}_{x'}\lambda_x^2 + \bar{I}_{y'}\lambda_y^2 + \bar{I}_{z'}\lambda_z^2$$

$$= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}\left[\frac{m}{12}(b^2 + c^2)a^2 + \frac{m}{12}(c^2 + a^2)b^2 + \frac{m}{12}(a^2 + b^2)c^2\right]$$

$$I_{OB} = \frac{m}{6}\,\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad ◀$$

PROBLEMA RESUELTO 9.15

Si para el prisma rectangular del problema resuelto 9.14 se tiene que $a = 3c$ y $b = 2c$, determine: *a*) los momentos principales de inercia en el origen O y *b*) los ejes principales de inercia en O.

SOLUCIÓN

***a*) Momentos principales de inercia en el origen *O*.** Si se sustituyen $a = 3c$ y $b = 2c$ en la solución del problema resuelto 9.14, se tiene lo siguiente

$$I_x = \tfrac{5}{3}mc^2 \qquad I_y = \tfrac{10}{3}mc^2 \qquad I_z = \tfrac{13}{3}mc^2$$
$$I_{xy} = \tfrac{3}{2}mc^2 \qquad I_{yz} = \tfrac{1}{2}mc^2 \qquad I_{zx} = \tfrac{3}{4}mc^2$$

Sustituyendo los valores de los momentos y productos de inercia en la ecuación (9.56) y agrupando términos semejantes, se obtiene

$$K^3 - (\tfrac{28}{3}mc^2)K^2 + (\tfrac{3479}{144}m^2c^4)K - \tfrac{589}{54}m^3c^6 = 0$$

Entonces se resuelve para las raíces de esta ecuación; a partir de la exposición de la sección 9.18, se concluye que dichas raíces son los momentos principales de inercia del cuerpo en el origen.

$$K_1 = 0.568867mc^2 \qquad K_2 = 4.20885mc^2 \qquad K_3 = 4.55562mc^2$$
$$K_1 = 0.569mc^2 \qquad K_2 = 4.21mc^2 \qquad K_3 = 4.56mc^2 \quad ◀$$

***b*) Ejes principales de inercia en *O*.** Para determinar la dirección de un eje principal de inercia, primero se sustituye el valor correspondiente de K en dos de las ecuaciones (9.54); las ecuaciones resultantes junto con la ecuación (9.57) forman un sistema de tres ecuaciones a partir del cual se pueden determinar los cosenos directores del eje principal correspondiente. Por tanto, para el primer momento principal de inercia K_1 se tiene lo siguiente:

$$(\tfrac{5}{3} - 0.568867)mc^2(\lambda_x)_1 - \tfrac{3}{2}mc^2(\lambda_y)_1 - \tfrac{3}{4}mc^2(\lambda_z)_1 = 0$$
$$-\tfrac{3}{2}mc^2(\lambda_x)_1 + (\tfrac{10}{3} - 0.568867)mc^2(\lambda_y)_1 - \tfrac{1}{2}mc^2(\lambda_z)_1 = 0$$
$$(\lambda_x)_1^2 + (\lambda_y)_1^2 + (\lambda_z)_1^2 = 1$$

Si se resuelve el sistema de ecuaciones se obtiene

$$(\lambda_x)_1 = 0.836600 \qquad (\lambda_y)_1 = 0.496001 \qquad (\lambda_z)_1 = 0.232557$$

Entonces, los ángulos que forma el primer eje principal de inercia con los ejes coordenados son

$$(\theta_x)_1 = 33.2° \qquad (\theta_y)_1 = 60.3° \qquad (\theta_z)_1 = 76.6° \quad ◀$$

Si se utiliza sucesivamente el mismo conjunto de ecuaciones con K_2 y K_3, se encuentra que los ángulos asociados con el segundo y con el tercer momento principal de inercia en el origen son, respectivamente,

$$(\theta_x)_2 = 57.8° \qquad (\theta_y)_2 = 146.6° \qquad (\theta_z)_2 = 98.0° \quad ◀$$

y

$$(\theta_x)_3 = 82.8° \qquad (\theta_y)_3 = 76.1° \qquad (\theta_z)_3 = 164.3° \quad ◀$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se definieron los *productos inercia de masa de un cuerpo* I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} y se mostró cómo se determinan los momentos de inercia de dicho cuerpo con respecto a un eje arbitrario que pasa a través del origen O. También se aprendió cómo determinar en el origen O los *ejes principales de inercia* de un cuerpo y los correspondientes *momentos principales de inercia*.

1. Determinación de los productos de inercia de masa de un cuerpo compuesto. Los productos de inercia de masa de un cuerpo compuesto con respecto a los ejes coordenados pueden expresarse como la suma de los productos de inercia de las partes que constituyen dicho cuerpo con respecto a esos mismos ejes. Para cada una de las partes que constituyen al cuerpo, se puede utilizar el teorema de los ejes paralelos y escribir las ecuaciones (9.47)

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + m\bar{x}\bar{y} \qquad I_{yz} = \bar{I}_{y'z'} + m\bar{y}\bar{z} \qquad I_{zx} = \bar{I}_{z'x'} + m\bar{z}\bar{x}$$

donde las primas representan los ejes centroidales de cada una de las partes componentes y donde $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$ representan las coordenadas de sus centros de gravedad. Se debe recordar que los productos de inercia de masa pueden ser positivos, negativos o cero. Además, se debe estar seguro de tomar en cuenta los signos de $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$.

a) Con base en las propiedades de simetría de una parte componente, se puede deducir que dos o los tres productos de inercia de masa centroidales de dicha parte son iguales a cero. Por ejemplo, se puede verificar que para una placa delgada paralela al plano xy; para un alambre que se encuentra en un plano paralelo al plano xy; para un cuerpo con un plano de simetría paralelo al plano xy, y para un cuerpo con un eje de simetría paralelo al eje z, los *productos de inercia* $\bar{I}_{y'z'}$ *e* $\bar{I}_{z'x'}$ *son iguales a cero*.

Para placas rectangulares, circulares o semicirculares con ejes de simetría paralelos a los ejes coordenados; para alambres rectos paralelos a un eje coordenado; para alambres circulares y semicirculares con ejes de simetría paralelos a los ejes coordenados, y para prismas rectangulares con ejes de simetría paralelos a los ejes coordenados, *todos los productos de inercia* $\bar{I}_{x'y'}$, $\bar{I}_{y'z'}$ *e* $\bar{I}_{z'x'}$ *son iguales a cero.*

b) Los productos de inercia de masa que son distintos a cero se pueden calcular a partir de las ecuaciones (9.45). Aun cuando, en general, se requiere de triple integración para determinar un producto de inercia de masa, se puede utilizar una sola integración si el cuerpo dado puede dividirse en una serie de placas delgadas paralelas. Entonces, los cálculos son similares a los expuestos en la lección anterior para los momentos de inercia.

2. *Cálculo del momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje arbitrario OL.* En la sección 9.16 se derivó una expresión para el momento de inercia I_{OL}, la cual está dada en la ecuación (9.46). Antes de calcular I_{LO}, primero se deben determinar los momentos y productos de inercia de masa del cuerpo con respecto a los ejes coordenados dados, así como los cosenos directores del vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ a lo largo de OL.

3. *Cálculo de los momentos principales de inercia de un cuerpo y determinación de sus ejes principales de inercia.* En la sección 9.17 se vio que siempre es posible encontrar una orientación de los ejes coordenados para la cual los productos de inercia de masa son iguales a cero. Dichos ejes se conocen como los *ejes principales de inercia* y los momentos de inercia correspondientes se conocen como los *momentos principales de inercia* del cuerpo. En muchos casos, los ejes principales de inercia de un cuerpo pueden determinarse a partir de sus propiedades de simetría. El procedimiento requerido para determinar los momentos principales y los ejes principales de inercia de un cuerpo que no tiene propiedades de simetría obvias, se presentó en la sección 9.18 y se ilustró en el problema resuelto 9.15. Dicho procedimiento consta de los siguientes pasos.

a) Expandir el determinante en la ecuación (9.55) y resolver la ecuación cúbica resultante. La solución puede obtenerse por prueba y error o, de preferencia, con una calculadora científica avanzada o con un programa computacional apropiado para tal fin. Las raíces K_1, K_2 y K_3 de esta ecuación son los momentos principales de inercia del cuerpo.

b) Para determinar la dirección del eje principal correspondiente a K_1, se sustituye ese valor en lugar de K en dos de las ecuaciones (9.54) y se resuelven dichas ecuaciones con la ecuación (9.57) para encontrar los cosenos directores del eje principal correspondiente a K_1.

c) Repetir este procedimiento con K_2 y K_3 para determinar las direcciones de los otros dos ejes principales. Como una comprobación de los cálculos realizados, se puede verificar que el producto escalar de algunos de los dos vectores unitarios que vaya a lo largo de los tres ejes que se obtuvieron sea igual a cero y que, por tanto, dichos ejes sean perpendiculares entre sí.

d) Cuando un momento principal de inercia es aproximadamente igual al momento de inercia con respecto a un eje coordenado, los valores calculados de los cosenos directores correspondientes serán muy sensibles al número de cifras significativas usadas en los cálculos. Por tanto, para estos casos, se sugiere expresar los resultados intermedios en términos de seis o siete cifras significativas para evitar posibles errores.

Problemas

9.151 Para el componente de acero de una máquina mostrado en la figura, determine los productos de inercia de masa I_{xy} I_{yz} e I_{zx}. (El peso específico del acero es de 490 lb/ft^3.)

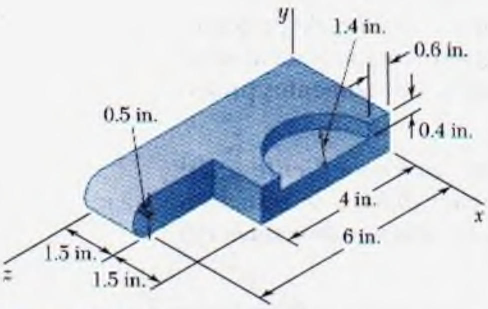


Figura P9.151

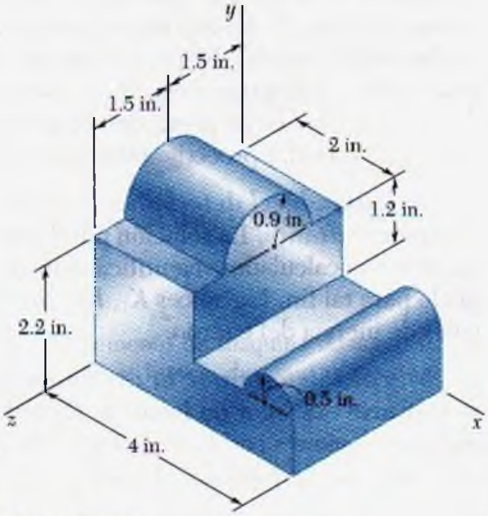


Figura P9.152

9.152 Para la fundición de aluminio que muestra la figura, determine los productos de inercia de masa I_{xy}, I_{yz} e I_{zx}. (El peso específico del aluminio es de 0.100 lb/in.^{3}.)

9.153 **y 9.154** Para el componente de máquina de aluminio colado que muestran las figuras, determine los productos de inercia de masa I_{xy}, I_{yz} e I_{zx}. (La densidad del aluminio es de 2 700 kg/m^3.)

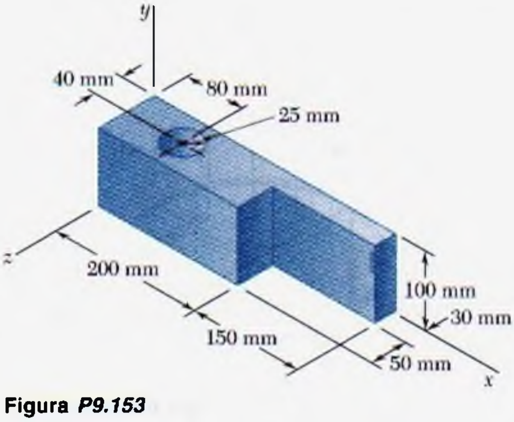


Figura *P9.153*

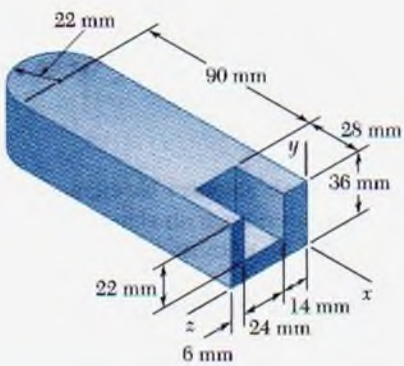


Figura P9.154

9.155 a 9.157 La sección de una hoja de acero con espesor de 3 mm se corta y dobla para formar el componente de máquina que muestran las figuras. Si la densidad del acero es de 7 860 kg/m^3, determine los productos de inercia de masa I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} del componente.

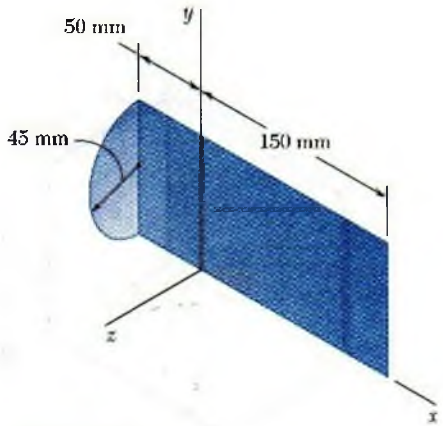


Figura P9.155

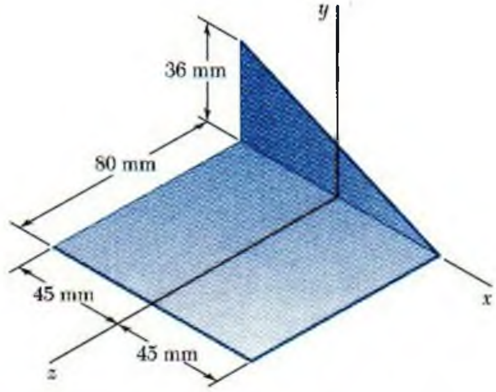


Figura *P9.156*

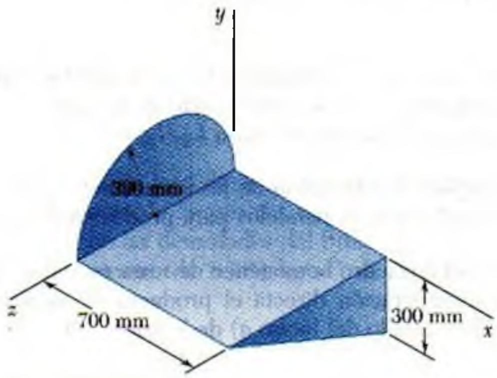


Figura P9.157

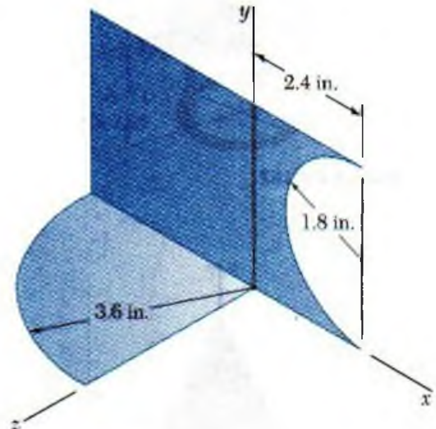


Figura *P9.158*

9.158 La sección de una hoja de acero con espesor de 0.08 in. se corta y dobla para formar el componente de máquina mostrado en la figura. Si el peso específico del acero es de 490 lb/ft^3, determine los productos de inercia de masa I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} del componente.

9.159 y *9.160* Para el arreglo mostrado en cada figura, el cual se obtuvo a partir de alambre de latón con peso por unidad de longitud w, determine los productos de inercia de masa I_{xy}, I_{yz} e I_{zx}.

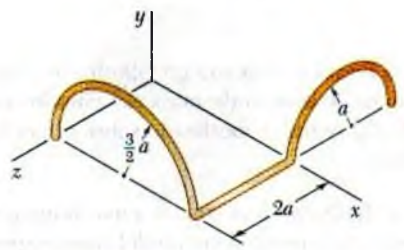


Figura P9.159

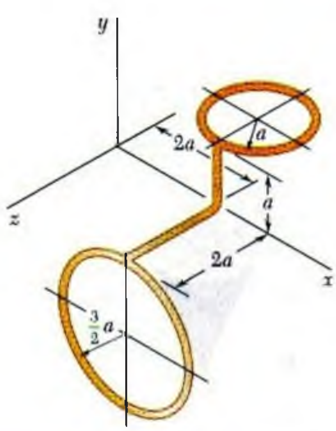


Figura *P9.160*

9.161 Para el arreglo mostrado en la figura, el cual se obtuvo a partir de un alambre de aluminio de 0.075 in. de diámetro, determine los productos de inercia de masa I_{xy}, I_{yz} e I_{zx}. El peso específico del aluminio es de 0.10 lb/in.^{3}.

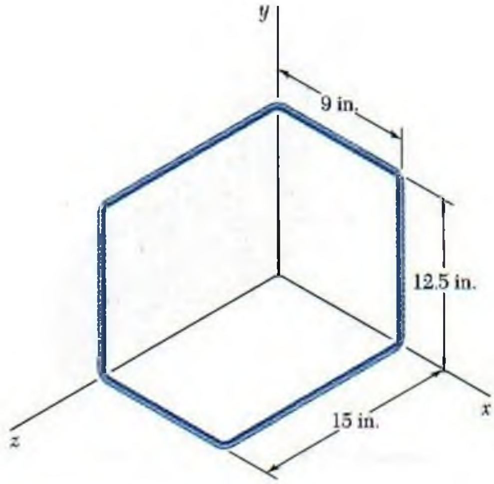


Figura P9.161

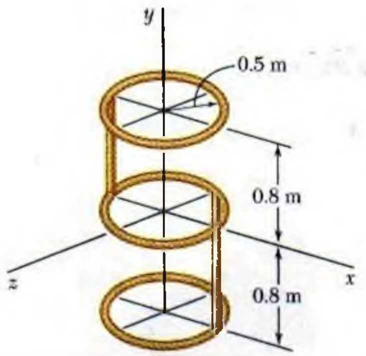


Figura P9.162

9.162 Para el arreglo mostrado en la figura, el cual se obtuvo a partir de alambre homogéneo con masa por unidad de longitud de 1.8 kg/m, determine los productos de inercia de masa I_{xy}, I_{yz} e I_{zx}.

9.163 Complete la obtención de las ecuaciones (9.47), las cuales expresan el teorema de los ejes paralelos para productos de inercia de masa.

9.164 Para el tetraedro homogéneo de masa m que muestra la figura, *a*) determine por integración directa el producto de inercia de masa I_{zx}, *b*) con base en el resultado del inciso *a*) deduzca I_{yz} e I_{xy}.

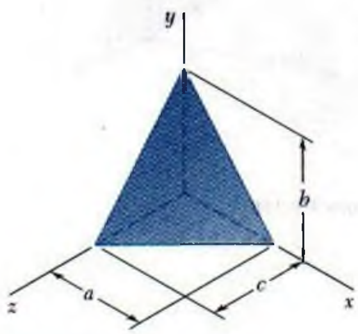


Figura P9.164

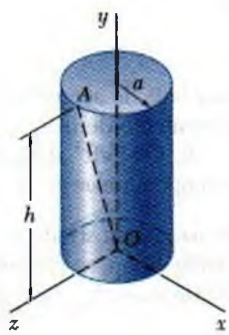


Figura P9.165

9.165 En la figura se muestra un cilindro homogéneo de masa m. Determine el momento de inercia de masa del cilindro respecto a la línea que une al origen, O, y al punto A localizado sobre el perímetro de la superficie superior del cilindro.

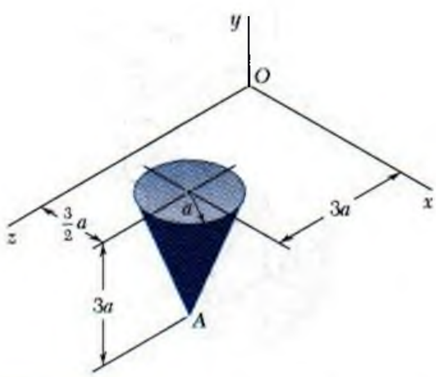


Figura P9.166

9.166 En la figura se muestra un cono homogéneo de masa m. Determine el momento de inercia de masa del cono respecto a la línea que une el origen, O, y el punto A.

9.167 Para el elemento de máquina del problema 9.143, determine su momento de inercia de masa respecto a la línea que une el origen, O, y el punto A.

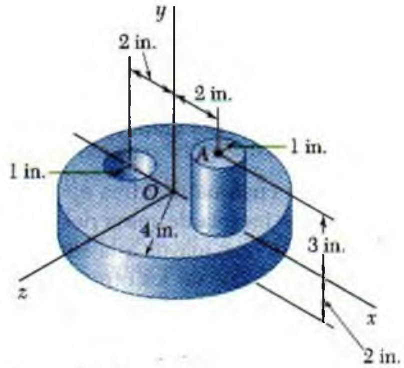


Figura P9.167

9.168 Determine el momento de inercia de masa para el elemento de máquina de acero mostrado en los problemas 9.147 y 9.151 respecto a un eje que pasa por el origen y forma ángulos iguales con los ejes x, y y z.

9.169 La placa delgada y doblada que muestra la figura tiene densidad uniforme y un peso W, determine su momento de inercia de masa respecto a la línea que une el origen, O, y el punto A.

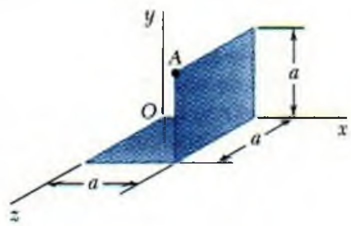


Figura P9.169

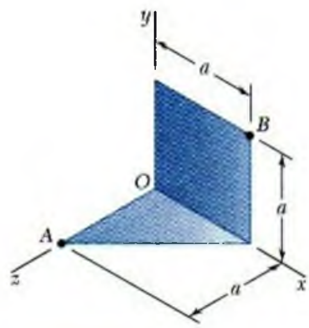


Figura P9.170

9.170 Una hoja de metal con espesor t y densidad ρ se corta y dobla para formar el elemento mostrado en la figura. Determine su momento de inercia de masa respecto a una línea que une los puntos A y B.

9.171 Para los componentes de máquina de los problemas 9.138 y 9.157, determine el momento de inercia de masa respecto a un eje que pasa por el origen y está caracterizado mediante el vector unitario $\boldsymbol{\lambda} = (-4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + \mathbf{k})/9$.

9.172 a 9.174 Para el arreglo del problema indicado, determine su momento de inercia de masa respecto a un eje que pasa por el origen y está caracterizado mediante el vector unitario $\boldsymbol{\lambda} = (-3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k})/7$.

9.172 Problema 9.150
9.173 Problema 9.149
9.174 Problema 9.148

9.175 Para el prisma rectangular que muestra la figura, determine los valores de las relaciones b/a y c/a necesarios para que el elipsoide de inercia del prisma se transforme en una esfera cuando la inercia se calcule en el punto *a*) A, *b*) B.

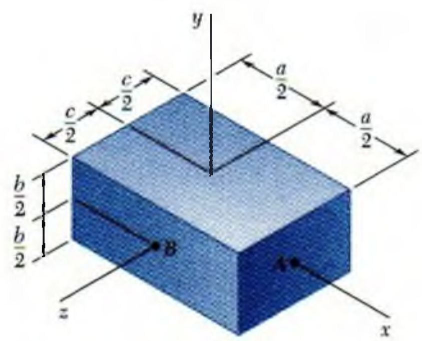


Figura P9.175

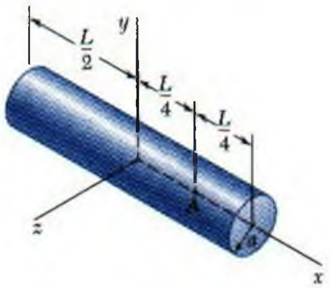


Figura P9.177

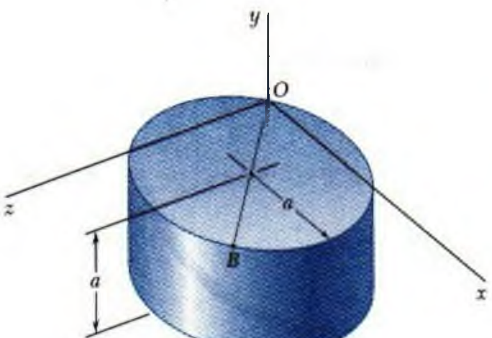


Figura P9.181

9.176 Para el cono recto del problema 9.11, determine el valor de la relación a/h necesario para que el elipsoide de inercia del cono se transforme en una esfera cuando la inercia se calcule en *a*) el ápice del cono, *b*) el centro de la base del cono.

9.177 Para el cilindro circular homogéneo de radio a y longitud L que muestra la figura, determine el valor de la relación a/L necesario para que el elipsoide de inercia del cilindro se transforme en una esfera cuando la inercia se calcule en *a*) el centroide del cilindro, *b*) el punto A.

9.178 Dados un cuerpo cualquiera y tres ejes rectangulares x, y y z, demuestre que el momento de inercia de masa del cuerpo respecto a cualquiera de los tres ejes no puede ser mayor a la suma de los momentos de inercia de masa del cuerpo alrededor de los otros dos ejes. Esto es, pruebe que se cumple la desigualdad $I_x \leq I_y + I_z$ así como las otras desigualdades respectivas. Además, compruebe que si el cuerpo es un sólido homogéneo de revolución entonces $I_y \geq \frac{1}{2}I_x$, donde x es el eje de revolución y y el eje transversal.

9.179 Considere un cubo de masa m y lados de longitud a. *a*) Demuestre que el elipsoide de inercia ubicado en el centro del cubo es una esfera, y utilice esta propiedad para determinar el momento de inercia de masa del cubo respecto a una de sus diagonales. *b*) Pruebe que el elipsoide de inercia ubicado en una de las esquinas del cubo es un elipsoide de revolución, y determine los momentos principales de inercia de masa del cubo en dicho punto.

9.180 Dado un cuerpo homogéneo de masa m y forma arbitraria, así como los tres ejes rectangulares x, y y z con origen en O, demuestre que la suma de los momentos de inercia $I_x + I_y + I_z$ no puede ser menor a la suma de los momentos de inercia de una esfera del mismo material y masa m con centro en O. Además, use el resultado del problema 9.178 para mostrar que si el cuerpo es un sólido de revolución, donde x es el eje de revolución, su momento de inercia de masa I_y alrededor del eje transversal y no puede ser menor a $3ma^2/10$, donde a es el radio de una esfera con igual masa y del mismo material.

***9.181** En la figura se muestra un cilindro circular homogéneo de masa m. El diámetro OB de la cara superior forma un ángulo de 45° con los ejes x y z. *a*) Determine los momentos principales de inercia de masa del cilindro en el origen O. *b*) Encuentre los ángulos que los ejes principales de inercia en O forman con los tres ejes coordenados. *c*) Dibuje el cilindro y muestre la orientación que sus ejes principales de inercia tienen respecto a los ejes x, y y z.

9.182 a 9.186 Para el componente que se describe en el problema indicado, determine *a*) los momentos principales de inercia de masa en el origen, *b*) los ejes principales de inercia en el origen. Trace el cuerpo y muestre la orientación que sus ejes principales de inercia tienen respecto a los ejes x, y y z.

***9.182** Problema 9.167
***9.183** Problemas 9.147 y 9.151
***9.184** Problema 9.169
***9.185** Problema 9.170
***9.186** Problemas 9.150 y 9.172

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 9

En la primera mitad de este capítulo se expuso la determinación de la resultante **R** de las fuerzas $\Delta\mathbf{F}$ distribuidas sobre un área plana A cuando las magnitudes de dichas fuerzas son proporcionales, tanto a las áreas ΔA de los elementos sobre las cuales actúan, como a las distancias y desde dichos elementos hasta un eje dado x; por consiguiente, se tiene $\Delta F = ky\,\Delta A$. Se encontró que la magnitud de la resultante **R** es proporcional al primer momento $Q_x = \int y\,dA$ del área A, mientras que el momento de **R** con respecto al eje x es proporcional al *segundo momento* o *momento de inercia*, $I_x = \int y^2\,dA$ de A con respecto al mismo eje [sección 9.2].

Momentos rectangulares de inercia

Los *momentos rectangulares de inercia I_x e I_y de un área* [sección 9.3] se obtuvieron al evaluar las integrales

$$I_x = \int y^2\,dA \qquad I_y = \int x^2\,dA \tag{9.1}$$

Estos cálculos se pueden reducir a una sola integración seleccionando dA como una tira delgada paralela a uno de los ejes coordenados. También se debe recordar que es posible calcular I_x e I_y a partir de la misma tira elemental (figura 9.35) utilizando la fórmula para el momento de inercia de un área rectangular [problema resuelto 9.3].

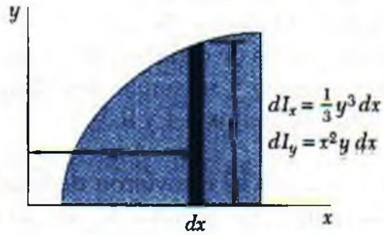


Figura 9.35

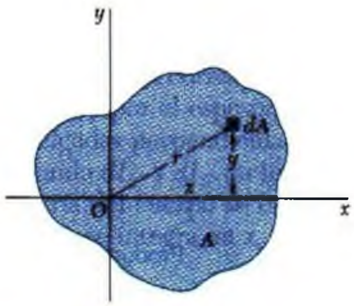


Figura 9.36

Momento polar de inercia

El *momento polar de inercia de un área A* con respecto al polo O [sección 9.4] se definió como

$$J_O = \int r^2\,dA \tag{9.3}$$

donde r es la distancia que hay desde O hasta el elemento de área dA (figura 9.36). Observe que $r^2 = x^2 + y^2$ estableció la relación

$$J_O = I_x + I_y \tag{9.4}$$

Radio de giro

El *radio de giro de un área* A con respecto al eje x [sección 9.5] se definió como la distancia k_x, donde $I_x = k_x^2 A$. Con definiciones similares como los radios de giro de A con respecto al eje y y con respecto a O, se obtuvo

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad k_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}} \qquad (9.5\text{-}9.7)$$

Teorema de los ejes paralelos

En la sección 9.6 se presentó el *teorema de los ejes paralelos*, el cual establece que el momento de inercia I de un área con respecto a un eje dado AA' (figura 9.37) es igual al momento de inercia $\bar{I}$ del área con respecto al eje centroidal BB' que es paralelo AA' *más* el producto del área A y el cuadrado de la distancia d entre los dos ejes:

$$I = \bar{I} + Ad^2 \qquad (9.9)$$

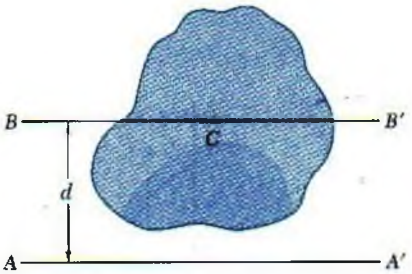


Figura 9.37

La fórmula anterior también puede utilizarse para determinar el momento de inercia $\bar{I}$ de un área con respecto a un eje centroidal BB' cuando se conoce su momento de inercia I con respecto de un eje paralelo AA'. Sin embargo, en este caso se debe *restar* el producto Ad^2 del momento de inercia I conocido.

Una relación similar se cumple entre el momento polar de inercia J_O de un área con respecto a un punto O y el momento polar de inercia J_C de la misma área con respecto a su centroide C. Representando con d la distancia entre O y C, se tiene

$$J_O = \bar{J}_C + Ad^2 \qquad (9.11)$$

Áreas compuestas

El teorema de los ejes paralelos se puede utilizar en forma efectiva para calcular el *momento de inercia de un área compuesta* con respecto a un eje dado [sección 9.7]. Considerando cada área componente por separado, primero se calcula el momento de inercia de cada área con respecto a su eje centroidal, con la información proporcionada en las figuras 9.12 y 9.13 cuando sea posible. Entonces se aplica el teorema de los ejes paralelos para determinar el momento de inercia de cada una de las áreas componentes con respecto al eje deseado y se suman los valores obtenidos de esta forma [problemas resueltos 9.4 y 9.5].

Producto de inercia

Las secciones 9.8 a la 9.10 estuvieron dedicadas a la transformación de los momentos de inercia de un área *mediante una rotación de ejes coordenados*. En primer lugar, se definió el *producto de inercia de un área* A como

$$I_{xy} = \int xy \, dA \qquad (9.12)$$

y se demostró que $I_{xy} = 0$ si el área A es simétrica con respecto a uno de ambos ejes coordenados. También se derivó el *teorema de los ejes paralelos para productos de inercia*. Se obtuvo

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}A \qquad (9.13)$$

donde $\bar{I}_{x'y'}$ es el producto de inercia del área con respecto a los ejes centroidales x' y y' que son paralelos a los ejes x y y, respectivamente, $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son las coordenadas del centroide del área [sección 9.8].

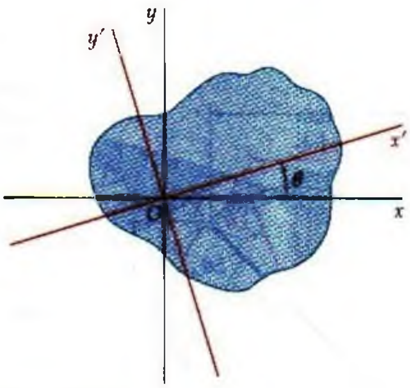


Figura 9.38

Rotación de ejes

En la sección 9.9 se determinaron los momentos y el producto de inercia $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ de un área con respecto a los ejes x' y y' que fueron obtenidos rotando los ejes coordenados x y y originales a través de un ángulo θ en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj (figura 9.38). Se expresó $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ en términos de los momentos y el producto de inercia I_x, I_y e I_{xy} calculados con respecto a los ejes x y y originales. Se obtuvo que

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\,\text{sen}\,2\theta \qquad (9.18)$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\,\text{sen}\,2\theta \qquad (9.19)$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2}\,\text{sen}\,2\theta + I_{xy}\cos 2\theta \qquad (9.20)$$

Ejes principales

Los *ejes principales del área con respecto a O* se definieron como los dos ejes perpendiculares entre sí respecto a los cuales los momentos de inercia de un área son máximo y mínimo. Los valores correspondientes de θ, representados por θ_m, se obtuvieron a partir de la fórmula

$$\tan 2\theta_m = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \qquad (9.25)$$

Momentos principales de inercia

Los valores máximo y mínimo correspondientes de I son llamados los *momentos principales de inercia* del área con respecto a O; se obtuvo

$$I_{\text{máx,mín}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \qquad (9.27)$$

También se señaló que el valor correspondiente del producto de inercia es cero.

Círculo de Mohr

La transformación de los momentos y el producto de inercia del área bajo rotación de ejes puede representarse con gráficas al dibujar el *círculo de Mohr* [sección 9.10]. Dados los momentos y el producto de inercia I_x, I_y e I_{xy} del área con respecto a los ejes

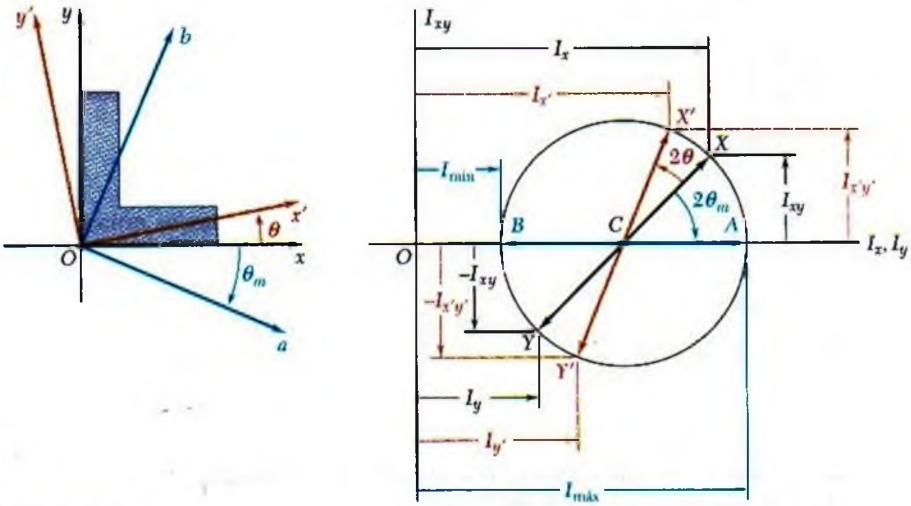


Figura 9.39

coordenados x y y se grafican los puntos X (I_x, I_{xy}) y Y $(I_y, -I_{xy})$ y se dibuja la línea que une estos dos puntos (figura 9.39). Esta línea es un diámetro del círculo de Mohr y, por tanto, define dicho círculo. Conforme se rotan los ejes coordenados a través de un ángulo θ, el diámetro rota a través del *doble de dicho ángulo* y las coordenadas de X' y Y' proporcionan los nuevos valores $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ de los momentos y el producto de inercia del área. Además, el ángulo θ_m y las coordenadas de los puntos A y B definen los ejes principales a y b y los momentos principales de inercia del área [problema resuelto 9.8].

Momentos de inercia de masas

La segunda parte del capítulo estuvo dedicada a calcular los *momentos de inercia de masas*, los cuales aparecen en dinámica en problemas que involucran la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje. El momento de inercia de masa de un cuerpo con respecto a un eje AA' (figura 9.40) se definió como

$$I = \int r^2\, dm \qquad (9.28)$$

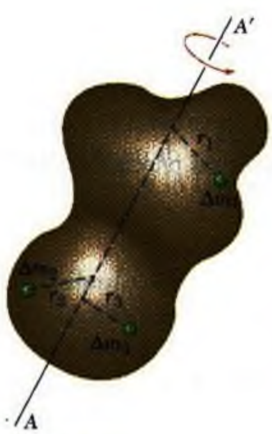


Figura 9.40

donde r es la distancia desde AA' hasta el elemento de masa [sección 9.11]. El *radio de giro* del cuerpo de definió como

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}} \qquad (9.29)$$

Los momentos de inercia de un cuerpo con respecto a los ejes coordenados se expresaron de la siguiente manera

$$I_x = \int (y^2 + z^2)\, dm$$

$$I_y = \int (z^2 + x^2)\, dm \qquad (9.30)$$

$$I_z = \int (x^2 + y^2)\, dm$$

Teorema de los ejes paralelos

Se vio que el *teorema de los ejes paralelos* también se aplica a los momentos de inercia de masa [sección 9.12]. Por tanto, el momento de inercia I de un cuerpo con respecto a un eje arbitrario AA' (figura 9.41) puede expresarse como

$$I = \bar{I} + md^2 \qquad (9.33)$$

donde $\bar{I}$ es el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje centroidal BB' que es paralelo al eje AA', m es la masa del cuerpo y d es la distancia entre los dos ejes.

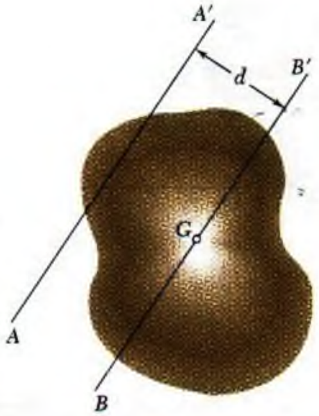


Figura 9.41

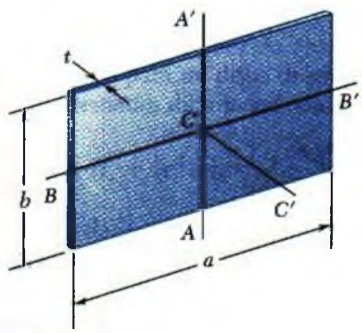


Figura 9.42

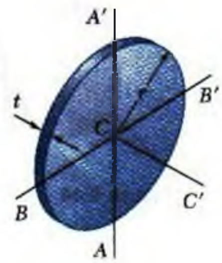


Figura 9.43

Momentos de inercia de placas delgadas

Los momentos de inercia de *placas delgadas* se pueden obtener a partir de los momentos de inercia de sus áreas [sección 9.13]. Se encontró que para una *placa rectangular* los momentos de inercia con respecto a los ejes mostrados (figura 9.42) son

$$I_{AA'} = \tfrac{1}{12}ma^2 \qquad I_{BB'} = \tfrac{1}{12}mb^2 \qquad (9.39)$$

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \tfrac{1}{12}m(a^2 + b^2) \qquad (9.40)$$

mientras que para una *placa circular* (figura 9.43) están dados por

$$I_{AA'} = I_{BB'} = \tfrac{1}{4}mr^2 \qquad (9.41)$$

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \tfrac{1}{2}mr^2 \qquad (9.42)$$

Cuerpos compuestos

Cuando un cuerpo posee *dos planos de simetría*, es posible utilizar una sola integración para determinar su momento de inercia con respecto a un eje dado si se selecciona el elemento de masa dm como una placa delgada [problemas resueltos 9.10 y 9.11]. Por otra parte, cuando un cuerpo consta de *varias formas geométricas comunes*, su momento de inercia con respecto a un eje dado puede obtenerse con las fórmulas proporcionadas en la figura 9.28 con el teorema de los ejes paralelos [problemas resueltos 9.12 y 9.13].

Momento de inercia con respecto a un eje arbitrario

En la última parte del capítulo se aprendió a determinar el momento de inercia de un cuerpo *con respecto a un eje arbitrario* OL que se dibuja a través del origen O [sección 9.16]. Si se pre-

sentan con λ_x, λ_y y λ_z las componentes del vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ a lo largo de OL (figura 9.44) y se introducen los *productos de inercia*

$$I_{xy} = \int xy\,dm \qquad I_{yz} = \int yz\,dm \qquad I_{zx} = \int zx\,dm \quad (9.45)$$

se encontró que el momento de inercia del cuerpo con respecto a OL se pueden expresar como

$$I_{OL} = I_x\lambda_x^2 + I_y\lambda_y^2 + I_z\lambda_z^2 - 2I_{xy}\lambda_x\lambda_y - 2I_{yz}\lambda_y\lambda_z - 2I_{zx}\lambda_z\lambda_x \quad (9.46)$$

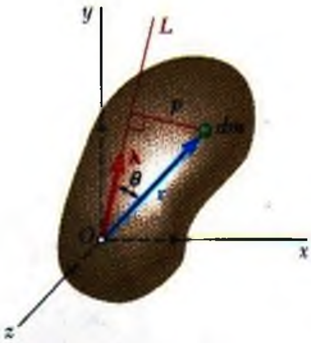


Figura 9.44

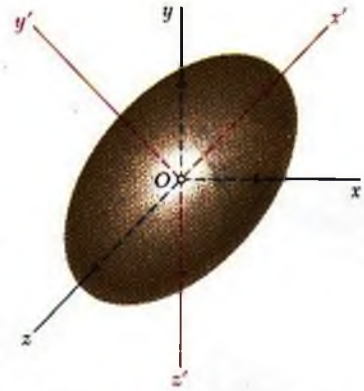


Figura 9.45

Elipsoide de inercia

Graficando un punto Q a lo largo de cada eje OL a una distancia $OQ = 1/\sqrt{I_{OL}}$ desde O [sección 9.17], se obtuvo la superficie de un elipsoide, conocido como el *elipsoide de inercia* del cuerpo en el punto O. Los ejes principales x', y' y z' de este elipsoide (figura 9.45) son los *ejes principales de inercia* del cuerpo; esto es, los productos de inercia $I_{x'y'}$, $I_{y'z'}$ e $I_{z'x'}$ del cuerpo con respecto a dichos ejes son iguales a cero. Existen muchas situaciones en las cuales se pueden deducir los ejes principales de inercia de un cuerpo a partir de las propiedades de simetría de este último. Entonces, si se seleccionan los ejes principales como los ejes coordenados, se puede expresar a I_{OL} como

Ejes principales de inercia

Momenos principales de inercia

$$I_{OL} = I_{x'}\lambda_{x'}^2 + I_{y'}\lambda_{y'}^2 + I_{z'}\lambda_{z'}^2 \quad (9.50)$$

donde $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{z'}$ son los *momentos principales de inercia* del cuerpo en O.

Cuando no se pueden obtener los ejes principales de inercia por inspección [sección 9.17], es necesario resolver la ecuación cúbica

$$K^3 - (I_x + I_y + I_z)K^2 + (I_xI_y + I_yI_z + I_zI_x - I_{xy}^2 - I_{yz}^2 - I_{zx}^2)K$$
$$- (I_xI_yI_z - I_xI_{yz}^2 - I_yI_{zx}^2 - I_zI_{xy}^2 - 2I_{xy}I_{yz}I_{zx}) = 0 \quad (9.56)$$

Se encontró [sección 9.18] que las raíces K_1, K_2 y K_3 de esta ecuación son los momentos principales de inercia del cuerpo dado. Entonces, se determinan los cosenos directores $(\lambda_x)_1$, $(\lambda_y)_1$ y $(\lambda_z)_1$ del eje principal correspondiente al momento principal de inercia K_1 sustituyendo K_1 en las ecuaciones (9.54) y resolviendo simultáneamente dos de esas ecuaciones y la ecuación (9.57). Después se repite el mismo procedimiento con K_2 y K_3 para determinar los cosenos directores de los otros dos ejes principales [problema resuelto 9.15].

Problemas de repaso

9.187 Para el área sombreada que muestra la figura, determine por integración directa los momentos de inercia respecto al eje y.

9.188 Para el área sombreada que muestra la figura, determine por integración directa los momentos de inercia respecto al eje x.

9.189 Para el área sombreada que muestra la figura, determine el momento de inercia y el radio de giro respecto al eje x.

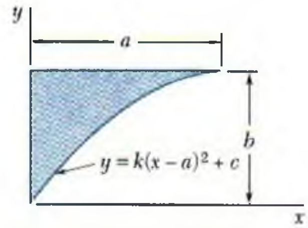


Figura P9.187 y *P9.188*

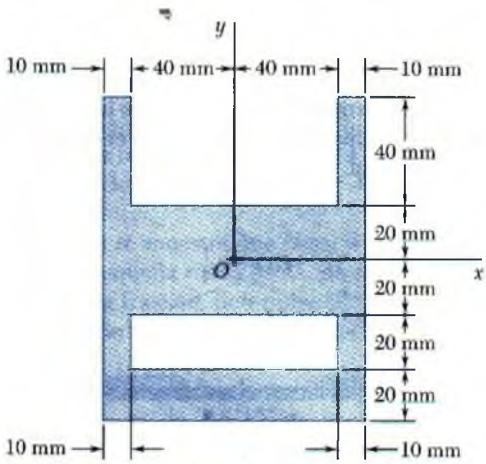


Figura P9.189 y *P9.190*

9.190 Para el área sombreada que muestra la figura, determine el momento de inercia y el radio de giro respecto al eje y.

9.191 Para el área que muestra la figura, determine el momento polar de inercia respecto a *a*) el punto O, *b*) el centroide del área.

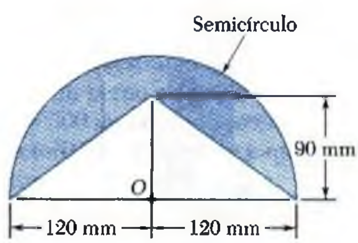


Figura P9.191

9.192 Con el propósito de construir una caja reforzada, se sueldan entre sí dos secciones W laminadas y dos placas, como indica la figura. Determine los momentos de inercia y los radios de giro de la sección combinada respecto a los ejes centroidales que se muestran.

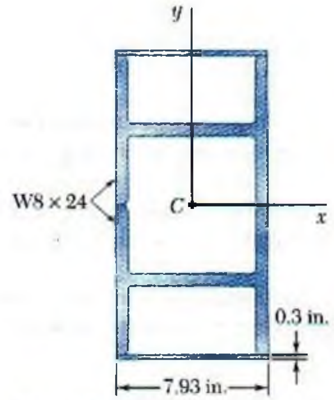


Figura P9.192

9.193 Tal como indica la figura, dos ángulos L3 × 3 × $\frac{1}{4}$ in. se sueldan a un canal C10 × 20. Determine los momentos de inercia de la sección combinada relacionados con, respectivamente, los ejes centroidales paralelo y perpendicular al alma del canal.

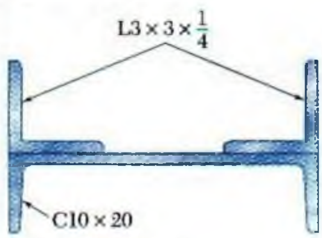


Figura P9.193

9.194 Para la biela de 2 kg mostrada en la figura, experimentalmente se ha probado que sus momentos de inercia respecto a los ejes de las líneas centrales de los cojinetes AA' y BB' son, respectivamente, $I_{AA'} = 78 \text{ g} \cdot \text{m}^2$ e $I_{BB'} = 41 \text{ g} \cdot \text{m}^2$. Si $r_a + r_b = 290$ mm, determine *a*) la localización del eje centroidal GG', *b*) el radio de giro respecto a GG'.

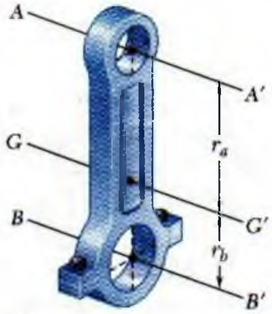


Figura *P9.194*

9.195 Utilice el teorema de los ejes paralelos para determinar, respecto a los ejes centroidales x y y, el producto de inercia del área que muestra la figura.

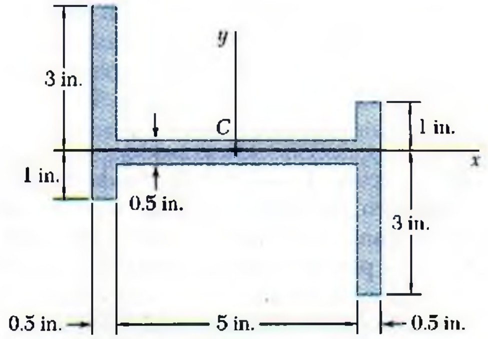


Figura P9.195 y P9.196

9.196 Utilice el círculo de Mohr para determinar la orientación de los ejes centroidales principales y los valores correspondientes a los momentos de inercia.

9.197 Si el cilindro circular recto mostrado en la figura tiene densidad uniforme y masa m, determine por integración directa su momento de inercia de masa respecto al eje z.

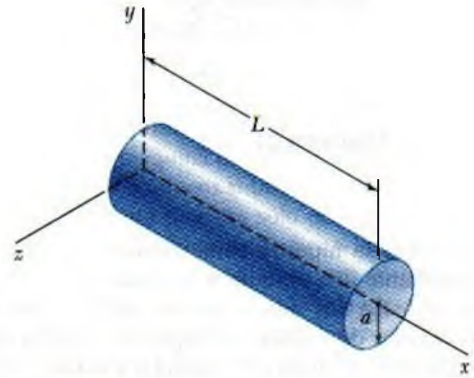


Figura P9.197

9.198 Para el componente de máquina de acero que muestra la figura, determine los productos de inercia de masa I_{xy}, I_{yz} e I_{zx}. (El peso específico del acero es de 0.284 lb/in.^{3}.)

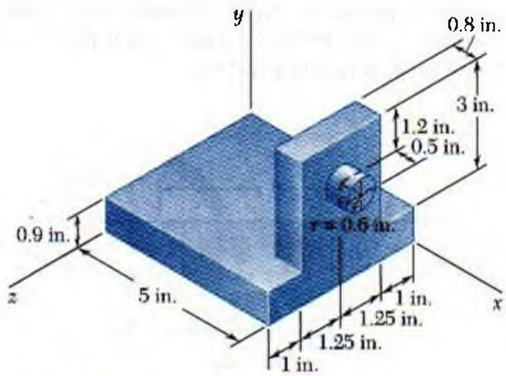


Figura *P9.198*

Problemas de computadora

9.C1 Una placa circular de acero es perforada con un patrón de agujeros de 6 mm de diámetro para formar la coladera de drenaje que se muestra en la figura. Si la distancia de centro a centro entre agujeros adyacentes es de 14 mm, y todas las perforaciones se encuentran dentro de un círculo con diámetro $(d - 30)$ mm, determine el momento de inercia de la coladera respecto al eje x cuando *a*) $d = 200$ mm, *b*) $d = 450$ mm, *c*) $d = 720$ mm.

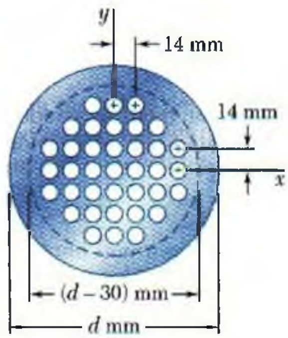


Figura P9.C1

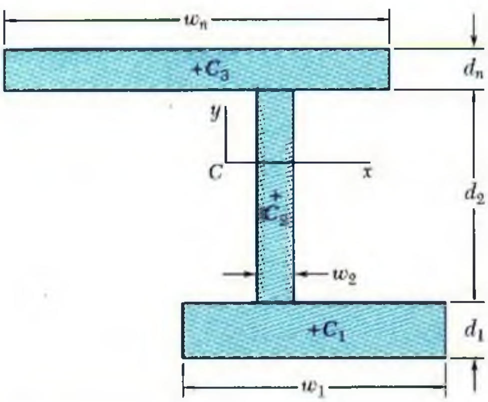


Figura P9.C2

9.C2 En la figura se muestra cómo pueden aproximarse las secciones transversales mediante una serie de rectángulos. Utilice un programa de computadora para calcular los momentos de inercia y los radios de giro de secciones transversales de esta forma respecto a sus ejes centroidales horizontal y vertical. Aplique dicho programa en las secciones transversales que muestran las figuras *a*) P9.31 y P9.33, *b*) P9.32 y P9.34, *c*) P9.41, *d*) P9.43.

9.C3 La figura muestra un panel que conforma uno de los extremos de una pila, la cual se llena con agua hasta la línea AA'. Determine la profundidad d del punto de aplicación de la resultante (centro de presión) de las fuerzas hidrostáticas que actúan sobre el panel. Si $h = 400$ mm, $b = 200$ mm y $a = nb$, donde n varía desde 1 hasta 8, grafique la profundidad del centro de presión d como una función de n.

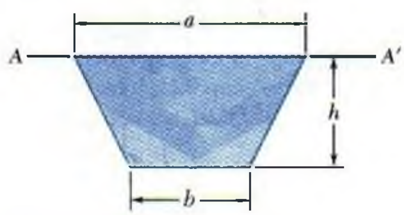


Figura P9.C3

9.C4 Para el área que muestra la figura, grafique I_{xy} como una función de n para valores de n desde 1 hasta 10 si $a = 80$ mm y $b = 60$ mm.

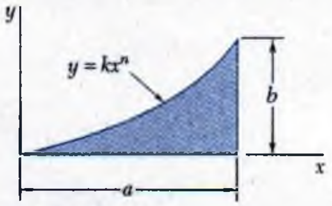


Figura P9.C4

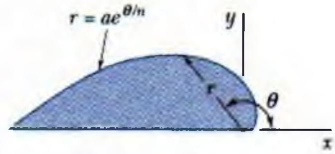


Figura P9.C5

***9.C5** El área que muestra la figura está definida por la espiral logarítmica $r = ae^{\theta/n}$ con $0 \leq \theta \leq \pi$. Use un programa computacional para determinar el producto de inercia del área respecto a los ejes x y y cuando $a = 3$ in. y *a*) $n = 2$, *b*) $n = 2.5$, *c*) $n = 4$.

9.C6 Un área con momentos y productos de inercia conocidos I_x, I_y e I_{xy} se puede usar para calcular sus momentos y productos de inercia respecto a los ejes x' y y' obtenidos al rotar los ejes originales en sentido contrario al de las manecillas del reloj por un ángulo θ. Para el área del problema 9.74, utilice un programa computacional y calcule y grafique $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$, como funciones de θ para $0 \leq \theta \leq 90°$.

9.C7 Un alambre homogéneo con masa por unidad de longitud de 0.08 kg/m se usa para formar la figura que se muestra. Aproxime esta figura usando 10 segmentos de recta y utilice un programa computacional para determinar el momento de inercia de masa I_x del alambre respecto al eje x. Utilice dicho programa para determinar I_x cuando *a*) $a = 20$ mm, $L = 220$ mm, $h = 80$ mm, *b*) $a = 40$ mm, $L = 340$ mm, $h = 200$ mm, *c*) $a = 100$ mm, $L = 500$ mm, $h = 120$ mm.

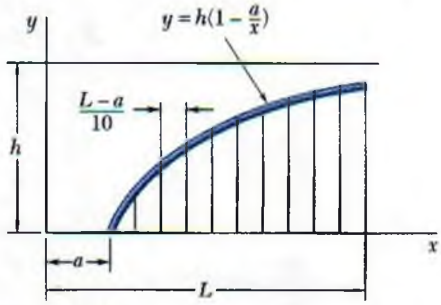


Figura P9.C7

9.C8 El área que muestra la figura se rota alrededor del eje x para formar un sólido homogéneo de peso W. Aproxime esta área usando una serie de 400 rectángulos de la forma $bcc'b'$, cada uno con ancho Δl, y utilice un programa computacional para determinar el momento de inercia de masa del sólido de revolución respecto al eje x. Use dicho programa para resolver *a*) el problema 9.121, *b*) el problema 9.123. Suponga que en estos problemas $W = 4$ lb, $a = 5$ in. y $b = 20$ in.

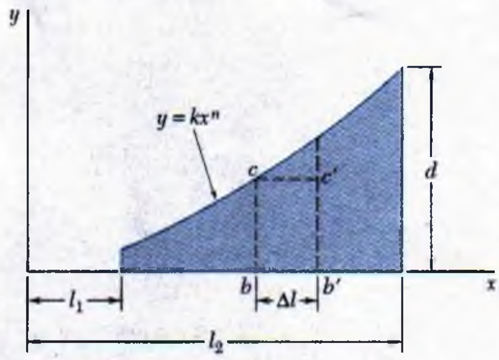


Figura P9.C8

9.C9 Una placa rectangular delgada de peso W se suelda a un eje vertical AB con el cual forma un ángulo θ. Si $W = 1$ lb, $a = 10$ in. y $b = 8$ in., grafique, para valores de θ desde 0 hasta 90°, el momento de inercia de masa de la placa en relación con *a*) el eje y, *b*) el eje z.

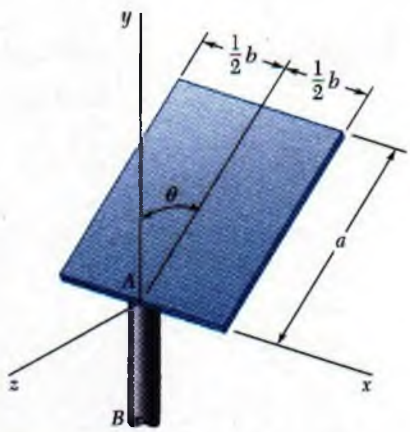


Figura P9.C9

CAPÍTULO 10

Método del trabajo virtual



Los métodos analíticos expuestos en este capítulo pueden usarse para demostrar que la fuerza ejercida por el cilindro hidráulico, mientras levanta o baja el aguilón que se muestra en la fotografía, es independiente de la ubicación de los trabajadores sobre la plataforma.

MÉTODO DEL TRABAJO VIRTUAL

*10.1. INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores los problemas relacionados con el equilibrio de cuerpos rígidos se resolvieron al considerar que las fuerzas aplicadas sobre los mismos estaban balanceadas. Se plantearon y resolvieron las ecuaciones de equilibrio $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma M_A = 0$ para determinar el valor de las incógnitas. Sin embargo, un método que ha resultado ser más eficiente para resolver cierto tipo de problemas de equilibrio es el basado en el *principio de trabajo virtual*, el cual fue utilizado por primera vez en el siglo XVIII por el matemático suizo Jean Bernoulli.

Como se verá en la sección 10.3, el principio del trabajo virtual establece que si una partícula o un cuerpo rígido o en general un sistema de cuerpos rígidos unidos, los cuales están en equilibrio bajo la acción de varias fuerzas externas, se les aplica un desplazamiento arbitrario a partir de la posición de equilibrio, el trabajo realizado por las fuerzas externas durante el desplazamiento será cero. Este principio es efectivo cuando se aplica a la solución de problemas relacionados con el equilibrio de máquinas o mecanismos que están constituidos por varios elementos conectados entre sí.

En la segunda parte del capítulo se aplicará el método del trabajo virtual en forma alternativa basada en el concepto de *energía potencial*. En la sección 10.8 se estudiará que si una partícula, cuerpo rígido o sistema de cuerpos rígidos están en equilibrio, la derivada de la energía potencial con respecto a la variable que define la posición debe ser cero.

También en este capítulo se aprenderá a evaluar la eficiencia mecánica de una máquina (sección 10.5) y poder determinar si la posición de equilibrio es estable, inestable o neutra (sección 10.9).

*10.2. TRABAJO DE UNA FUERZA

Primero se definirán los conceptos de *desplazamiento* y *trabajo* como se usan en la mecánica. Considere que la partícula mostrada (figura 10.1) se mueve del punto A a un punto cercano A'. Si con $\mathbf{r}$ se denota el vector de posición correspondiente al punto A, el pequeño vector que une a A con A' debe representarse con el diferencial $d\mathbf{r}$; al vector $d\mathbf{r}$ se le llama *desplazamiento* de la partícula. Suponga que sobre la partícula actúa una fuerza $\mathbf{F}$, el *trabajo de la fuerza* $\mathbf{F}$ *correspondiente al desplazamiento* $d\mathbf{r}$ se define como la cantidad

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{10.1}$$

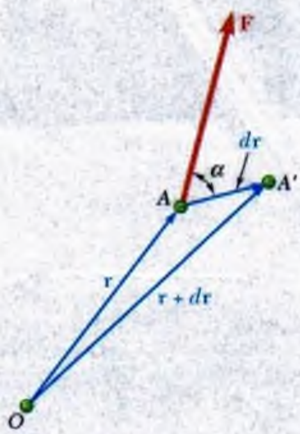


Figura 10.1

la cual se obtiene al formar el producto escalar del vector de fuerza $\mathbf{F}$ con el vector de desplazamiento $d\mathbf{r}$. Si se representan con F y ds las magnitudes de la fuerza y el desplazamiento, respectivamente, y con α el ángulo que forman los vectores $\mathbf{F}$ y $d\mathbf{r}$ y, recordando la definición del producto escalar de dos vectores (sección 3.9), se escribe

$$dU = F\,ds \cos \alpha \tag{10.1'}$$

Como el trabajo es una *cantidad escalar*, éste tiene magnitud y signo pero no dirección. También note que el trabajo debe estar expresado en unidades obtenidas al multiplicar unidades de longitud por unidades de fuerza. Así, en el sistema de unidades de uso común en Estados Unidos el trabajo se expresa en unidades de ft · lb o in. · lb. Pero si se

usan unidades del SI, entonces el trabajo se expresa en N · m. A esta unidad se le denomina *joule* (J).[1]

Con base en la ecuación (10.1′) se puede concluir que el trabajo dU es positivo si el ángulo α es agudo y negativo si el ángulo α es obtuso. Existen tres casos de interés especial: si el vector fuerza **F** tiene la misma dirección que el vector desplazamiento $d\mathbf{r}$, entonces el trabajo dU se reduce a $F\,ds$, pero si **F** tiene dirección opuesta a $d\mathbf{r}$, entonces el trabajo se obtiene como $dU = -F\,ds$. Por último, si **F** es perpendicular a $d\mathbf{r}$, el trabajo dU es igual a cero.

También el trabajo dU de una fuerza **F** durante un desplazamiento $d\mathbf{r}$ se puede considerar como el producto de F con la componente $ds \cos \alpha$ del desplazamiento $d\mathbf{r}$ a lo largo de **F** (figura 10.2*a*). Este enfoque es muy práctico cuando se desea determinar el trabajo realizado

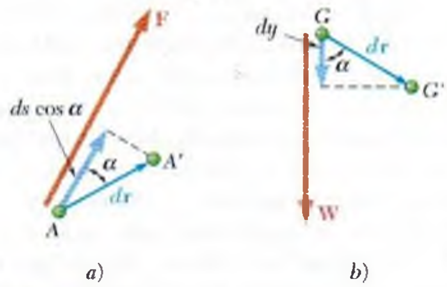


Figura 10.2



Fotografía 10.1 Las fuerzas ejercidas por los cilíndros hidráulicos para posicionar el elevador de canasta mostrado en la fotografía pueden determinarse de manera efectiva mediante el método del trabajo virtual; lo anterior es posible porque existe una relación simple entre los desplazamientos de los puntos de aplicación de las fuerzas que actúan sobre los elementos del elevador.

por el peso **W** de un cuerpo (figura 10.2*b*). En este caso, el trabajo **W** es igual al producto de W y el desplazamiento vertical dy del centro de gravedad G del cuerpo. Si el desplazamiento es hacia abajo, el trabajo realizado es positivo, pero si el desplazamiento es hacia arriba, entonces el trabajo realizado será negativo.

Hay cierto número de fuerzas que se estudian en estática y que *no realizan trabajo*: fuerzas aplicadas a puntos fijos ($ds = 0$) o que actúan en dirección perpendicular al desplazamiento ($\cos \alpha = 0$). Dentro de este tipo de fuerzas se pueden citar las fuerzas de reacción que se generan en pernos sin fricción cuando el cuerpo que se sostiene rota con respecto al perno; las fuerzas de reacción en superficies sin fricción cuando el cuerpo en contacto se mueve a lo largo de la superficie; la fuerza de reacción que genera un rodillo cuando se mueve a lo largo de un riel; el peso de un cuerpo cuando su centro de gravedad se mueve en forma horizontal, y la fuerza de fricción que una rueda genera cuando ésta gira sin deslizarse (debido a que en todo instante el punto de contacto no se mueve). Algunos ejemplos de fuerzas que *sí realizan trabajo* son el peso del cuerpo (excepto en el caso considerado anteriormente), la fuerza de fricción que actúa en un cuerpo que se desliza sobre una superficie rugosa y la mayoría de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo en movimiento.

[1]El joule es la unidad de *energía* en las unidades del SI, sin importar si dicha energía está en forma mecánica (trabajo, energía potencial y energía cinética), química, eléctrica o térmica. Se debe notar que aunque N · m = J, el momento de una fuerza debe expresarse en N · m y no en joules, puesto que el momento de una fuerza no es una forma de energía.

En ciertos casos, la suma del trabajo realizado por varias fuerzas es cero. Por ejemplo, considérense los dos cuerpos rígidos AC y BC conectados en C mediante un *perno sin fricción* (figura 10.3*a*). Entre las fuerzas que actúan en AC está la fuerza **F** ejercida en C por BC.

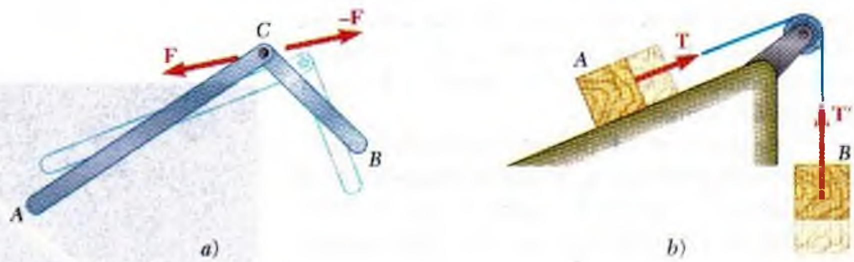


Figura 10.3

En general, el trabajo de esta fuerza no será cero, pero éste será igual en magnitud y de signo opuesto al trabajo generado por la fuerza $-\mathbf{F}$ ejercida por AC sobre BC debido a que estas fuerzas son iguales y opuestas y se aplican sobre la misma partícula. Así, cuando se considera el trabajo total realizado por todas las fuerzas que actúan sobre AB y BC, el trabajo realizado por las dos fuerzas internas en C se anula. Se puede obtener una conclusión análoga al considerar un sistema compuesto de dos bloques conectados mediante una *cuerda inextensible* AB (figura 10.3*b*). El trabajo de la fuerza de tensión **T** en A es igual en magnitud al trabajo realizado por la fuerza de tensión **T**′ en B, debido a que estas dos fuerzas tienen la misma magnitud y los puntos A y B recorren la misma distancia; sin embargo, en un caso el trabajo es positivo mientras que en el otro es negativo y, de nuevo, el trabajo realizado por las fuerzas internas se cancela.

Se puede demostrar que el trabajo total de las fuerzas internas que mantienen unido a un cuerpo rígido es cero. En este caso, considere dos partículas A y B de un mismo cuerpo rígido y dos fuerzas **F** y $-\mathbf{F}$ iguales y opuestas que actúan una sobre la otra (figura 10.4). Como en

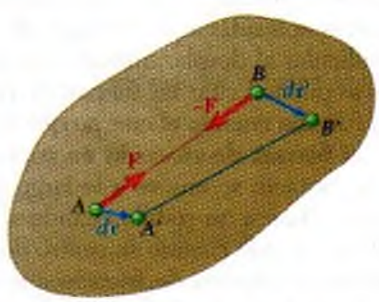


Figura 10.4

general los desplazamientos pequeños $d\mathbf{r}$ y $d\mathbf{r}'$ de las dos partículas son diferentes, las componentes de estos desplazamientos a lo largo de AB deben ser iguales; de otra manera, las partículas no permanecerían a la misma distancia una con respecto a la otra, por tanto, el cuerpo no sería rígido. En este sentido, el trabajo de **F** es igual en magnitud y opuesto en signo al trabajo de $-\mathbf{F}$, y su suma es cero.

Al calcular el trabajo de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido es conveniente considerar el trabajo de un par sin considerar por separado el trabajo de cada una de las dos fuerzas que lo

forman. Considere las dos fuerzas **F** y −**F** que forman un par de momento **M**, las cuales actúan sobre un cuerpo rígido (figura 10.5). Cualquier desplazamiento pequeño del cuerpo rígido que lleve a A y B a A' y B'', respectivamente, puede dividirse en dos partes, una en la cual los puntos A y B sufren desplazamientos iguales $d\mathbf{r}_1$ y la otra en la cual A' permanece fijo mientras que B' se mueve a B'' mediante un desplazamiento $d\mathbf{r}_2$ de magnitud $ds_2 = r\,d\theta$. Durante la primera parte del movimiento, el trabajo de **F** es igual en magnitud y opuesto en signo al trabajo de −**F** y por tanto su suma es cero. Sin embargo, en la segunda parte del movimiento sólo la fuerza **F** hace trabajo y éste es igual a $dU = F\,ds_2 = Fr\,d\theta$. Pero el producto Fr es igual a la magnitud M del momento del par. De esta manera, el trabajo de un par de momento **M** que actúa sobre un cuerpo rígido es:

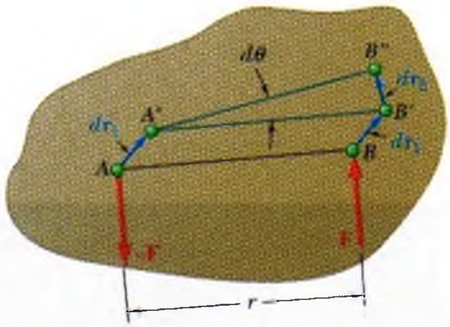


Figura 10.5

$$dU = M\,d\theta \tag{10.2}$$

donde $d\theta$ representa el ángulo pequeño que rota el cuerpo, expresado en radianes. Se debe enfatizar nuevamente que el trabajo debe estar expresado en unidades que se obtienen al multiplicar unidades de fuerza por unidades de longitud.

*10.3. PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL

Considere una partícula sobre la que actúan varias fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ (figura 10.6). Suponga que la partícula realiza un desplazamiento pequeño desde A hasta A', el cual en ocasiones es posible, pero no necesariamente sucede. Las fuerzas pueden estar balanceadas y la partícula en reposo o la partícula puede moverse bajo la acción de las fuerzas dadas en una dirección diferente a la de AA'. A este desplazamiento, denotado por $\delta\mathbf{r}$, se le llama *desplazamiento virtual*, puesto que en realidad no sucede. El símbolo $\delta\mathbf{r}$ representa una diferencial de primer orden y se le usa para distinguir el desplazamiento virtual del desplazamiento $d\mathbf{r}$ que podría suceder si la partícula estuviera en movimiento. Como se verá más adelante, los desplazamientos virtuales pueden usarse para determinar si se satisfacen las condiciones de equilibrio de una partícula dada.

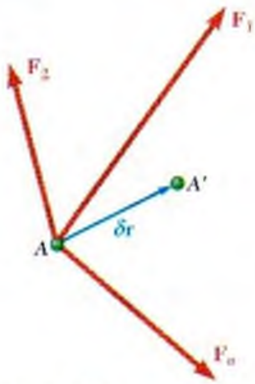


Figura 10.6

Al trabajo realizado por las fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ durante el desplazamiento virtual $\delta\mathbf{r}$ se le llama *trabajo virtual*. El trabajo virtual de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula de la figura 10.6 es

$$\begin{aligned}\delta U &= \mathbf{F}_1 \cdot \delta\mathbf{r} + \mathbf{F}_2 \cdot \delta\mathbf{r} + \cdots + \mathbf{F}_n \cdot \delta\mathbf{r} \\ &= (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n) \cdot \delta\mathbf{r}\end{aligned}$$

o

$$\delta U = \mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{r} \tag{10.3}$$

donde con **R** se representa la resultante de las fuerzas dadas. Por tanto, el trabajo virtual total realizado por las fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ es igual al trabajo virtual realizado por su resultante **R**.

El principio del trabajo virtual para una partícula establece que *si una partícula está en equilibrio, el trabajo virtual total de las fuerzas que actúan sobre la partícula es cero para cualquier desplazamiento virtual de la partícula*. Así, esta condición necesaria establece que si la partícula está en equilibrio, la resultante **R** de las fuerzas es cero y, por tanto, se concluye con base en la ecuación (10.3) que el trabajo virtual δU es cero. La condición es suficiente para afirmar que si el trabajo virtual δU es cero para cualquier desplazamiento virtual, el producto escalar $\mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{r}$ es cero para cualquier $\delta\mathbf{r}$, y que la resultante **R** debe ser cero.

En el caso de un cuerpo rígido, el principio del trabajo virtual establece que *si el cuerpo rígido está en equilibrio, el trabajo virtual total de las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo rígido es cero para cualquier desplazamiento virtual del cuerpo*. Esta condición necesaria establece que si el cuerpo está en equilibrio, todas las partículas que lo forman están en equilibrio y el trabajo virtual total de las fuerzas que actúan sobre todas las partículas debe ser cero. Pero en la sección anterior se vio que el trabajo total de las fuerzas internas es cero, por tanto, el trabajo total de las fuerzas externas también debe ser cero. Puede demostrarse que esta condición también es suficiente.

El principio del trabajo virtual se puede extender al caso de un *sistema de cuerpos rígidos unidos*. Si el sistema permanece unido durante un desplazamiento virtual, debe *considerarse sólo el trabajo de las fuerzas externas al sistema* puesto que el trabajo de las fuerzas internas entre las diferentes uniones del sistema es cero.

*10.4. APLICACIONES DEL PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL

El principio del trabajo virtual es particularmente efectivo cuando se aplica a la solución de problemas que involucran máquinas o mecanismos compuestos de varios cuerpos rígidos conectados entre sí. Por

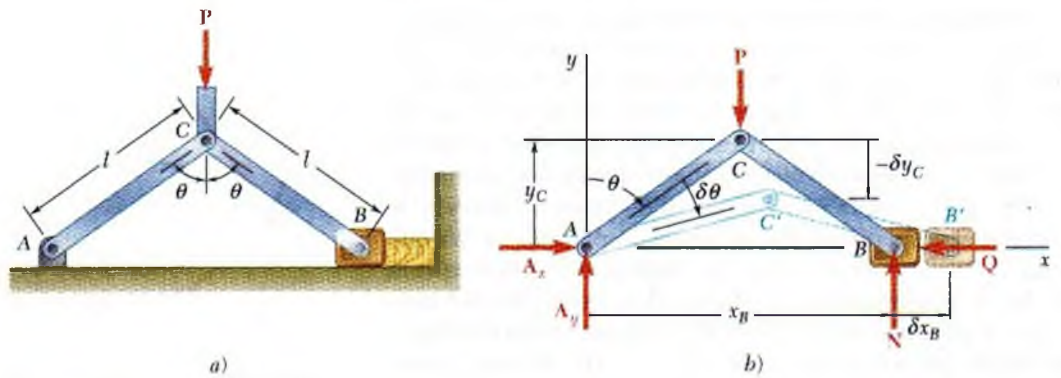


Figura 10.7

ejemplo, la prensa de banco ACB mostrada en la figura 10.7*a*, la cual se usa para comprimir un bloque de madera. Se desea determinar la fuerza ejercida por la prensa sobre el bloque cuando se aplica en C una fuerza **P** suponiendo que no hay fricción. Representando con **Q** la reacción que ejerce el bloque sobre la prensa, se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la misma y se considera el desplazamiento virtual que se obtiene al incrementar en forma positiva el ángulo θ en $\delta\theta$ (figura 10.7*b*). Al seleccionar un sistema de ejes coordenados con origen en A, se nota que x_B se incrementa mientras que y_C disminuye. En la figura se muestra un incremento positivo δx_B y un incremento negativo $-\delta y_C$. Las reacciones $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$ y **N** no realizan trabajo durante el desplazamiento virtual considerado y sólo se debe calcular el trabajo realizado por **P** y **Q**. Como **Q** y δx_B tienen sentidos opuestos, el trabajo virtual de **Q** es $\delta U_Q = -Q\,\delta x_B$. Como **P** y el incremento mostrado en la figura ($-\delta y_C$) tienen el mismo sentido, el trabajo virtual de **P** es $\delta U_P = +P(-\delta y_C) = -P\,\delta y_C$. El signo negativo en la relación anterior pudo haberse previsto al observar que las fuerzas **Q** y **P** tienen, res-

pectivamente, direcciones opuestas a los ejes positivos x y y. Si se expresa las coordenadas x_B y y_C en términos del ángulo θ y diferenciando, se obtiene

$$\begin{aligned} x_B &= 2l \text{ sen } \theta & y_C &= l \cos \theta \\ \delta x_B &= 2l \cos \theta\, \delta\theta & \delta y_C &= -l \text{ sen } \theta\, \delta\theta \end{aligned} \tag{10.4}$$

Por tanto, el trabajo virtual realizado por las fuerzas **Q** y **P** es

$$\begin{aligned} \delta U &= \delta U_Q + \delta U_P = -Q\, \delta x_B - P\, \delta y_C \\ &= -2Ql \cos \theta\, \delta\theta + Pl \text{ sen } \theta\, \delta\theta \end{aligned}$$

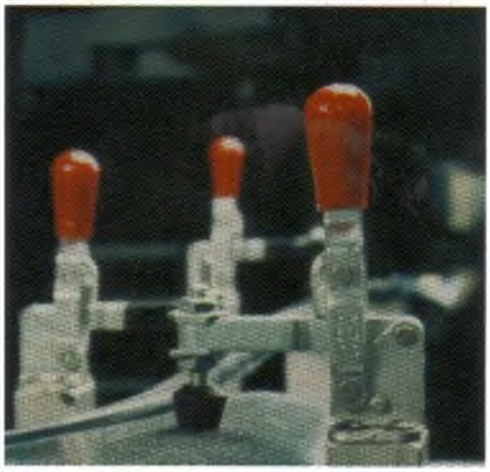
Estableciendo $\delta U = 0$ se obtiene

$$2Ql \cos \theta\, \delta\theta = Pl \text{ sen } \theta\, \delta\theta \tag{10.5}$$

$$Q = \tfrac{1}{2}P \tan \theta \tag{10.6}$$

En este problema es clara la superioridad del método del trabajo virtual sobre las ecuaciones de equilibrio convencionales: al utilizar el método del trabajo virtual se pudieron eliminar todas las reacciones desconocidas mientras que al plantear la ecuación de equilibrio $\Sigma M_A = 0$ sólo se hubieran podido eliminar dos de éstas. Esta propiedad del método del trabajo virtual se puede utilizar para resolver problemas relacionados con máquinas y mecanismos. *Si el desplazamiento virtual considerado es consistente con las restricciones impuestas por los apoyos y uniones, todas las reacciones y las fuerzas internas se eliminan y sólo debe considerarse el trabajo de las cargas, las fuerzas aplicadas y las fuerzas de fricción.*

También el método del trabajo virtual puede utilizarse para resolver problemas que involucran estructuras completamente restringidas, aunque en realidad nunca se presenten los desplazamientos virtuales considerados. Por ejemplo, considere el armazón ACB mostrado en la figura 10.8*a*. Si se mantiene fijo el punto A mientras que al punto B se le aplica un desplazamiento virtual horizontal (figura 10.8*b*), sólo es necesario considerar el trabajo realizado por **P** y $\mathbf{B}_x$. Entonces, se puede determinar el valor de la componente de reacción $\mathbf{B}_x$ de la misma



Fotografía 10.2 La fuerza de agarre de la abrazadera de seguro que se presenta en la fotografía puede ser expresada como una función de la fuerza aplicada a la manivela, estableciendo primero las relaciones geométricas entre los elementos de la abrazadera, para después aplicar el método del trabajo virtual.

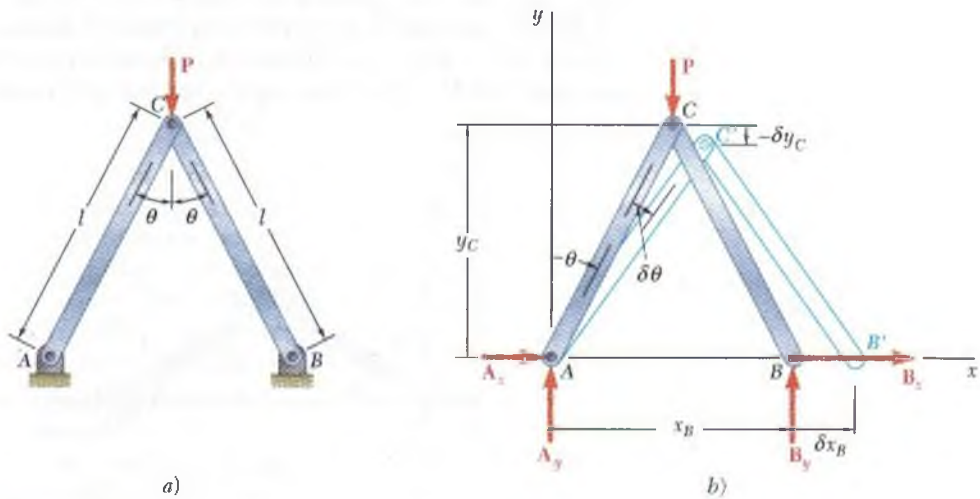


Figura 10.8

forma en que se calculó la fuerza **Q** del ejemplo anterior (figura 10.7*b*); por tanto, se obtiene

$$B_x = -\tfrac{1}{2}P \tan \theta$$

En forma análoga se puede determinar la componente de la reacción $\mathbf{A}_x$ al mantener fijo el punto *B* y aplicar un desplazamiento virtual horizontal al punto *A*. Las restantes componentes $\mathbf{A}_y$ y $\mathbf{B}_y$ se pueden calcular rotando el armazón *ACB* como si fuera un cuerpo rígido, respectivamente, con relación a *B* y *A*.

El método de trabajo virtual también se puede emplear para determinar la configuración de un sistema en equilibrio sujeto a la acción de varias fuerzas dadas. Por ejemplo, puede obtenerse el valor del ángulo θ para el cual el mecanismo de la figura 10.7 está en equilibrio bajo la acción de las fuerzas **P** y **Q** resolviendo la ecuación (10.6) para tan θ.

Es necesario señalar que lo atractivo del método del trabajo virtual depende en gran medida de la existencia de relaciones geométricas simples entre los diferentes desplazamientos virtuales involucrados en la solución de cierto problema dado. Cuando no es posible obtener dichas relaciones geométricas simples es necesario recurrir al método convencional de solución expuesto en el capítulo 6.

*10.5. MÁQUINAS REALES. EFICIENCIA MECÁNICA

Al hacer el análisis de la prensa de banco de la sección anterior, se supuso que no había fuerzas de fricción. Así, el trabajo virtual consistía sólo en el trabajo de la fuerza aplicada **P** y de la fuerza de reacción **Q**. Note que el trabajo de la reacción **Q** es igual en magnitud y opuesto en signo al trabajo realizado por la fuerza ejercida por la prensa de banco sobre el bloque. Por tanto, la ecuación (10.5) expresa que el *trabajo de salida* $2Ql \cos \theta \, \delta\theta$ es igual al *trabajo de entrada* $Pl \operatorname{sen} \theta \, \delta\theta$. Una máquina en la cual el trabajo de entrada es igual al trabajo de salida se le conoce como máquina "ideal". Pero en una máquina "real" las fuerzas de fricción siempre realizan trabajo, por lo que el trabajo de salida será menor que el trabajo de entrada.

Por ejemplo, considere la prensa de banco de la figura 10.7*a* y suponga que existe una fuerza de fricción **F** entre el bloque deslizante *B* y el plano horizontal (figura 10.9). Con el uso de los métodos convencionales de la estática y al sumar los momentos con respecto a *A*, se encuentra que $N = P/2$. Si se representa con μ el coeficiente de fric-

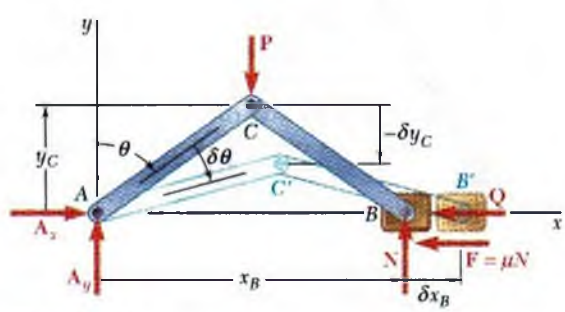


Figura 10.9

ción entre el bloque B y el plano horizontal, se tiene que $F = \mu N = \mu P/2$. Recordando las fórmulas (10.4), es posible determinar el trabajo virtual total de las fuerzas **Q**, **P** y **F** realizado durante el desplazamiento virtual mostrado en la figura 10.9, esto es:

$$\begin{aligned} \delta U &= -Q\,\delta x_B - P\,\delta y_C - F\,\delta x_B \\ &= -2Ql\cos\theta\,\delta\theta + Pl\operatorname{sen}\theta\,\delta\theta - \mu Pl\cos\theta\,\delta\theta \end{aligned}$$

Estableciendo $\delta U = 0$, se obtiene

$$2Ql\cos\theta\,\delta\theta = Pl\operatorname{sen}\theta\,\delta\theta - \mu Pl\cos\theta\,\delta\theta \tag{10.7}$$

la cual expresa que el trabajo de salida es igual al trabajo de entrada menos el trabajo de la fuerza de fricción. Resolviendo para Q se tiene

$$Q = \tfrac{1}{2}P(\tan\theta - \mu) \tag{10.8}$$

Note que si $\tan\theta = \mu$, entonces $Q = 0$; esto sucede cuando θ es igual al ángulo de fricción ϕ. Por otra parte, si $\theta < \phi$ entonces $Q < 0$. Por tanto, la prensa de banco puede usarse sólo para valores de θ mayores que el ángulo de fricción.

La *eficiencia mecánica* de una máquina se define como la relación

$$\eta = \frac{\text{trabajo de salida}}{\text{trabajo de entrada}} \tag{10.9}$$

Es claro que la eficiencia mecánica de una máquina ideal es $\eta = 1$, debido a que el trabajo de entrada es igual al trabajo de salida. Pero la eficiencia mecánica de una máquina real siempre será menor que 1.

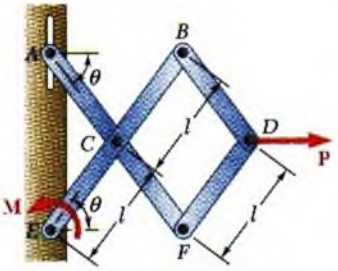
En el caso de la prensa de banco que se acaba de estudiar, se escribe

$$\eta = \frac{\text{trabajo de salida}}{\text{trabajo de entrada}} = \frac{2Ql\cos\theta\,\delta\theta}{Pl\operatorname{sen}\theta\,\delta\theta}$$

Al sustituir el valor de Q de la ecuación (10.8), se obtiene

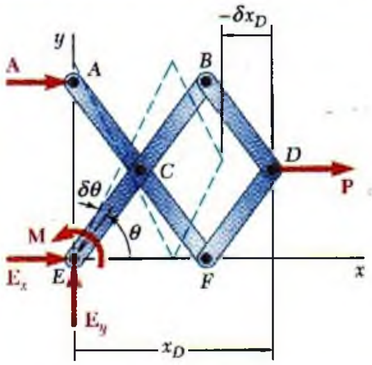
$$\eta = \frac{P(\tan\theta - \mu)l\cos\theta\,\delta\theta}{Pl\operatorname{sen}\theta\,\delta\theta} = 1 - \mu\cot\theta \tag{10.10}$$

Se puede comprobar que en ausencia de las fuerzas de fricción, $\mu = 0$ y $\eta = 1$. En general, para valores de μ diferentes de cero, la eficiencia η es cero cuando $\mu\cot\theta = 1$, esto es, cuando $\tan\theta = \mu$, o $\theta = \tan^{-1}\mu = \phi$. De nuevo se comprueba que la prensa de banco puede usarse sólo para valores de θ mayores que el ángulo de fricción ϕ.



PROBLEMA RESUELTO 10.1

Con el método de trabajo virtual, determine la magnitud del par **M** requerido para mantener en equilibrio el mecanismo mostrado en la figura.



SOLUCIÓN

Al seleccionar un sistema de ejes coordenados con origen en E, se escribe

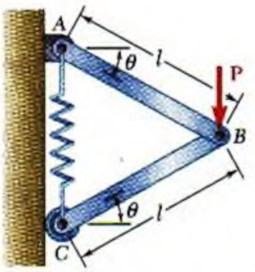
$$x_D = 3l \cos\theta \qquad \delta x_D = -3l \operatorname{sen}\theta\,\delta\theta$$

Principio del trabajo virtual. Como las reacciones **A**, $\mathbf{E}_x$ y $\mathbf{E}_y$ no realizan trabajo durante el desplazamiento virtual, el trabajo virtual total realizado por **M** y **P** debe ser cero. Note que tanto **P** como **M** actúan, respectivamente, en la dirección positiva de x y θ, por lo que se puede escribir

$\delta U = 0$: $\qquad +M\,\delta\theta + P\,\delta x_D = 0$

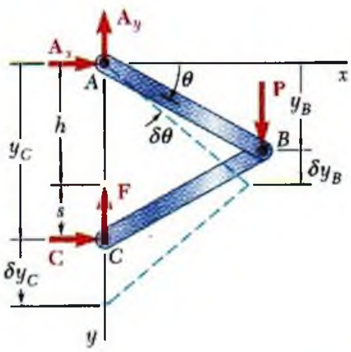
$$+M\,\delta\theta + P(-3l \operatorname{sen}\theta\,\delta\theta) = 0$$

$$M = 3Pl \operatorname{sen}\theta \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 10.2

Para el mecanismo mostrado en la figura, determine las expresiones para θ y para la tensión en el resorte que corresponden a la posición de equilibrio. El resorte de constante k tiene una longitud sin estirar h. Por esto ignore el peso del mecanismo.



SOLUCIÓN

Con el sistema de coordenadas mostrado en la figura se tiene

$$y_B = l \operatorname{sen}\theta \qquad y_C = 2l \operatorname{sen}\theta$$
$$\delta y_B = l \cos\theta\,\delta\theta \qquad \delta y_C = 2l \cos\theta\,\delta\theta$$

La elongación del resorte es

$$s = y_C - h = 2l \operatorname{sen}\theta - h$$

La magnitud de la fuerza ejercida en C por el resorte es

$$F = ks = k(2l \operatorname{sen}\theta - h) \qquad (1)$$

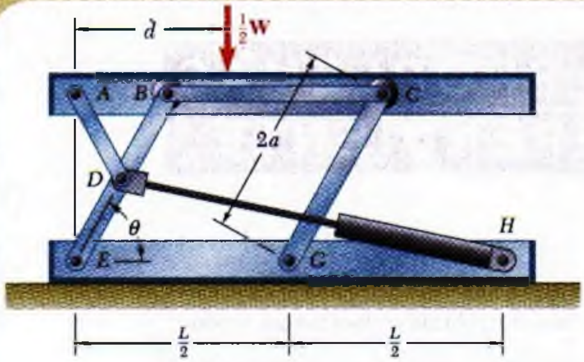
Principio del trabajo virtual. Como las reacciones $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$ y **C** no realizan trabajo, el trabajo virtual total realizado por **P** y **F** debe ser cero.

$\delta U = 0$: $\qquad P\,\delta y_B - F\,\delta y_C = 0$

$$P(l \cos\theta\,\delta\theta) - k(2l \operatorname{sen}\theta - h)(2l \cos\theta\,\delta\theta) = 0$$

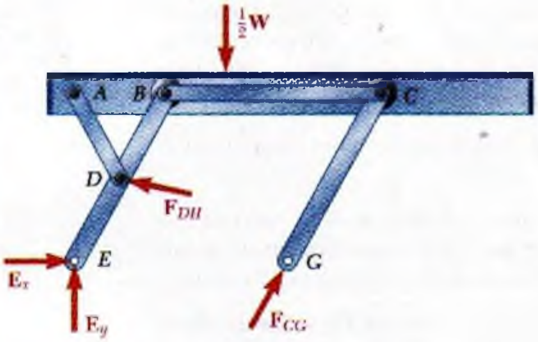
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{P + 2kh}{4kl} \blacktriangleleft$$

Si se sustituye esta expresión en (1), se tiene $\qquad F = \tfrac{1}{2}P \blacktriangleleft$



PROBLEMA RESUELTO 10.3

Una mesa de elevación hidráulica se utiliza para levantar una caja de 1 000 kg. La mesa consiste de una plataforma y de dos mecanismos idénticos en los cuales los cilindros hidráulicos ejercen fuerzas iguales (en la figura se muestran sólo un mecanismo y un cilindro hidráulico). Los elementos EDB y CG miden $2a$ de longitud cada uno y el elemento AD se une mediante un perno al punto medio de EDB. Si la caja se coloca sobre la caja de manera que la mitad de su peso es soportado por el sistema mostrado en la figura, determine la fuerza ejercida por cada cilindro al levantar la caja para los valores de $\theta = 60°$, $a = 0.70$ m y $L = 3.20$ m. Este mecanismo se estudió previamente en el problema resuelto 6.7.



SOLUCIÓN

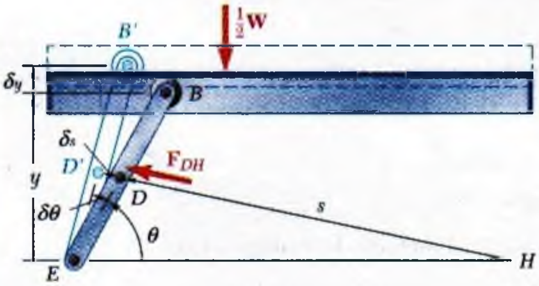
La máquina considerada consiste de la plataforma y del mecanismo en el que se ejerce una fuerza de entrada $\mathbf{F}_{DH}$ por medio del cilindro y una fuerza de salida igual y opuesta a $\frac{1}{2}\mathbf{W}$.

Principio del trabajo virtual. Observe primero que las reacciones en E y G no realizan trabajo. Al representar con y la elevación de la plataforma sobre la base y con s la longitud DH del sistema cilindro-pistón, se escribe

$$\delta U = 0: \qquad -\tfrac{1}{2}W\,\delta y + F_{DH}\,\delta s = 0 \tag{1}$$

El desplazamiento vertical δy de la plataforma se puede expresar en términos del desplazamiento angular $\delta\theta$ del elemento EDB de la siguiente forma:

$$y = (EB)\text{ sen }\theta = 2a\text{ sen }\theta$$
$$\delta y = 2a\cos\theta\,\delta\theta$$



Para expresar δs de una forma análoga en términos de $\delta\theta$, se aplica primero la ley de cosenos,

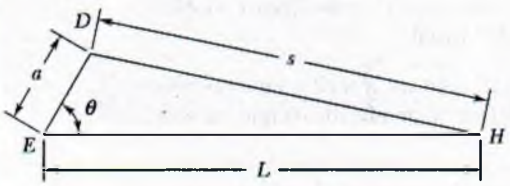
$$s^2 = a^2 + L^2 - 2aL\cos\theta$$

Diferenciando,

$$2s\,\delta s = -2aL(-\text{sen }\theta)\,\delta\theta$$
$$\delta s = \frac{aL\text{ sen }\theta}{s}\,\delta\theta$$

Sustituyendo los valores de δy y δs en (1), se escribe

$$(-\tfrac{1}{2}W)2a\cos\theta\,\delta\theta + F_{DH}\frac{aL\text{ sen }\theta}{s}\,\delta\theta = 0$$
$$F_{DH} = W\frac{s}{L}\cot\theta$$



Con los datos numéricos dados, se tiene

$$W = mg = (1\,000\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2) = 9\,810\text{ N} = 9.81\text{ kN}$$
$$s^2 = a^2 + L^2 - 2aL\cos\theta$$
$$= (0.70)^2 + (3.20)^2 - 2(0.70)(3.20)\cos 60° = 8.49$$
$$s = 2.91\text{ m}$$

$$F_{DH} = W\frac{s}{L}\cot\theta = (9.81\text{ kN})\frac{2.91\text{ m}}{3.20\text{ m}}\cot 60°$$

$$F_{DH} = 5.15\text{ kN} \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta sección se aprendió a utilizar el *método del trabajo virtual*, el cual representa una alternativa diferente para resolver problemas relacionados con el equilibrio de los cuerpos rígidos.

El trabajo realizado por una fuerza durante un desplazamiento de su punto de aplicación o por un par durante una rotación se puede determinar utilizando, respectivamente, las ecuaciones (10.1) y (10.2):

$$dU = F\,ds \cos \alpha \qquad (10.1)$$
$$dU = M\,d\theta \qquad (10.2)$$

Principio del trabajo virtual. En su forma más general y más útil, este principio se puede enunciar de la siguiente manera: *si un sistema de cuerpos rígidos unidos está en equilibrio, el trabajo virtual total de las fuerzas externas aplicadas al sistema es siempre cero para cualquier desplazamiento virtual que experimente el sistema.*

Cuando se quiera aplicar el principio del trabajo virtual, es importante tener presente lo siguiente:

1. ***Desplazamiento virtual.*** Una máquina o mecanismo en equilibrio no tiene ninguna tendencia a moverse. Sin embargo, *se puede causar o imaginar un desplazamiento pequeño*. Como en realidad dicho desplazamiento no ocurre, a éste se le conoce como *desplazamiento virtual*.

2. ***Trabajo virtual.*** Al trabajo realizado por una fuerza o un par durante un desplazamiento virtual se le conoce como *trabajo virtual*.

3. ***Se deben considerar sólo las fuerzas que realizan trabajo*** durante el desplazamiento virtual. Es importante recordar que, cuando se calcula el trabajo virtual, sólo deben ser consideradas las componentes del desplazamiento virtual paralelas a una fuerza dada. Ésta es la razón por la que, por ejemplo, en el problema resuelto 10.2 sólo se determinó el desplazamiento vertical del perno B.

4. ***Las fuerzas que no realizan trabajo*** durante un desplazamiento virtual que es consistente con las restricciones impuestas sobre el sistema son:

   a) Las reacciones en los apoyos
   b) Las fuerzas internas en las uniones
   c) Las fuerzas ejercidas por cables y cuerdas inextensibles

Ninguna de estas fuerzas debe tomarse en cuenta al utilizar el método del trabajo virtual.

5. ***Se debe estar seguro de que los diversos desplazamientos virtuales*** relacionados con los cálculos estén expresados en términos de un *solo desplazamiento virtual*. Esto se realizó en cada uno de los tres problemas resueltos de esta sección, donde todos los desplazamientos virtuales fueron expresados en términos de $\delta\theta$. Además, los desplazamientos virtuales que contienen términos de un orden igual o mayor al segundo orden [por ejemplo, $(\delta\theta)^2$ y $(\delta x)^2$] pueden ignorarse cuando se calcula el trabajo virtual.

6. ***Se debe recordar que el método del trabajo virtual sólo es efectivo en aquellos casos*** en donde la geometría de los sistemas permite relacionar de una forma simple los desplazamientos involucrados en el análisis.

7. ***El trabajo de una fuerza* F *ejercida por un resorte durante un desplazamiento virtual* δx** está dado por $\delta U = F\delta x$. En la lección siguiente se determinará el trabajo de la fuerza ejercida por un resorte realizado durante un desplazamiento finito.

Problemas

10.1 y 10.2 Determine la fuerza vertical **P** que debe aplicarse en *G* para mantener el equilibrio del mecanismo que muestra cada figura.

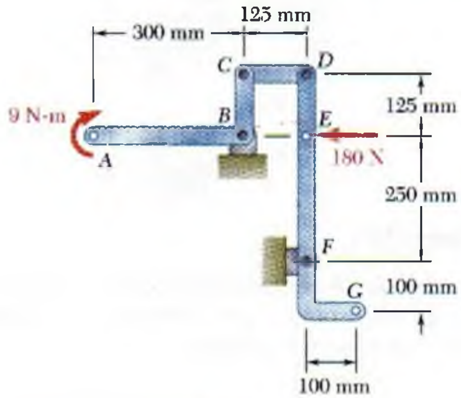


Figura P10.1 y P10.3

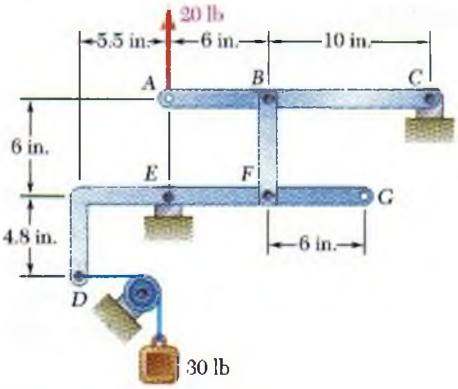


Figura P10.2 y *P10.4*

10.3 y *10.4* Determine el par **M** que debe aplicarse en el elemento *DEFG* para mantener el equilibrio del mecanismo que muestra cada figura.

10.5 Determine la fuerza horizontal **P** que debe aplicarse en *A* para mantener el equilibrio del mecanismo que muestra la figura.

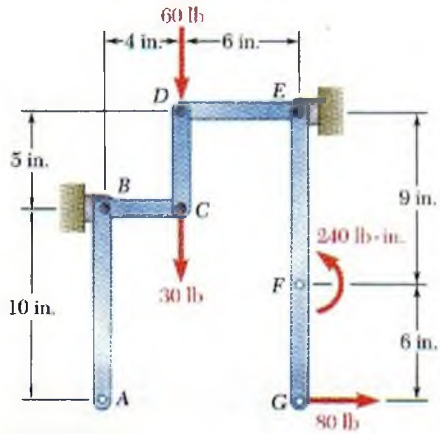


Figura P10.5

10.6 Un resorte sin estirar, cuya constante es igual a 720 N/m, está unido a los pernos ubicados en los puntos *C* e *I* del mecanismo que muestra la figura. El perno en *B* está unido al elemento *BDE* y se puede deslizar libremente a lo largo de una ranura en la placa fija. Determine la fuerza en el resorte y el desplazamiento horizontal del punto *H* cuando una fuerza horizontal de 90 N, dirigida hacia la derecha, se aplica *a*) en el punto *G*, *b*) en los puntos *G* y *H*.

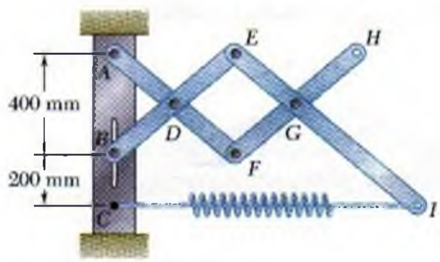


Figura P10.6 y P10.7

10.7 Un resorte sin estirar, cuya constante es igual a 720 N/m, está unido a los pernos localizados en los puntos *C* e *I* del mecanismo que muestra la figura. El perno en *B* está unido al elemento *BDE* y se puede deslizar libremente a lo largo de una ranura en la placa fija. Determine la fuerza en el resorte y el desplazamiento horizontal del punto *H* cuando una fuerza horizontal de 90 N, dirigida hacia la derecha, se aplica *a*) en el punto *E*, *b*) en los puntos *D* y *E*.

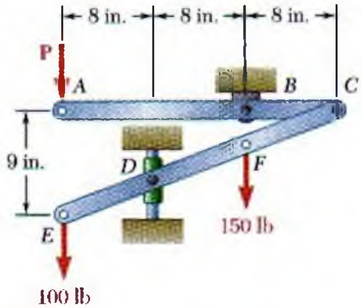


Figura *P10.8*

10.8 El mecanismo de dos barras que muestra la figura se sostiene mediante un soporte de perno colocado en B y un collarín puesto en D, el cual se desliza libremente sobre una barra vertical. Determine la fuerza **P** requerida para mantener el equilibrio del mecanismo.

10.9 Dado que la línea de acción de la fuerza **Q** pasa por el punto C del mecanismo que muestra la figura, obtenga una expresión para determinar la magnitud de la fuerza **Q** requerida para mantener el equilibrio.

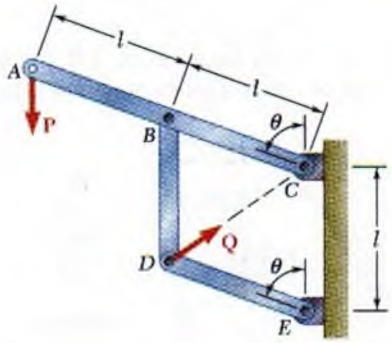


Figura P10.9

10.10 El mecanismo que muestra la figura está sometido a la acción de la fuerza **P**. Encuentre una expresión para determinar la magnitud de la fuerza **Q** requerida para mantener el equilibrio.

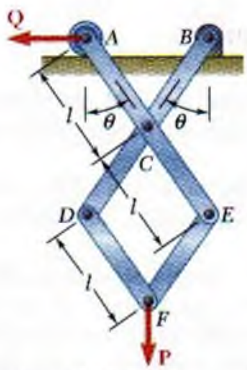


Figura P10.10

10.11 El mecanismo que muestra la figura está sometido a la acción de la fuerza **P**. Encuentre una expresión para determinar la magnitud de la fuerza **Q** requerida para mantener el equilibrio.

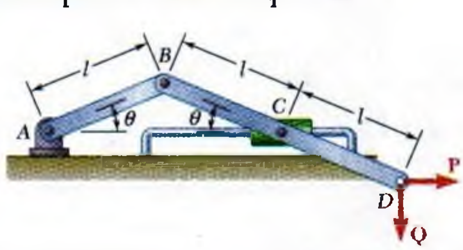


Figura *P10.11*

10.12 Una puerta para estacionamiento con travesaño superior y peso W consiste en un panel rectangular uniforme AC sostenido por dos conjuntos de rollos antifricción A y B que se deslizan, respectivamente, en un canal vertical y uno horizontal. Para mantener la posición que muestra la figura, la puerta se sostiene mediante un cable que va unido a la puerta a la mitad del extremo superior. Exprese la tensión T presente en el cable en términos de W, a, b y θ.

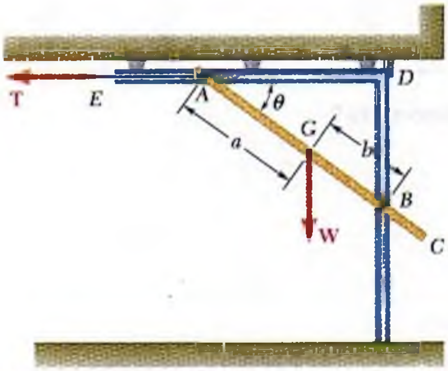


Figura *P10.12*

10.13 Una mesa de altura extensible y doble tijera se utiliza para levantar un componente de máquina de 450 kg. La mesa consiste en una plataforma y dos mecanismos idénticos sobre los cuales ejercen fuerzas iguales cilindros hidráulicos (la figura muestra sólo un mecanismo y un cilindro hidráulico). Cada elemento del mecanismo tiene longitud de 600 mm, y los pernos C y G están en los puntos medios de sus respectivos elementos. El cilindro hidráulico está atornillado a la base de la mesa en A y en el punto F que se encuentra a 150 mm de E. Si el componente se coloca sobre la mesa de tal forma que la mitad de su peso esté soportado por el sistema que muestra la figura, determine la fuerza ejercida por cada cilindro cuando $\theta = 30°$.

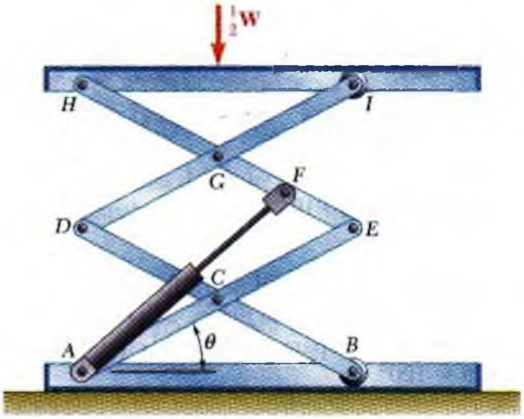


Figura P10.13 y P10.14

10.14 Una mesa de altura extensible y doble tijera se utiliza para levantar un componente de máquina de 450 kg. La mesa consiste en una plataforma y dos mecanismos idénticos sobre los cuales ejercen fuerzas iguales cilindros hidráulicos (la figura muestra sólo un mecanismo y un cilindro hidráulico). Cada elemento del mecanismo tiene longitud de 600 mm, y los pernos C y G están en los puntos medios de sus respectivos elementos. El cilindro hidráulico está atornillado a la base de la mesa en A y en el punto F que se encuentra a 150 mm de E. Si el componente se coloca sobre la mesa de tal forma que la mitad de su peso quede soportada por el sistema que se muestra, determine el valor mínimo permisible de θ si la fuerza máxima que puede ejercer cada cilindro es de 35 kN.

10.15 a 10.17 Encuentre una expresión para determinar la magnitud del par **M** requerido para mantener el equilibrio del mecanismo que muestra la figura.

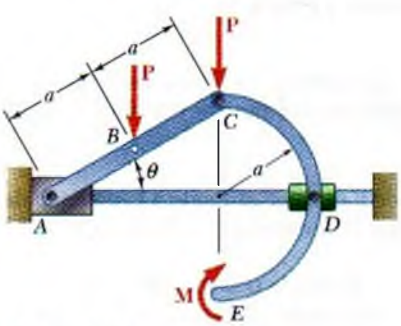


Figura P10.15

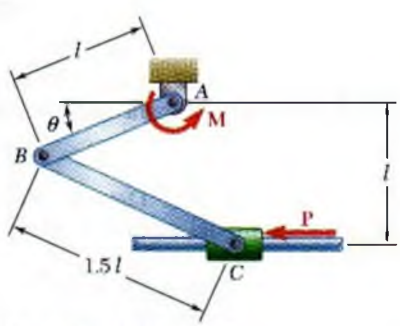


Figura *P10.16*

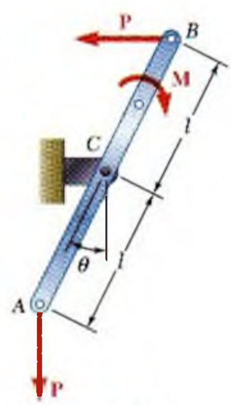


Figura *P10.17*

10.18 El pasador colocado en C está unido al elemento BCD y puede deslizarse a lo largo de la ranura de la placa fija que muestra la figura. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, encuentre una expresión para determinar la magnitud del par **M** requerido para mantener el equilibrio cuando la fuerza **P**, que actúa en D, está orientada *a*) en la forma indicada por la figura, *b*) verticalmente hacia abajo, *c*) horizontalmente hacia la derecha.

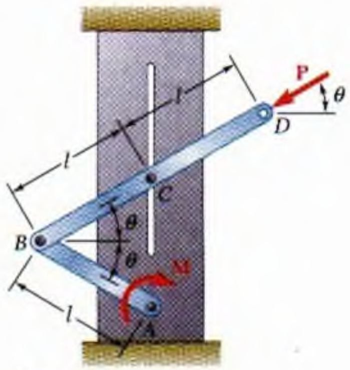


Figura P10.18

10.19 Una fuerza **P** de 1 kip se aplica sobre el pistón del sistema motriz que muestra la figura. Si $AB = 2.5$ in. y $BC = 10$ in., determine el par **M** requerido para mantener el equilibrio del sistema cuando *a*) $\theta = 30°$, *b*) $\theta = 150°$.

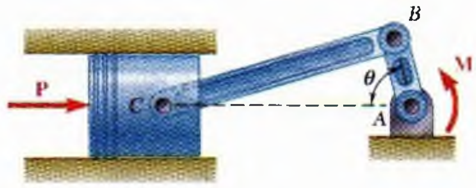


Figura P10.19 y P10.20

10.20 Una par **M** con magnitud de 75 lb · ft se aplica sobre la manivela del sistema motriz que muestra la figura. Si $AB = 2.5$ in. y $BC = 10$ in., determine la fuerza **P** requerida para mantener el equilibrio del sistema cuando *a*) $\theta = 60°$, *b*) $\theta = 120°$.

10.21 Para el mecanismo que muestra la figura, determine la fuerza **P** requerida para mantener el equilibrio cuando $a = 450$ mm, $M = 27$ N · m y $\theta = 30°$.

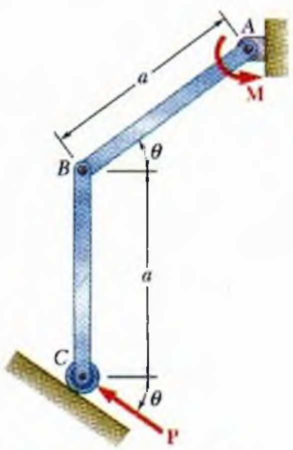


Figura P10.21 y P10.22

10.22 Para el mecanismo que muestra la figura, determine el par **M** requerido para mantener el equilibrio cuando $a = 600$ mm, $P = 135$ N y $\theta = 40°$.

10.23 Determine el valor de θ que corresponde a la posición de equilibrio del mecanismo del problema 10.9 cuando $P = 60$ lb y $Q = 75$ lb.

10.24 Determine el valor de θ, donde $0 \leq \theta \leq 90°$, que corresponde a la posición de equilibrio del mecanismo del problema 10.16 cuando $l = 250$ mm, $P = 60$ N y $M = 13.5$ N · m.

10.25 En la figura se muestra una barra delgada de longitud l unida a un collarín en B y apoyada sobre una porción del cilindro circular de radio r. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine el valor de θ que corresponde a la posición de equilibrio del mecanismo cuando $l = 15$ in., $r = 4.5$ in., $P = 15$ lb y $Q = 30$ lb.

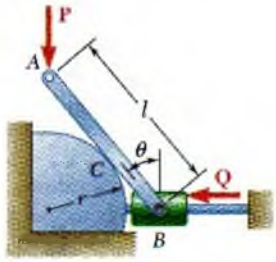


Figura P10.25 y *P10.26*

10.26 En la figura se muestra una barra delgada de longitud l unida a un collarín en B y apoyada sobre una porción del cilindro circular de radio r. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine el valor de θ que corresponde a la posición de equilibrio del mecanismo cuando $l = 14$ in., $r = 5$ in., $P = 75$ lb y $Q = 150$ lb.

10.27 En el problema 10.12, considere que $a = 42$ in., $b = 28$ in. y $W = 160$ lb, determine la tensión T presente en el cable AE cuando la puerta esté sostenida en la posición para la cual $BD = 42$ in.

10.28 En la figura se muestra una barra delgada AB unida al collarín A y apoyada sobre una pequeña rueda en C. Sin tomar en cuenta el radio de la rueda ni el efecto de la fricción, determine el valor de θ que corresponde a la posición de equilibrio del mecanismo cuando $P = 75$ N y $Q = 135$ N.

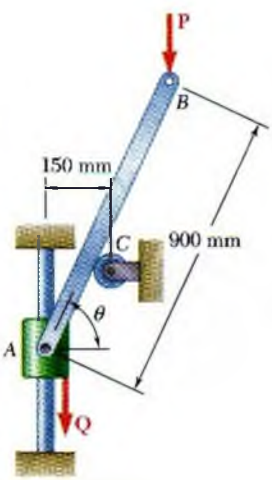


Figura P10.28

10.29 Una fuerza **P** se aplica a la resbaladera C, como indica la figura. La constante del resorte es de 1.6 kN/m, y el resorte se encuentra sin estirar cuando el elemento BD está en posición horizontal. Sin tomar en cuenta la fricción entre la resbaladera y la barra guía, y sabiendo que $BC = BD = 150$ mm, determine la magnitud de **P** para la cual $\theta = 25°$ cuando el sistema está en equilibrio.

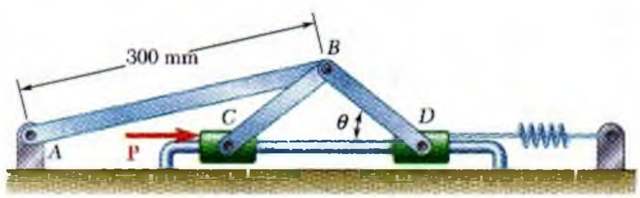


Figura P10.29

10.30 En la figura se muestran dos barras AD y DG, las cuales se conectan entre sí mediante un perno colocado en D y un resorte en AG. Si el resorte tiene longitud de 300 mm cuando se encuentra sin estirar y su constante es de 5 kN/m, determine el valor de x que corresponde al equilibrio cuando se aplica una carga de 900 N en E.

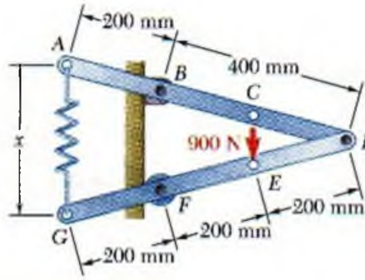


Figura *P10.30*

10.31 Resuelva el problema 10.30, suponiendo que la carga de 900 N se aplica en C en vez de en E.

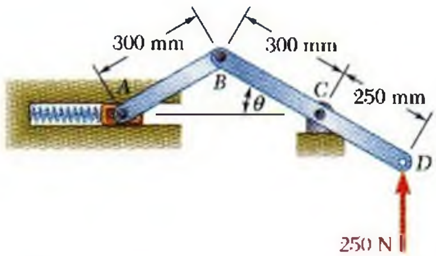


Figura *P10.32*

10.32 En el mecanismo que muestra la figura, el bloque A puede moverse libremente en su guía y se apoya sobre un resorte cuya constante es igual a 2.5 kN/m, el cual se encuentra sin deformar cuando $\theta = 45°$. Para la carga mostrada, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio.

10.33 Una fuerza vertical **P** de 150 lb de magnitud se aplica en el punto B del mecanismo que muestra la figura. El resorte, cuya constante es igual a 12.5 lb/in., se encuentra sin estirar cuando AB y BC están en posición horizontal. Sin tomar en cuenta el peso del mecanismo, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio.

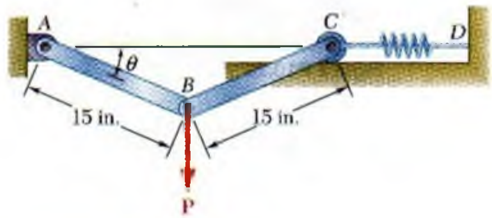


Figura P10.33 y P10.34

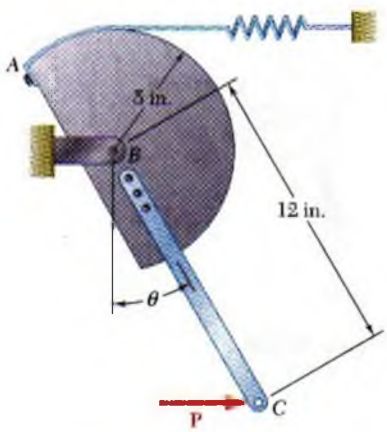


Figura P10.35

10.34 Una fuerza vertical **P** se aplica en el punto B del mecanismo que muestra la figura. La constante del resorte es de 12.5 lb/in., y éste se encuentra sin estirar cuando AB y BC están en posición horizontal. Sin tomar en cuenta el peso del mecanismo, determine la magnitud de **P** para la cual $\theta = 25°$ cuando el mecanismo esté en su posición de equilibrio.

10.35 Una fuerza horizontal **P** de 40 lb de magnitud se aplica en el punto C del mecanismo que muestra la figura. El resorte es de constante $k = 9$ lb/in., y se encuentra sin estirar cuando $\theta = 0$. Sin tomar en cuenta el peso del mecanismo, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio.

***10.36* y 10.37** Si la constante del resorte CD mostrado en cada figura es k y éste se encuentra sin estirar cuando $\theta = 0$, determine el valor de θ, donde $0 \leq \theta \leq 90°$, correspondiente a la posición de equilibrio del sistema para los datos indicados.

10.36 $P = 150$ lb, $l = 30$ in., $k = 40$ lb/in.

10.37 $P = 600$ N, $l = 800$ mm, $k = 4$ kN/m

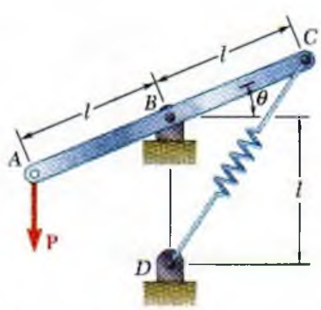


Figura *P10.36*

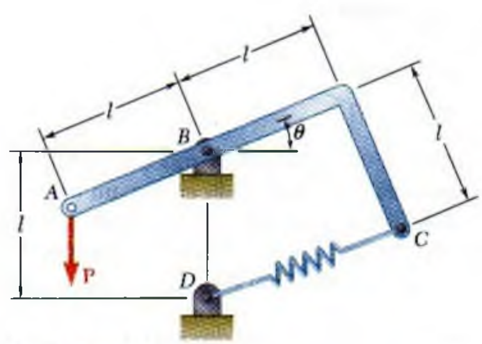


Figura P10.37

10.38 Una cuerda se enrolla alrededor del tambor A, el cual está conectado al elemento AB como indica la figura. El bloque D, unido al eslabón CD, se puede mover libremente en su guía. Sin tomar en cuenta la masa de AB, y sabiendo que el resorte tiene constante de 800 N/m y se encuentra sin deformar cuando $\theta = 0$, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando se aplica una fuerza descendente **P**, de 480 N de magnitud, en el extremo de la cuerda.

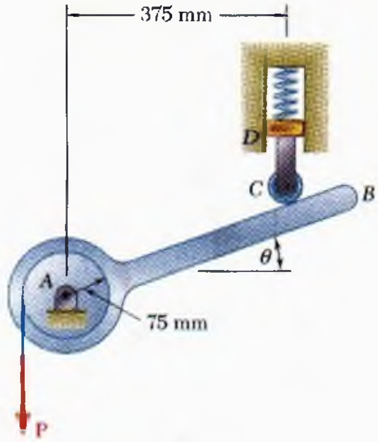


Figura P10.38

10.39 La palanca AB mostrada en la figura está unida al eje horizontal BC que pasa a través del cojinete y está soldado sobre el apoyo fijo localizado en C. La constante torsional del resorte del eje BC es K; esto es, se requiere un par de magnitud K para rotar en 1 radián el extremo B del eje. Si el eje no está sometido a torsión cuando la palanca AB tiene posición horizontal, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio si $P = 2$ kN, $l = 250$ mm y $K = 225$ N · m/rad.

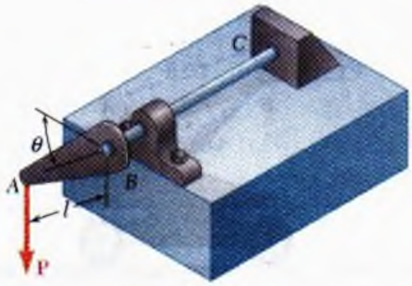


Figura P10.39

10.40 Resuelva el problema 10.39, suponiendo que $P = 6.3$ kN, $l = 250$ mm y $K = 225$ N · m/rad. Obtenga respuestas en cada uno de los siguientes cuadrantes: $0 < \theta < 90°$, $270° < \theta < 360°$ y $360° < \theta < 450°$.

10.41 La posición de la manivela BCD se controla por medio del cilindro hidráulico AB como indica la figura. Para la carga mostrada, determine la fuerza ejercida por el cilindro hidráulico sobre el pasador B cuando $\theta = 60°$.

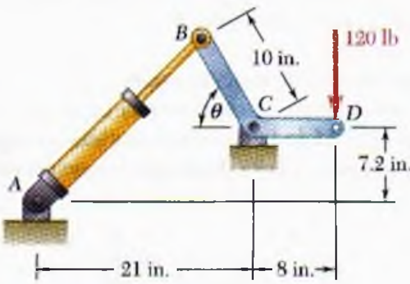


Figura P10.41 y *P10.42*

10.42 La posición de la manivela BCD se controla por medio del cilindro hidráulico AB como indica la figura. Sabiendo que en la posición mostrada el cilindro hidráulico ejerce una fuerza de 105 lb sobre el pasador B, determine el valor del ángulo θ.

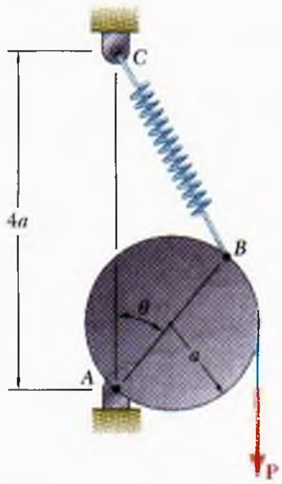


Figura P10.43

10.43 Una cuerda se enrolla alrededor de un tambor de radio a, el cual está atornillado en A como indica la figura. El resorte, cuya constante es igual a 15 lb/in., se encuentra sin estirar cuando $\theta = 0$. Si $a = 7.5$ in. y sin tomar en cuenta el peso del tambor, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando se aplica una fuerza descendente **P**, de 12 lb de magnitud, en el extremo de la cuerda.

10.44 Para el mecanismo que muestra la figura, determine la fuerza **P** requerida para mantener el equilibrio cuando $M = 320$ lb · in.

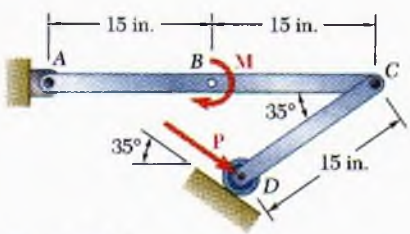


Figura *P10.44*

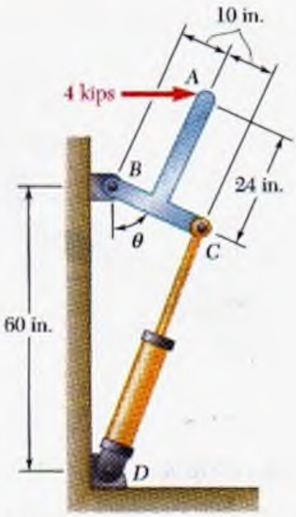


Figura P10.45

10.45 La posición del elemento ABC se controla mediante un cilindro hidráulico CD. Para la carga mostrada, determine la fuerza que ejerce el cilindro sobre el perno C cuando $\theta = 60°$.

10.46 El brazo de extensión telescópica ABC es utilizado para levantar una plataforma con trabajadores de la construcción. El peso conjunto de los trabajadores y la plataforma es de 500 lb, y su centro de gravedad combinado se localiza directamente por encima de C. Para la posición en que $\theta = 20°$, determine la fuerza ejercida sobre el pasador B por el cilindro hidráulico único BD.

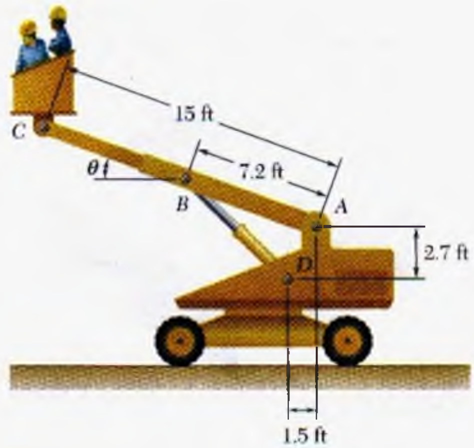


Figura *P10.46*

10.47 Un bloque de peso W se jala mediante una fuerza **P** dirigida hacia arriba de un plano inclinado a un ángulo α respecto a la horizontal. Si μ es el coeficiente de fricción entre el bloque y el plano, encuentre una expresión para la eficiencia mecánica del sistema. También, demuestre que la eficiencia mecánica no puede ser mayor a $\frac{1}{2}$ si se desea que el bloque permanezca en su lugar al retirar la fuerza **P**.

10.48 Si el coeficiente de fricción estática entre el collarín C y la barra vertical se denota mediante μ_s, encuentre una expresión para determinar la magnitud máxima del par **M** con el cual se mantiene el equilibrio del sistema en la posición mostrada en la figura. Explique lo que sucedería si $\mu_s \geq \tan\theta$.

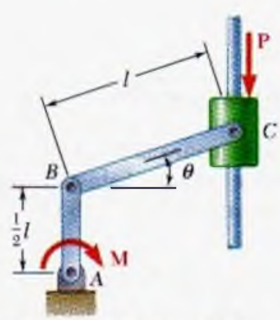


Figura P10.48 y P10.49

10.49 Si el coeficiente de fricción estática entre el collarín C y la barra vertical es de 0.30, determine las magnitudes máxima y mínima del par **M** necesario para mantener al sistema equilibrado en la posición que muestra la figura cuando $\theta = 35°$, $l = 500$ mm y $P = 400$ N.

10.50 Si el coeficiente de fricción estática entre el bloque unido a la barra ACE y la superficie horizontal que muestra la figura se denota mediante μ_s, encuentre expresiones en términos de P, μ_s y θ para determinar las magnitudes máxima y mínima de la fuerza **Q** requerida para mantener al sistema en equilibrio.

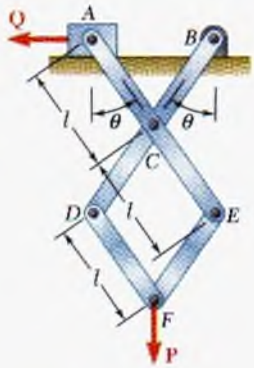


Figura P10.50 y P10.51

10.51 Si el coeficiente de fricción estática entre el bloque unido a la barra ACE y la superficie horizontal que muestra la figura es de 0.15, determine las magnitudes máxima y mínima de la fuerza **Q** requerida a fin de que el sistema se mantenga en equilibrio cuando $\theta = 30°$, $l = 200$ mm y $P = 40$ N.

10.52 Encuentre una expresión para determinar la eficiencia mecánica del gato analizado en la sección 8.6. Demuestre que si el gato debe ser autobloqueante, la eficiencia mecánica no puede exceder de $\frac{1}{2}$.

10.53 Utilice el método del trabajo virtual y determine por separado la fuerza y el par que representan la reacción en el apoyo A de la viga mostrada en la figura.

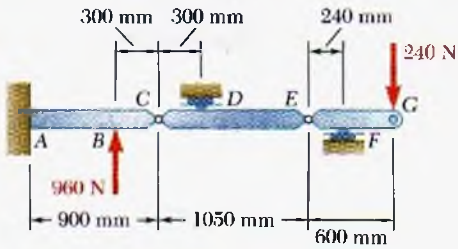


Figura *P10.53* y *P10.54*

10.54 Utilice el método del trabajo virtual y determine la reacción en el punto D de la viga que muestra la figura.

10.55 En referencia al problema 10.41, y con el valor encontrado para la fuerza ejercida por el cilindro hidráulico AB, determine el cambio requerido en la longitud de AB para elevar en 1.2 in. la carga de 120 lb.

10.56 En referencia al problema 10.46, y con el valor encontrado para la fuerza ejercida por el cilindro hidráulico BD, determine el cambio requerido en la longitud de BD para elevar en 2.5 in. la plataforma que se une en C.

10.57 Para la armadura mostrada en la figura, determine el movimiento vertical del nudo C si la longitud del elemento FG se incrementa en 30 mm. (*Sugerencia:* Aplique una carga vertical en el nudo C y, empleando los métodos del capítulo 6, determine la fuerza ejercida por el elemento FG sobre los nudos F y G. Después, aplique el método del trabajo virtual para un desplazamiento virtual equivalente al incremento en la longitud del elemento FG. Este método debe usarse únicamente cuando se tienen cambios pequeños en la longitud de los elementos.)

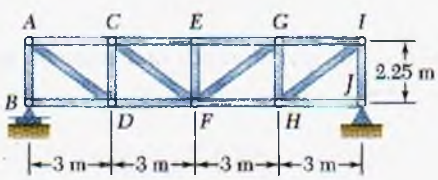


Figura P10.57 y P10.58

10.58 Para la armadura que muestra la figura, determine el movimiento horizontal del nudo C cuando la longitud del elemento FG se incrementa en 30 mm. (Vea la sugerencia del problema 10.57.)

*10.6. TRABAJO DE UNA FUERZA DURANTE UN DESPLAZAMIENTO FINITO

Considere una fuerza **F** que actúa sobre una partícula. El trabajo de **F** correspondiente a un desplazamiento infinitesimal $d\mathbf{r}$ de la partícula se definió en la sección 10.2 como

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \qquad (10.1)$$

El trabajo de **F** correspondiente a un desplazamiento finito de la partícula desde A_1 hasta A_2 (figura 10.10*a*) se denota con $U_{1\rightarrow 2}$ y se obtiene integrando la ecuación (10.1) a lo largo de la curva que sigue la partícula:

$$U_{1\rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \qquad (10.11)$$

Con la expresión alternativa

$$dU = F\,ds \cos\alpha \qquad (10.1')$$

dada en la sección 10.2 para el trabajo elemental dU, también es posible expresar el trabajo $U_{1\rightarrow 2}$ como

$$U_{1\rightarrow 2} = \int_{s_1}^{s_2} (F\cos\alpha)\,ds \qquad (10.11')$$

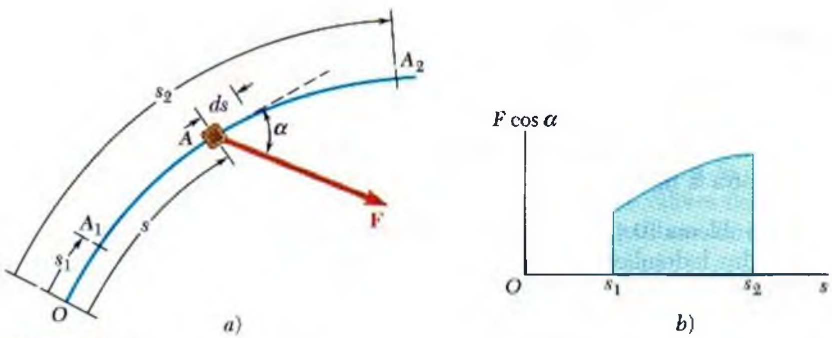


Figura 10.10

donde la variable de integración s mide la distancia recorrida por la partícula a lo largo de su trayectoria. También el trabajo $U_{1\rightarrow 2}$ está representado por el área bajo la curva que se obtiene al graficar $F \cos\alpha$ contra s (figura 10.10*b*). En el caso de que la magnitud de la fuerza **F** que actúa en dirección del movimiento es constante, entonces de la fórmula (10.11′) se obtiene que $U_{1\rightarrow 2} = F(s_2 - s_1)$.

Si se recuerda la sección 10.2, el trabajo de un par de momento **M** que se genera durante una rotación infinitesimal $d\theta$ de un cuerpo rígido es

$$dU = M\,d\theta \qquad (10.2)$$

entonces el trabajo de un par durante una rotación finita del cuerpo puede expresarse como:

$$U_{1\rightarrow 2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\,d\theta \qquad (10.12)$$

En el caso de un par de magnitud constante, de la fórmula (10.12) se obtiene:

$$U_{1\rightarrow 2} = M(\theta_2 - \theta_1)$$

Trabajo de un peso. En la sección 10.2 se estableció que el trabajo de un peso **W** de un cuerpo durante un desplazamiento infinitesimal de éste es igual al producto de W y el desplazamiento vertical del centro de gravedad del cuerpo. Si el eje y se dirige hacia arriba, entonces el trabajo de **W** realizado durante un desplazamiento finito del cuerpo (figura 10.11) se obtiene escribiendo

$$dU = -W\,dy$$

Integrando desde A_1 hasta A_2, se tiene

$$U_{1\to 2} = -\int_{y_1}^{y_2} W\,dy = Wy_1 - Wy_2 \tag{10.13}$$

o

$$U_{1\to 2} = -W(y_2 - y_1) = -W\,\Delta y \tag{10.13'}$$

donde Δy representa el desplazamiento vertical desde A_1 hasta A_2. Por tanto, el trabajo del peso **W** es igual *al producto de W y el desplazamiento vertical del centro de gravedad del cuerpo*. Note que el trabajo es *positivo* cuando $\Delta y < 0$, esto es, *cuando el cuerpo se mueve hacia abajo*.

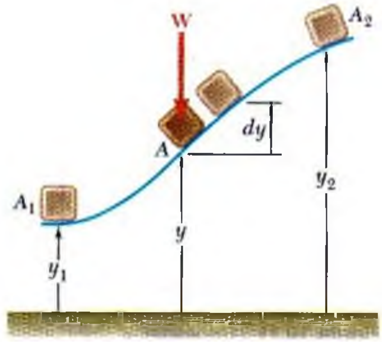


Figura 10.11

Trabajo de la fuerza ejercida por un resorte. Considere un cuerpo A unido a un punto fijo B por medio de un resorte; se supone que el resorte está sin estirar cuando el cuerpo está en A_0 (figura 10.12*a*). La evidencia experimental muestra que la magnitud de la fuerza **F** ejercida por el resorte sobre el cuerpo A es directamente proporcional a la deflexión x del resorte, medida a partir de la posición A_0. Esto es:

$$F = kx \tag{10.14}$$

donde k es la *constante del resorte* expresada en N/m si se usan unidades del SI y en lb/ft o lb/in. si se utilizan las unidades de uso común en Estados Unidos. El trabajo de la fuerza **F** ejercida por el resorte durante un desplazamiento finito del cuerpo desde $A_1(x = x_1)$ hasta $A_2(x = x_2)$ se obtiene escribiendo

$$dU = -F\,dx = -kx\,dx$$

$$U_{1\to 2} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = \tfrac{1}{2}kx_1^2 - \tfrac{1}{2}kx_2^2 \tag{10.15}$$

Se debe tener cuidado de expresar a k y x en unidades consistentes. Por ejemplo, si se emplean las unidades de uso común en Estados Unidos, entonces k debe expresarse en lb/ft y x en pies o k en lb/in. y x en pulgadas; en el primer caso, el trabajo se obtiene en ft · lb y en el segundo en in. · lb. Además, note que el trabajo de la fuerza **F** ejercida por el resorte sobre el cuerpo es *positivo* cuando $x_2 < x_1$, esto es, *cuando el resorte está regresando a su posición sin estirar*.

Como la ecuación (10.14) representa la ecuación de una línea recta que pasa por el origen con una pendiente k, el trabajo $U_{1\to 2}$ de **F** durante el desplazamiento desde A_1 hasta A_2 se puede obtener al evaluar el área bajo la curva del trapezoide mostrado en la figura 10.12*b*. Esto puede hacerse al calcular los valores de F_1 y F_2 y multiplicando la base Δx del trapezoide por su altura media $\tfrac{1}{2}(F_1 + F_2)$. Como el trabajo de la fuerza **F** ejercida por el resorte es positivo para un valor negativo de Δx entonces, se puede escribir

$$U_{1\to 2} = -\tfrac{1}{2}(F_1 + F_2)\,\Delta x \tag{10.16}$$

La fórmula (10.16) es usualmente más útil que la fórmula (10.15), debido a que en ésta se reducen las posibilidades de confundir las unidades involucradas.

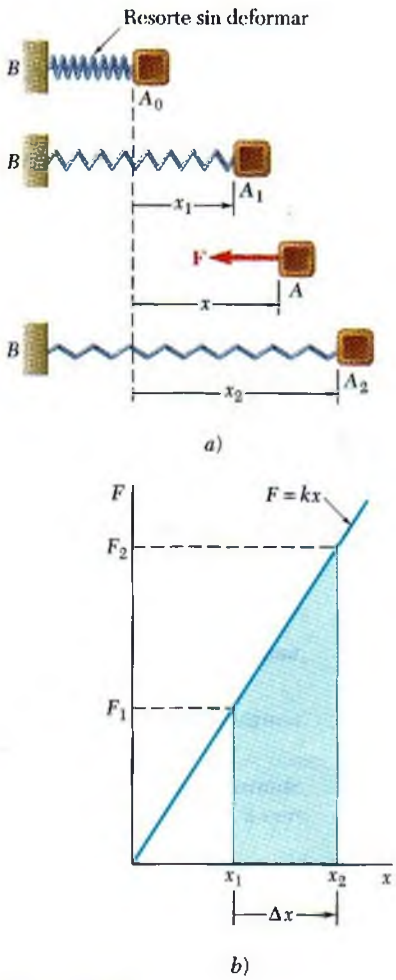


Figura 10.12

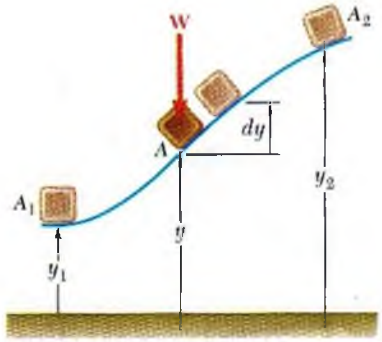


Figura 10.11 (*repetida*)

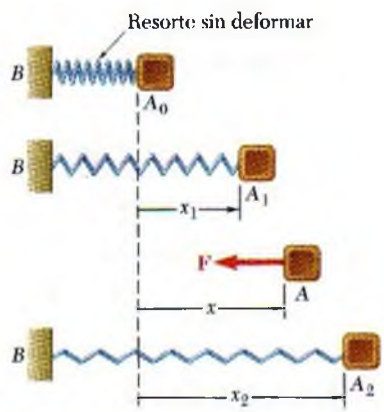


Figura 10.12a (*repetida*)

*10.7. ENERGÍA POTENCIAL

Considere otra vez el cuerpo de la figura 10. 11, en donde se observa con base en la ecuación (10.13) que el trabajo del peso **W** durante un desplazamiento finito se obtiene al restar el valor de la función Wy correspondiente a la segunda posición del cuerpo de su valor correspondiente a la primera posición. Por tanto, el trabajo de **W** es independiente de la trayectoria que se siga; esto es, sólo depende de los valores iniciales y finales de la función Wy. A esta función se le llama *energía potencial* del cuerpo con respecto a la fuerza de gravedad **W** y se le representa con V_g. Por tanto, se escribe

$$U_{1\to2} = (V_g)_1 - (V_g)_2 \qquad \text{con } V_g = Wy \qquad (10.17)$$

Note que si $(V_g)_2 > (V_g)_1$, esto es, *si la energía potencial se incrementa* durante el desplazamiento (como sucede en el caso considerado aquí), *el trabajo* $U_{1\to2}$ *es negativo*. Por otra parte, si el trabajo de **W** es positivo, la energía potencial disminuye. Por tanto, la energía potencial V_g del cuerpo proporciona una medida del *trabajo que puede ser realizado* por su peso **W**. Como en la fórmula (10.17) sólo se involucran los *cambios* en la energía potencial y no el valor real de V_g, entonces se puede agregar una constante arbitraria a la expresión obtenida para V_g. En otras palabras, el nivel de referencia a partir del cual se mide la elevación y se puede seleccionar arbitrariamente. Nótese que la energía potencial está expresada en las mismas unidades que el trabajo, es decir, en joules (J) si se usan unidades del SI[†] y en ft · lb o en in. · lb si se utilizan las unidades de uso común en Estados Unidos.

Considere ahora el cuerpo mostrado en la figura 10.12*a*; se nota con base en la ecuación (10.15) que el trabajo de la fuerza elástica **F** se obtiene al restar el valor de la función $\frac{1}{2}kx^2$ correspondiente a la segunda posición del cuerpo del valor correspondiente a la primera posición del mismo. Esta función se representa con V_e y se le llama *energía potencial* del cuerpo con respecto a la *fuerza elástica* **F**. Por tanto, se escribe

$$U_{1\to2} = (V_e)_1 - (V_e)_2 \qquad \text{con } V_e = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad (10.18)$$

y se observa que durante el desplazamiento considerado, el trabajo de la fuerza **F** ejercida por el resorte sobre el cuerpo es negativo y por tanto la energía potencial V_e se incrementa. Note que la expresión que se obtuvo para V_e es válida sólo si la elongación del resorte se mide a partir de la posición sin deformar del mismo.

El concepto de energía potencial se puede extender a otros tipos de fuerzas diferentes a las gravitatorias y elásticas aquí consideradas. Éste sigue siendo válido mientras el trabajo elemental dU de las fuerzas bajo consideración sea una *diferencial exacta*. Por tanto, es posible encontrar una función V, llamada energía potencial, tal que

$$dU = -dV \qquad (10.19)$$

Integrando la ecuación (10.19) sobre un desplazamiento finito, se obtiene la fórmula general

$$U_{1\to2} = V_1 - V_2 \qquad (10.20)$$

la cual expresa que el *trabajo de la fuerza es independiente de la trayectoria seguida y es igual al valor negativo del cambio en energía potencial*. Una fuerza que satisface la ecuación (10.20) se dice que es una *fuerza conservativa*.[‡]

[†] Véase la nota al pie de la página 561 de este capítulo.

[‡] En la sección 13.7 de *Dinámica* se presenta una exposición detallada de las fuerzas conservativas.

*10.8. ENERGÍA POTENCIAL Y EQUILIBRIO

La aplicación del principio del trabajo virtual se simplifica en forma considerable cuando se conoce la energía potencial del sistema. En el caso de un desplazamiento virtual, la fórmula (10.19) se transforma en $\delta U = -\delta V$. Además, si la posición del sistema está definida por una sola variable independiente θ, entonces se puede escribir que $\delta V = (dV/d\theta)\ \delta\theta$. Como $\delta\theta$ debe ser diferente a cero, la condición $\delta U = 0$ para que el sistema se conserve en equilibrio ahora se transforma en

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \qquad (10.21)$$

Por tanto, en términos de la energía potencial, el principio del trabajo virtual establece que *si un sistema está en equilibrio, la derivada de su energía potencial total es cero*. Si la posición del sistema depende de diversas variables independientes (esto es, si el sistema *tiene varios grados de libertad*), las derivadas parciales de V con respecto a cada una de las variables independientes debe ser cero.

Por ejemplo, considere una estructura hecha de dos elementos AC y CB que sostiene una carga W en C. La estructura se sostiene mediante un perno en A y un rodillo en B y un resorte BD une B al punto fijo D (figura 10.13*a*). El resorte tiene una constante k y se supone que su longitud natural es igual a AD y, por tanto, el resorte está sin estirar cuando B coincide con A. Sin tomar en cuenta las fuerzas de fricción y el peso de los elementos, se encuentra que las únicas fuerzas que realizan trabajo durante un desplazamiento de la armadura son el peso **W** y la fuerza **F** ejercida por el resorte en el punto B (figura 10.13*b*). De esta manera, la energía potencial total del sistema se obtiene al sumar la energía potencial V_g correspondiente a la fuerza de gravedad **W** y la energía potencial V_e correspondiente a la fuerza elástica **F**.

Al seleccionar un sistema de ejes coordenados con origen en A y observar que la elongación del resorte medida a partir de su posición sin estirar es $AB = x_B$, se escribe

$$V_e = \tfrac{1}{2}kx_B^2 \qquad V_g = Wy_C$$

Expresando las coordenadas x_B y y_C en términos del ángulo θ, se tiene

$$x_B = 2l \text{ sen } \theta \qquad y_C = l \cos \theta$$
$$V_e = \tfrac{1}{2}k(2l \text{ sen } \theta)^2 \qquad V_g = W(l \cos \theta)$$
$$V = V_e + V_g = 2kl^2 \text{ sen}^2 \theta + Wl \cos \theta \qquad (10.22)$$

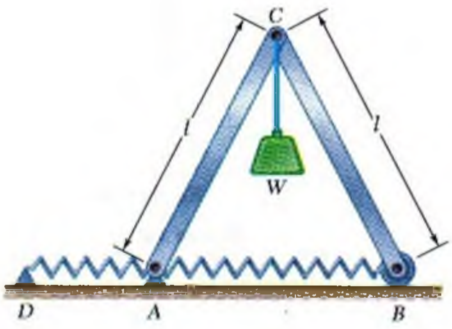
Las posiciones de equilibrio del sistema se obtienen igualando a cero la derivada de la energía potencial V. Por tanto, se escribe

$$\frac{dV}{d\theta} = 4kl^2 \text{ sen } \theta \cos \theta - Wl \text{ sen } \theta = 0$$

o bien, factorizando l sen θ,

$$\frac{dV}{d\theta} = l \text{ sen } \theta(4kl \cos \theta - W) = 0$$

Así, hay dos posiciones de equilibrio que corresponden, respectivamente, a los valores de $\theta = 0$ y $\theta = \cos^{-1}(W/4kl)$.†



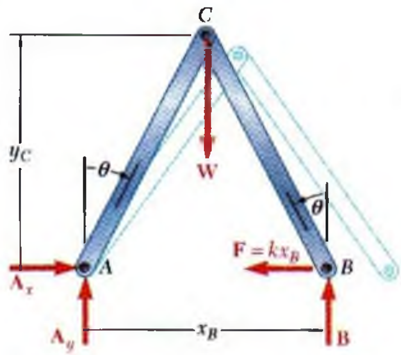
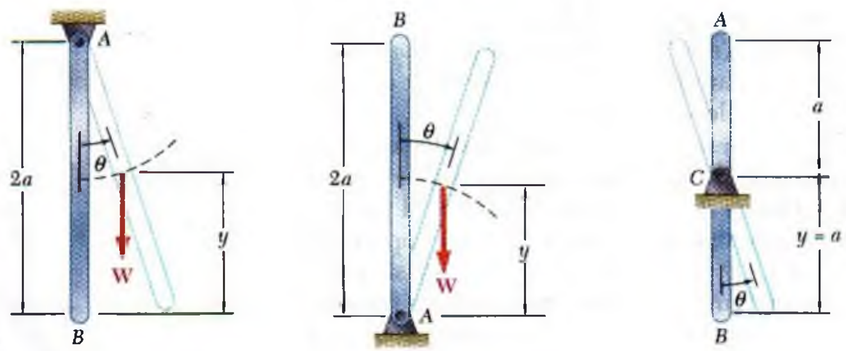


Figura 10.13

†La segunda posición no existe si $W > 4kl$.

*10.9. ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO

Considere las tres barras uniformes de longitud $2a$ y peso **W** mostradas en la figura 10.14. Aunque cada una de ellas está en equilibrio, existe una diferencia importante entre estos tres casos. Suponga que se perturba ligeramente la posición de equilibrio de cada una de estas barras y después se les deja libres: la barra *a* regresará a su posición original, la barra *b* se mantendrá alejándose cada vez más de su posición inicial mientras que la barra *c* permanecerá en su nueva posición. En el caso *a* se dice que el equilibrio de la barra es *estable*; en el caso *b* que es *inestable*, mientras que en el caso *c* es *neutro*.



a) Equilibrio estable *b*) Equilibrio inestable *c*) Equilibrio neutro

Figura 10.14

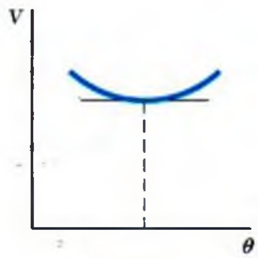
Recuerde de la sección 10.7 que la energía potencial V_g con respecto a la gravedad es Wy, en donde y es la elevación del punto de aplicación de **W** medida a partir de un nivel arbitrario de referencia, se puede observar que la energía potencial de la barra de la figura 10.14*a* es mínima en la posición de equilibrio considerada mientras que en el caso de la barra de la figura 10.14*b* la energía potencial es máxima. En cambio, en la barra de la figura 10.14*c* la energía potencial permanece constante. Por tanto, el equilibrio es *estable*, *inestable* o *neutro*, lo cual depende de si la energía potencial tiene un valor *mínimo*, *máximo* o *constante* (figura 10.15).

Como el resultado anterior es muy general, se le puede ver de la siguiente manera: primero, se puede observar que una fuerza siempre tiende a realizar trabajo positivo y por tanto, reduce la energía potencial del sistema al cual se aplica. Entonces, cuando un sistema es perturbado de su posición de equilibrio, las fuerzas que actúan sobre él tienden a restaurarlo a su posición original si V es mínima (figura 10.15*a*) o tiende a moverlo lejos de dicha posición si V es máxima (figura 10.5*b*). Pero si V es constante (figura 10.15*c*), entonces las fuerzas no tienden a mover al sistema en ninguna forma posible.

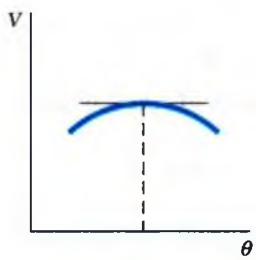
Recuerde del cálculo diferencial que una función es mínima o máxima dependiendo de que su segunda derivada sea positiva o negativa; en resumen, se puede decir que las condiciones de equilibrio para un sistema con un grado de libertad (es decir, la posición del sis-

tema queda definida en todo instante por una sola variable independiente θ) son las siguientes:

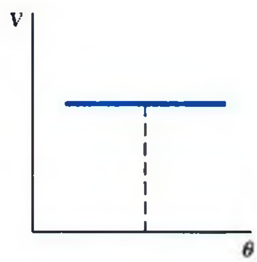
$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \qquad \frac{d^2V}{d\theta^2} > 0\text{: equilibrio estable}$$
$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \qquad \frac{d^2V}{d\theta^2} < 0\text{: equilibrio inestable} \tag{10.23}$$



a) Equilibrio estable



b) Equilibrio inestable



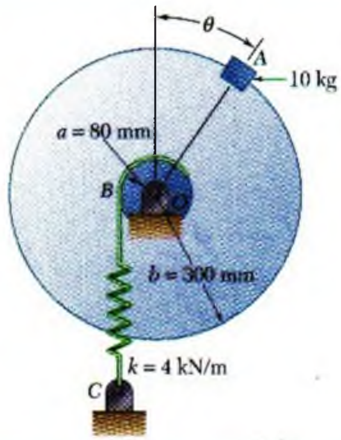
c) Equilibrio neutro

Figura 10.15

Si la primera y la segunda derivadas de V son cero, será necesario analizar las derivadas de orden superior para determinar si el equilibrio es estable, inestable o neutro. El equilibrio es neutro si todas las derivadas son cero, puesto que en este caso la energía potencial V es constante. El equilibrio es estable si la primera derivada que se tiene un valor diferente de cero es de orden par y positiva. En todos los demás casos, el equilibrio es inestable.

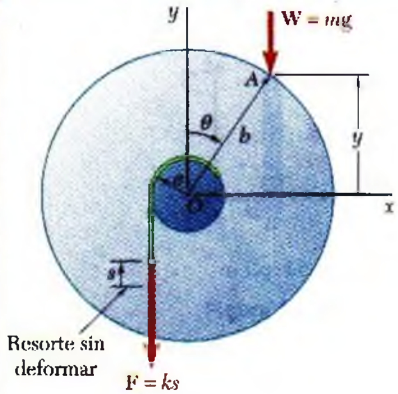
Si el sistema en estudio tiene *varios grados de libertad*, entonces la energía potencial V depende de diversas variables, por esta razón es necesario recurrir a la aplicación de la teoría para este tipo de funciones y determinar si V es mínima. Se puede demostrar que un sistema con 2 grados de libertad es estable y que la energía potencial correspondiente $V(\theta_1, \theta_2)$ es mínima siempre y cuando se cumplan de manera simultánea las siguientes relaciones:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = \frac{\partial V}{\partial \theta_2} = 0$$
$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1\, \partial \theta_2}\right)^2 - \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} < 0 \tag{10.24}$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2} > 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} > 0$$



PROBLEMA RESUELTO 10.4

Un bloque de 10 kg se fija al borde de un disco de 300 mm de radio, como se muestra en la figura. Si se sabe que el resorte *BC* está sin estirar cuando $\theta = 0$, determine la posición o posiciones de equilibrio del sistema y establezca, en cada caso, si el equilibrio es estable, inestable o neutro.



SOLUCIÓN

Energía potencial. Represente con s la elongación del resorte, medida a partir de su posición sin deformar y ubique el origen de un sistema de coordenadas en O, se obtendrá

$$V_e = \tfrac{1}{2}ks^2 \qquad V_g = Wy = mgy$$

Midiendo θ en radianes, se tiene

$$s = a\theta \qquad y = b\cos\theta$$

Al sustituir los valores de s y y en las expresiones de V_e y V_g se escribe

$$V_e = \tfrac{1}{2}ka^2\theta^2 \qquad V_g = mgb\cos\theta$$
$$V = V_e + V_g = \tfrac{1}{2}ka^2\theta^2 + mgb\cos\theta$$

Posiciones de equilibrio. Si se establece $dV/d\theta = 0$, se escribe

$$\frac{dV}{d\theta} = ka^2\theta - mgb\,\text{sen}\,\theta = 0$$
$$\text{sen}\,\theta = \frac{ka^2}{mgb}\theta$$

Sustituya $a = 0.08$ m, $b = 0.3$ m, $k = 4$ kN/m y $m = 10$ kg, se obtiene

$$\text{sen}\,\theta = \frac{(4\text{ kN/m})(0.08\text{ m})^2}{(10\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2)(0.3\text{ m})}\theta$$
$$\text{sen}\,\theta = 0.8699\,\theta$$

donde θ está expresada en radianes. Si busca numéricamente el valor de θ, se encuentra

$$\theta = 0 \quad \text{y} \quad \theta = 0.902\text{ rad}$$
$$\theta = 0 \quad \text{y} \quad \theta = 51.7° \quad ◀$$

Estabilidad del equilibrio. La segunda derivada de la energía potencial V con respecto a θ es

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = ka^2 - mgb\cos\theta$$
$$= (4\text{ kN/m})(0.08\text{ m})^2 - (10\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2)(0.3\text{ m})\cos\theta$$
$$= 25.6 - 29.43\cos\theta$$

Para $\theta = 0$: $\quad \dfrac{d^2V}{d\theta^2} = 25.6 - 29.43\cos 0 = -3.83 < 0$

El equilibrio es inestable para $\theta = 0$ ◀

Para $\theta = 51.7°$: $\quad \dfrac{d^2V}{d\theta^2} = 25.6 - 29.43\cos 51.7° = +7.36 > 0$

El equilibrio es estable para $\theta = 51.7°$ ◀

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se definió el *trabajo que realiza una fuerza durante un desplazamiento finito* y la *energía potencial* de un cuerpo rígido o un sistema de cuerpos rígidos. Se aprendió cómo utilizar el concepto de energía potencial para determinar la *posición de equilibrio* de un cuerpo rígido o sistema de cuerpos rígidos.

1. *La energía potencial V de un sistema* es la suma de energías potenciales asociadas con las diversas fuerzas que actúan sobre el mismo y que *realizan trabajo* conforme dicho sistema se mueve. En los problemas de esta sección se deberá determinar lo siguiente:

a) La energía potencial de un peso. Ésta es la energía potencial debida a la *gravedad*, $V_g = Wy$, donde y es la elevación del peso W medida desde un nivel arbitrario de referencia. Note que la energía potencial V_g puede usarse con cualquier fuerza vertical **P** de magnitud constante y dirigida hacia abajo; por tanto, se escribe que $V_g = Py$.

b) Energía potencial de un resorte. Ésta es la energía potencial $V_e = \frac{1}{2}kx^2$, debida a las fuerzas *elásticas* ejercidas por un resorte, en donde k es la constante del resorte y x es la deformación del resorte *medida desde su posición sin estirar*.

Las reacciones en apoyos fijos, las fuerzas internas en las uniones, las fuerzas ejercidas por cables y cuerdas inextensibles y otras fuerzas que no realizan trabajo no hacen ninguna contribución a la energía potencial del sistema.

2. *Se deben expresar todas las distancias y los ángulos en términos de una sola variable,* como el ángulo θ, cuando se esté calculando la energía potencial V del sistema. Esto es necesario porque para poder determinar la posición de equilibrio del sistema se requiere calcular la derivada $dV/d\theta$.

3. *Cuando un sistema está en equilibrio, la primera derivada de la energía potencial es cero.* Por tanto:

a) Para determinar la posición de equilibrio de un sistema, después de que la energía potencial V haya sido expresada en función de una sola variable θ, se debe calcular su derivada y después resolver la ecuación resultante $dV/d\theta = 0$ para determinar el valor de θ.

b) Para determinar la fuerza o par requerido para mantener al sistema en una posición dada de equilibrio, se debe sustituir el valor conocido de θ en la ecuación de $dV/d\theta = 0$ y obtener la solución de ésta para poder determinar los valores deseados de fuerza o par.

4. *Estabilidad del equilibrio.* Por lo general se deben aplicar las siguientes reglas:

a) El equilibrio estable ocurre cuando la energía potencial del sistema es *mínima*, esto es, cuando $dV/d\theta = 0$ y $d^2V/d\theta^2 > 0$ (figuras 10.14*a* y 10.15*a*).

b) El equilibrio inestable ocurre cuando la energía potencial del sistema es *máxima*, esto es, cuando $dV/d\theta = 0$ y $d^2V/d\theta^2 < 0$ (figuras 10.14*b* y 10.15*b*).

c) El equilibrio neutro ocurre cuando la energía potencial del sistema es *constante*, por tanto, $dV/d\theta$, $dV^2/d\theta^2$, así como todas las derivadas sucesivas de V son iguales a cero (figuras 10.14*c* y 10.15*c*).

Véase la página 585 para una exposición del caso cuando se tiene $dV/d\theta$ y $dV^2/d\theta^2$, pero *no todas* las derivadas sucesivas de V son iguales a cero.

Problemas

10.59 Use el método de la sección 10.8 para resolver el problema 10.30.

10.60 Use el método de la sección 10.8 para resolver el problema 10.31.

10.61 Use el método de la sección 10.8 para resolver el problema 10.32.

10.62 Use el método de la sección 10.8 para resolver el problema 10.33.

10.63 Use el método de la sección 10.8 para resolver el problema 10.34.

10.64 Use el método de la sección 10.8 para resolver el problema 10.36.

10.65 Use el método de la sección 10.8 para resolver el problema 10.37.

10.66 Use el método de la sección 10.8 para resolver el problema 10.38.

10.67 Demuestre que en el problema 10.1 el equilibrio es neutro.

10.68 Demuestre que en el problema 10.2 el equilibrio es neutro.

10.69 Dos barras uniformes, cada una de masa m, están unidas a los engranes de radio idéntico mostrados en la figura. Determine las posiciones de equilibrio del sistema, y establezca en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

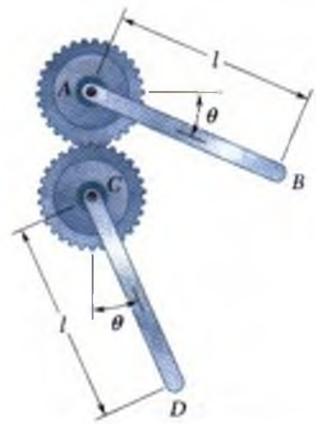


Figura P10.69 y P10.70

10.70 Dos barras uniformes, AB y CD, están unidas a los engranes de radio idéntico mostrados en la figura. Si $m_{AB} = 300$ g y $m_{CD} = 500$ g, determine las posiciones de equilibrio del sistema, y establezca en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

10.71 Dos barras uniformes idénticas, cada una de peso W y longitud L, están unidas a las poleas que se conectan por medio de una banda como indica la figura. Si no existe deslizamiento entre la banda y las poleas, determine las posiciones de equilibrio del sistema, y establezca en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

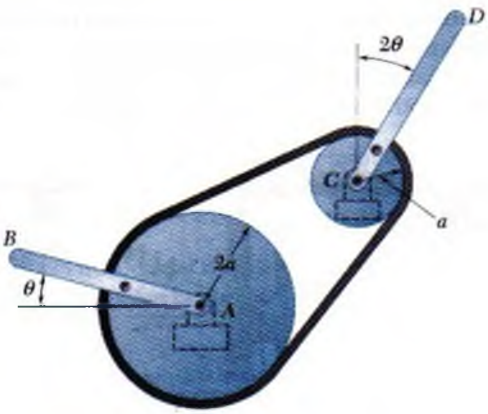


Figura *P10.71*

10.72 Dos barras uniformes, cada una de masa m y longitud l, están unidas a los engranes mostrados en la figura. Para el rango de valores de $0 \leq \theta \leq 180°$, determine las posiciones de equilibrio del sistema, y establezca en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

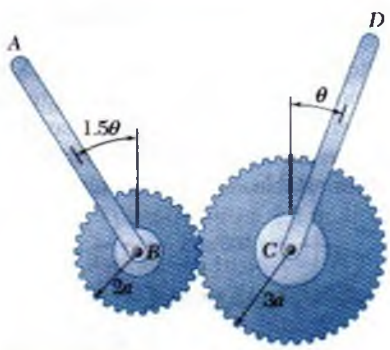


Figura *P10.72*

10.73 Con el método de la sección 10.8, resuelva el problema 10.39 y determine si el equilibrio es estable, inestable o neutro. (*Sugerencia*: La energía potencial correspondiente al par ejercido por un resorte de torsión es $\frac{1}{2}K\theta^2$, donde K es la constante torsional del resorte y θ el ángulo de torsión.)

10.74 En el problema 10.40, determine para cada una de las posiciones de equilibrio si éste es estable, inestable o neutro. (Vea la sugerencia del problema 10.73.)

10.75 El ángulo θ es igual a 45° después que un bloque de masa W se cuelga del elemento AB, como indica la figura. Si el resorte está sin estirar cuando $\theta = 20°$, y sin tomar en cuenta el peso de AB, determine el valor de W y establezca si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

10.76 Un bloque de peso W se cuelga del elemento AB, como indica la figura. Si el resorte está sin estirar cuando $\theta = 20°$, y sin tomar en cuenta el peso de AB, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando $W = 6.6$ lb. Establezca si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

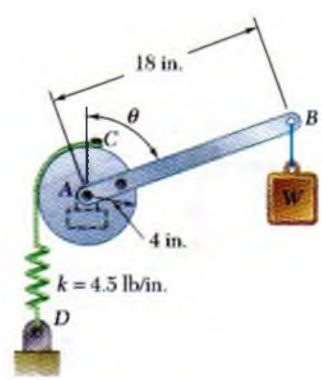


Figura P10.75 y P10.76

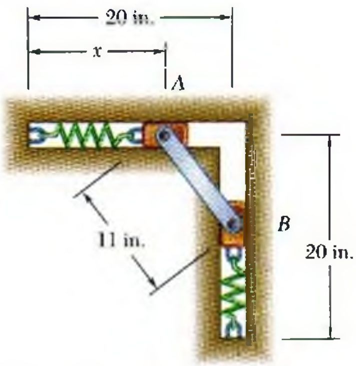


Figura P10.77

10.77 Una barra delgada *AB*, de peso insignificante, está unida a dos bloques de 10 lb *A* y *B* que pueden moverse libremente en las guías mostradas en la figura. Si la constante de los resortes es de 1 lb/in., y la longitud sin estirar de cada resorte es de 7.5 in., determine el valor de x correspondiente a la posición de equilibrio.

10.78 Una barra delgada *AB*, de masa m, está unida a dos bloques *A* y *B* que pueden moverse libremente en las guías mostradas en la figura. Si el resorte está sin estirar cuando $y = 0$, determine el valor de y correspondiente a la posición de equilibrio cuando $m = 12$ kg, $l = 750$ mm y $k = 900$ N/m.

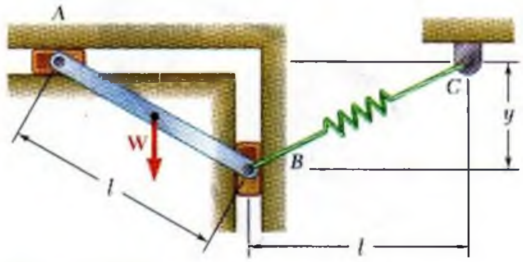


Figura *P10.78*

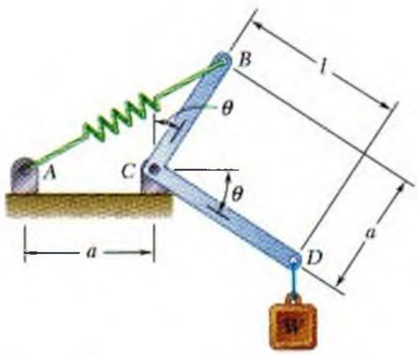


Figura P10.79

10.79 La constante del resorte *AB* es k, y éste se encuentra sin estirar cuando $\theta = 0$. *a*) Sin tomar en cuenta el peso del brazo rígido *BCD*, encuentre una ecuación en términos de θ, k, a, l y W que se cumpla cuando el brazo esté en posición de equilibrio. *b*) Determine tres valores de θ que correspondan al equilibrio cuando $k = 75$ lb/in., $a = 10$ in., $l = 15$ in. y $W = 100$ lb. Establezca en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

10.80 Un resorte *AB* de constante igual a 2 kN/m está unido a dos tambores idénticos como indica la figura. Si el resorte está sin estirar cuando $\theta = 0$, determine *a*) el rango de valores de la masa m del bloque para los cuales existe una posición de equilibrio, *b*) el rango de valores de θ para los cuales el equilibrio es estable.

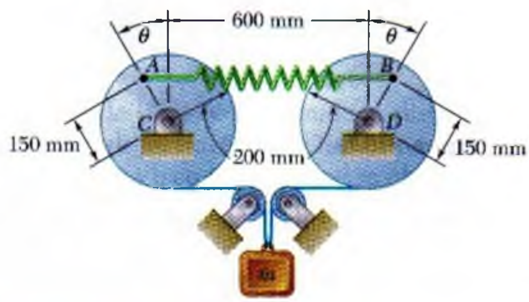


Figura *P10.80* y P10.81

10.81 Un resorte *AB* de constante igual a 2 kN/m está unido a dos tambores idénticos como indica la figura. Si el resorte se encuentra sin estirar cuando $\theta = 0$ y $m = 20$ kg, determine los valores de θ menores a 180° que corresponden a posiciones de equilibrio, y establezca en cada caso si éste es estable, inestable o neutro.

10.82 La barra *ABC* está unida a los collarines *A* y *B* los cuales se pueden mover libremente en las barras que muestra la figura. El resorte, cuya constante es k, se encuentra sin estirar cuando $\theta = 0$. *a*) Sin tomar en cuenta la masa de la barra *ABC*, encuentre una ecuación en términos de θ, m, g, k y l que se satisfaga cuando la barra *ABC* esté en posición de equilibrio. *b*) Determine el valor de θ correspondiente al equilibrio cuando $m = 5$ kg, $k = 800$ N/m y $l = 250$ mm, y asegúrese de que el equilibrio sea estable.

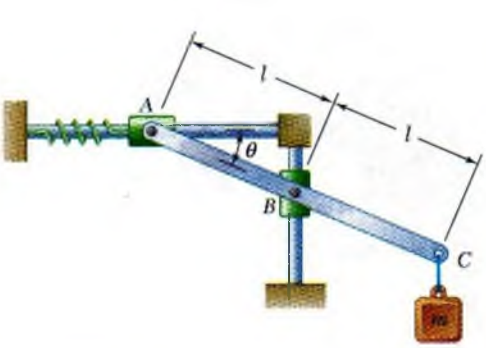


Figura P10.82

10.83 Una barra delgada AB de masa insignificante está unida a dos collarines A y B que se pueden mover libremente a lo largo de las barras guía mostradas en la figura. Si $\beta = 30°$ y $P = Q = 400$ N, determine el valor del ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio.

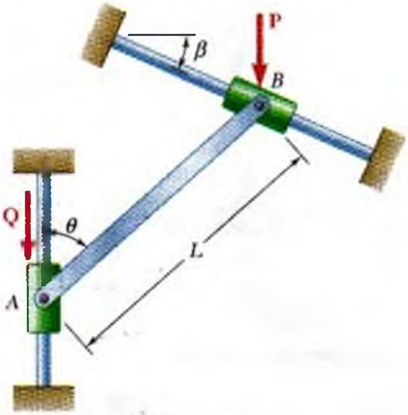


Figura P10.83 y *P10.84*

10.84 Una barra delgada AB de masa insignificante está unida a dos collarines A y B que se pueden mover libremente a lo largo de las barras guía mostradas en la figura. Si $\beta = 30°$, $P = 100$ N y $Q = 25$ N, determine el valor del ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio.

10.85 En la figura se muestra un bloque D de 25 lb que puede deslizarse libremente sobre la superficie inclinada. Si la constante del resorte es de 2.5 lb/in. y el resorte se encuentra sin estirar cuando $\theta = 0$, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio.

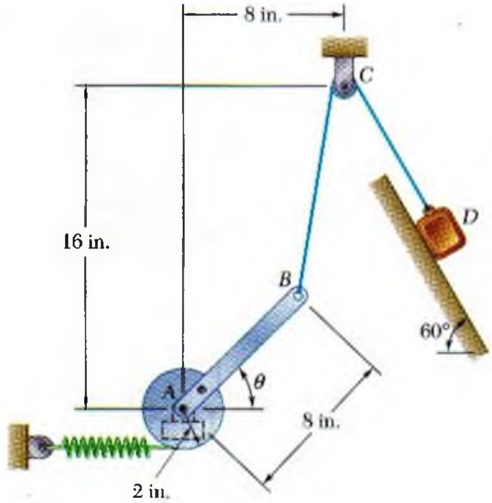


Figura P10.85

10.86 En la figura se muestra un cable AB que está unido a dos resortes y pasa por un aro en el punto C. Si los resortes se encuentran sin estirar cuando $y = 0$, determine la distancia y correspondiente a la posición de equilibrio.

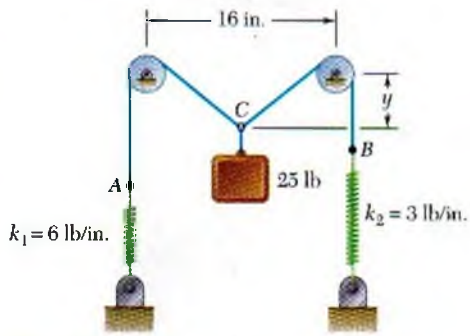


Figura P10.86

10.87 **y 10.88** En la figura se muestra el collarín A que puede deslizarse libremente en la barra semicircular. Si la constante del resorte es k y la longitud sin estirar del resorte es igual al radio r, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando $m = 20$ kg, $r = 180$ mm y $k = 3$ kN/m.

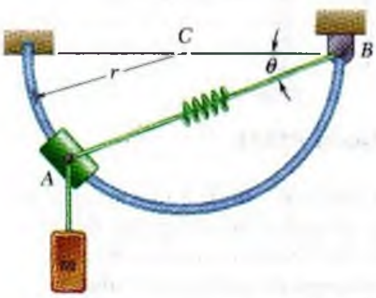


Figura *P10.87*

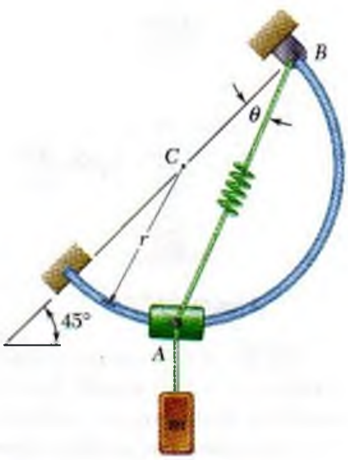


Figura P10.88

10.89 En la figura se muestra una barra AB unida a una articulación colocada en A y a dos resortes, cada uno de constante k. Si $h = 50$ in., $d = 24$ in. y $W = 160$ lb, determine el rango de valores de k para los cuales la barra está en equilibrio estable en la posición mostrada por la figura. Cada resorte puede actuar tanto en tensión como en compresión.

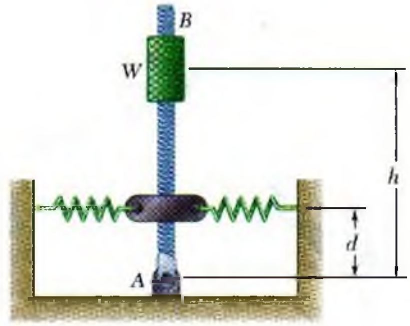


Figura P10.89 y P10.90

10.90 En la figura se muestra una barra AB unida a una articulación en A y a dos resortes, cada uno de constante k. Si $h = 30$ in., $k = 4$ lb/in. y $W = 40$ lb, determine la distancia mínima d para que la barra esté en equilibrio estable en la posición mostrada por la figura. Cada resorte puede actuar tanto en tensión como en compresión.

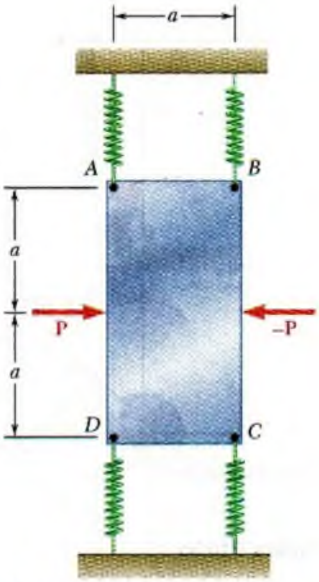


Figura P10.91

10.91 Una placa uniforme $ABCD$ de masa insignificante está unida a cuatro resortes de constante k y se encuentra en equilibrio en la posición que indica la figura. Si los resortes pueden actuar ya sea en tensión o compresión y se encuentran sin deformar en la posición mostrada, determine el rango de valores de la magnitud P de las dos fuerzas horizontales iguales y opuestas, **P** y –**P**, requeridas para que el sistema esté en equilibrio estable.

10.92 y *10.93* Dos barras están unidas a un resorte de constante k, el cual se encuentra sin estirar cuando las barras están en posición vertical. Determine el rango de valores de P para los cuales el sistema tiene equilibrio estable en la posición que muestra cada figura.

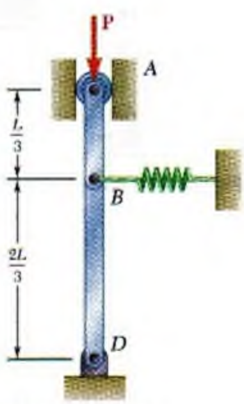


Figura P10.92

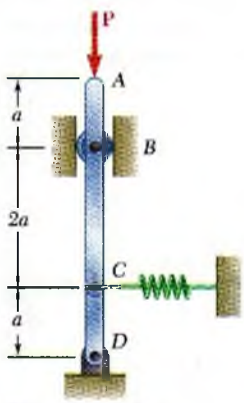


Figura *P10.93*

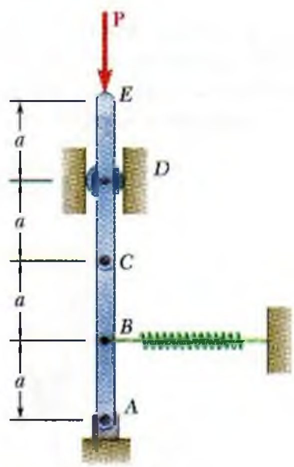


Figura *P10.94*

10.94 En la figura se muestra una barra AC unida a una articulación puesta en A y a un resorte de constante k, el cual se encuentra sin deformar cuando la barra está en posición vertical. Si el resorte puede actuar ya sea en tensión o en compresión, determine el rango de valores de P requeridos para que el sistema esté en equilibrio estable en la posición mostrada.

10.95 Las barras BC y EF están conectadas en G por medio de un perno unido a BC que puede deslizarse libremente en una ranura hecha en EF. Determine la masa mínima m_1 necesaria para que el sistema esté en equilibrio estable en la posición mostrada.

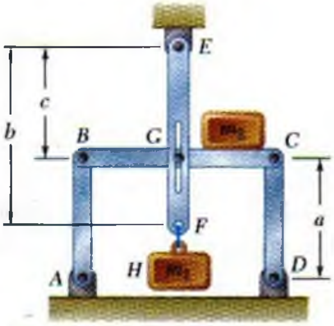


Figura P10.95

10.96 En la figura se muestra una barra horizontal BEH conectada al collarín E y a las barras verticales AC y GI. El collarín puede deslizarse libremente en la barra DF. Determine el rango de valores de Q para los cuales el sistema está en equilibrio estable en la posición mostrada cuando $a = 480$ mm, $b = 400$ mm y $P = 600$ N.

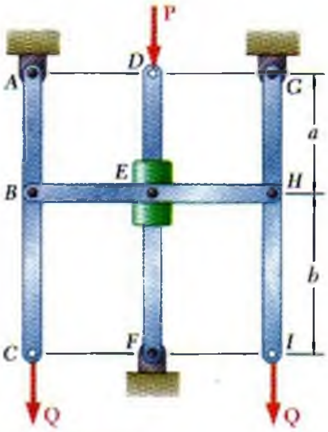


Figura P10.96

***10.97** Las barras AB y BC, cada una de longitud l y peso insignificante, que muestra la figura están unidas a dos resortes de constante k. El sistema está en equilibrio y los resortes se encuentran sin deformar cuando $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Determine el rango de valores de P para los cuales la posición de equilibrio del sistema es estable.

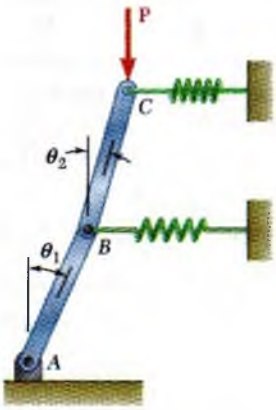


Figura P10.97

***10.98** Resuelva el problema 10.97 si $l = 400$ mm y $k = 1.25$ kN/m.

***10.99** En la figura se muestra una barra ABC de longitud $2a$ y masa insignificante, la barra está articulada en C a un tambor de radio a. Si la constante de cada resorte es k y los resortes se encuentran sin deformar cuando $\theta_1 = \theta_2 = 0$, determine el rango de valores de P para los cuales la posición de equilibrio en $\theta_1 = \theta_2 = 0$ es estable.

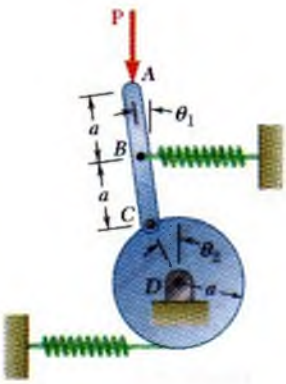


Figura P10.99

***10.100** Resuelva el problema 10.99 si $k = 2$ kN/m y $a = 350$ mm.

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 10

Trabajo de una fuerza

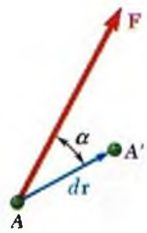


Figura 10.16

La primera parte de este capítulo se dedicó al estudio del *principio del trabajo virtual* y a su aplicación en la solución de problemas de equilibrio. Primero se definió *el trabajo de una fuerza* **F** *correspondiente a un desplazamiento pequeño* $d\mathbf{r}$ [sección 10.2] como la cantidad

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \qquad (10.1)$$

la cual se obtiene al realizar el producto escalar de la fuerza **F** y el desplazamiento $d\mathbf{r}$ (figura 10.16). Si se representa con F y ds, respectivamente, las magnitudes de la fuerza y el desplazamiento y con α el ángulo que forman **F** y $d\mathbf{r}$, se puede escribir

$$dU = F\, ds \cos \alpha \qquad (10.1')$$

El trabajo dU es positivo si $\alpha < 90°$, cero si $\alpha = 90°$ y negativo si $\alpha > 90°$. También encontró que el *trabajo de un par de momento* **M** que actúa sobre un cuerpo rígido es

$$dU = M\, d\theta \qquad (10.2)$$

donde $d\theta$ es un ángulo pequeño, expresado en radianes, sobre el que rota el cuerpo.

Desplazamiento virtual

Cuando se consideró una partícula localizada en A y sobre la que actuaban varias fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ [sección 10.3], se supuso que la partícula se movía hacia una posición A' (figura 10.17). Como en realidad el desplazamiento no ocurrió, a éste se le llamó *desplazamiento virtual* y se le representó con $\delta\mathbf{r}$, mientras que al trabajo correspondiente de las fuerzas se le llamó *trabajo virtual* y se le denotó con δU. Así se obtuvo

$$\delta U = \mathbf{F}_1 \cdot \delta\mathbf{r} + \mathbf{F}_2 \cdot \delta\mathbf{r} + \cdots + \mathbf{F}_n \cdot \delta\mathbf{r}$$

Principio del trabajo virtual

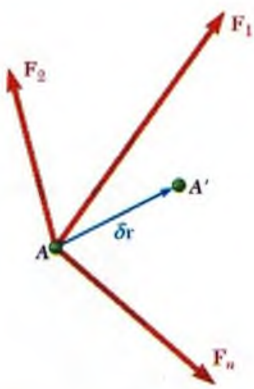


Figura 10.17

El *principio del trabajo virtual* establece que *si una partícula está en equilibrio, el trabajo virtual total* δU *de las fuerzas que actúan sobre las partículas es igual a cero para cualquier desplazamiento virtual de la partícula.*

El principio del trabajo virtual puede extenderse al caso de los cuerpos rígidos y sistemas de cuerpos rígidos. Como este principio está relacionado *sólo con fuerzas que realizan trabajo*, la aplicación del mismo proporciona una alternativa útil diferente al uso de las ecuaciones de equilibrio para la solución de muchos problemas de ingeniería. Dicho método es muy útil en el caso de máquinas y mecanismos que consisten en varios cuerpos rígidos conectados entre sí, debido a que el trabajo de las reacciones en los apoyos y el de las fuerzas internas en las diferentes uniones con pernos que conforman el sistema son iguales a cero [sección 10.4; problemas resueltos 10.1, 10.2 y 10.3].

Sin embargo, en el caso de *máquinas reales* [sección 10.5], el trabajo realizado por las fuerzas de fricción debe ser tomado en cuenta, por lo que *el trabajo de salida es menor que el trabajo de entrada*. Se definió la *eficiencia mecánica* de una máquina como la relación

Eficiencia mecánica

$$\eta = \frac{\text{trabajo de salida}}{\text{trabajo de entrada}} \qquad (10.9)$$

en donde se puntualizó que para una máquina ideal (sin fricción) $\eta = 1$, mientras que para una máquina real $\eta < 1$.

Trabajo de una fuerza sobre un desplazamiento finito

En la segunda parte de este capítulo se consideró el *trabajo realizado por las fuerzas con desplazamientos finitos* de sus puntos de aplicación. El trabajo $U_{1\rightarrow 2}$ de la fuerza **F** corresponde a un desplazamiento de la partícula A desde A_1 hasta A_2 (figura 10.18) se obtuvo al integrar el término del lado derecho de la ecuación (10.1) o (10.1′) a lo largo de la curva descrita por la partícula [sección 10.6]:

$$U_{1\rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \qquad (10.11)$$

o

$$U_{1\rightarrow 2} = \int_{s_1}^{s_2} (F \cos \alpha)\, ds \qquad (10.11')$$

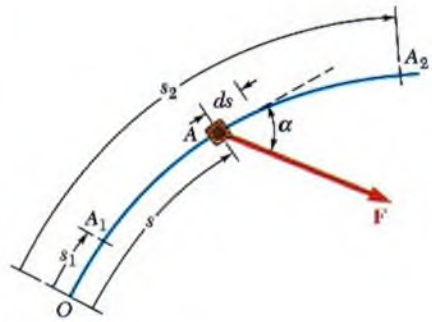


Figura 10.18

De manera similar, el trabajo de un par de momento **M** correspondiente a una rotación finita desde θ_1 hasta θ_2 de un cuerpo rígido se expresó como

$$U_{1\rightarrow 2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\, d\theta \qquad (10.12)$$

Trabajo de un peso

El *trabajo realizado por el peso* **W** *de un cuerpo* en el que su centro de gravedad se mueve de la altura y_1 hasta y_2 (figura 10.19) se puede obtener al hacer que $F = W$ y $\alpha = 180°$ en la ecuación (10.11′):

$$U_{1\rightarrow 2} = -\int_{y_1}^{y_2} W\, dy = Wy_1 - Wy_2 \qquad (10.13)$$

Por tanto, el trabajo de **W** es positivo *cuando la altura y disminuye*.

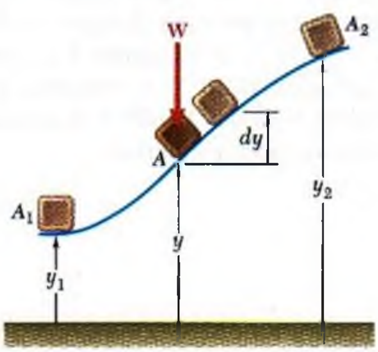


Figura 10.19

Trabajo de la fuerza ejercida por un resorte

El *trabajo de la fuerza* **F** *ejercida por un resorte* sobre un cuerpo A conforme el resorte se estira desde x_1 hasta x_2 (figura 10.20) se obtiene al hacer $F = kx$, donde k es la constante del resorte y $\alpha = 180°$ en la ecuación (10.11'):

$$U_{1\rightarrow 2} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\, dx = \tfrac{1}{2}kx_1^2 - \tfrac{1}{2}kx_2^2 \qquad (10.15)$$

Así, el trabajo **F** es positivo *cuando el resorte regresa a su posición sin deformar*.

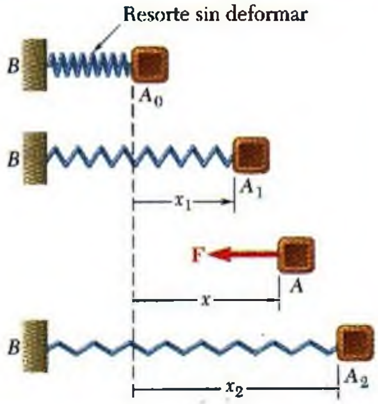


Figura 10.20

Energía potencial

Cuando el trabajo de la fuerza **F** es independiente de la trayectoria real que sigue la partícula entre A_1 y A_2, entonces se dice que la *fuerza es conservativa* y, por tanto, su trabajo realizado se expresa de la siguiente forma

$$U_{1\rightarrow 2} = V_1 - V_2 \qquad (10.20)$$

donde V es la *energía potencial* asociada con **F**; V_1 y V_2 representan, respectivamente, los valores de V en A_1 y A_2 [sección 10.7]. Las energías potenciales asociadas con la *fuerza de gravedad* **W** y con la *fuerza elástica* **F** ejercida por un resorte se expresan como

$$V_g = Wy \qquad \text{y} \qquad V_e = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad (10.17,\ 10.18)$$

Expresión alternativa para el principio del trabajo virtual

Cuando la posición de un sistema mecánico depende sólo de una variable independiente θ, la energía potencial $V(\theta)$ del sistema debe estar en función de esta variable y, por tanto, se concluye que $\delta U = -\delta V = -(dV/d\theta)\ \delta\theta$, con base en la ecuación (10.20). La condición $\delta U = 0$ requerida por el principio del trabajo virtual para que el sistema se conserve en equilibrio se puede sustituir por la condición

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \qquad (10.21)$$

Cuando todas las fuerzas involucradas son conservativas, es más conveniente utilizar la ecuación (10.21) en lugar de aplicar directamente el principio del trabajo virtual [sección 10.8; problema resuelto 10.4].

Estabilidad del equilibrio

Este enfoque presenta una ventaja más, porque es posible determinar si el equilibrio del sistema es *estable*, *inestable* o *neutro* con base en el signo de la segunda derivada de V [sección 10.9]. Por otra parte, si $d^2V/d\theta^2 > 0$, entonces V es *mínima* y el equilibrio es *estable*; pero si $d^2V/d\theta^2 < 0$, entonces V es *máxima* y el equilibrio es *inestable*. Pero si $d^2V/d\theta^2 = 0$, entonces es necesario analizar las derivadas de orden superior.

Problemas de repaso

10.101 Si la fuerza de fricción máxima ejercida sobre el corcho por la botella mostrada en la figura es de 300 N, determine *a*) la fuerza **P** que se debe aplicar al sacacorchos para abrir la botella, *b*) la fuerza máxima ejercida por la base del sacacorchos sobre la parte superior de la botella.



Figura P10.101

10.102 La posición de la barra *ABC* está controlada mediante el cilindro hidráulico *BD* mostrado en la figura. Para la carga aplicada, determine la fuerza que ejerce el cilindro hidráulico sobre el pasador colocado en *B* cuando $\theta = 70°$.

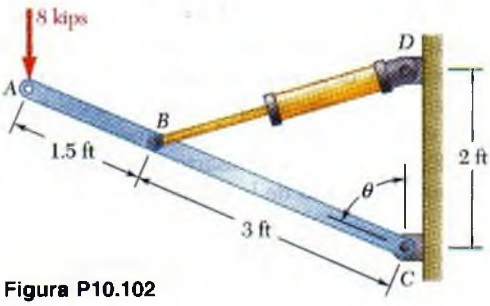


Figura P10.102

10.103 Determine la fuerza vertical **P** que debe aplicarse en *G* para que el mecanismo indicado por la figura se mantenga en equilibrio.

10.104 Determine el par **M** que debe aplicarse en el elemento *DEFG* para que el mecanismo que indica la figura se mantenga en equilibrio.

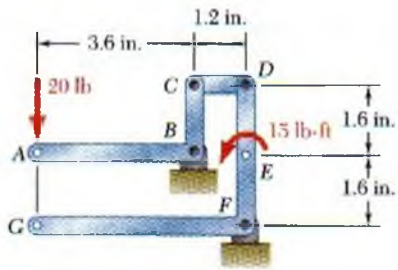


Figura *P10.103* y P10.104

10.105 Encuentre una expresión para determinar la magnitud del par **M** requerido para mantener el equilibrio del mecanismo que muestra la figura.

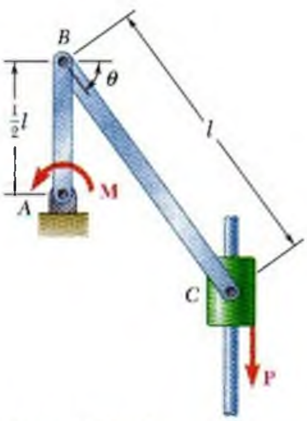


Figura P10.105

10.106 En la figura se muestran dos barras *AC* y *CE* que se conectan entre sí mediante un pasador colocado en *C* y un resorte *AE*. La constante del resorte es de 1.5 lb/in., y éste se encuentra sin estirar cuando $\theta = 30°$. Si $l = 10$ in., y sin tomar en cuenta el peso de las barras, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando $P = 40$ lb.

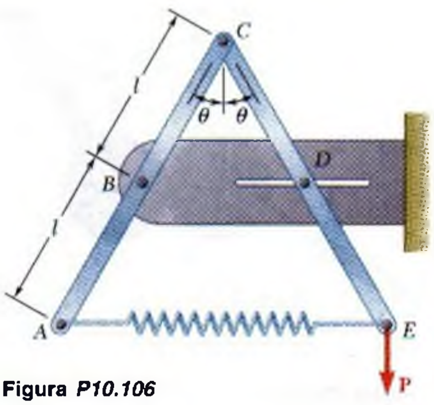


Figura *P10.106*

10.107 Para el mecanismo que muestra la figura, determine el par **M** requerido para mantener el equilibrio cuando $l = 1.8$ ft, $Q = 40$ lb y $\theta = 65°$.

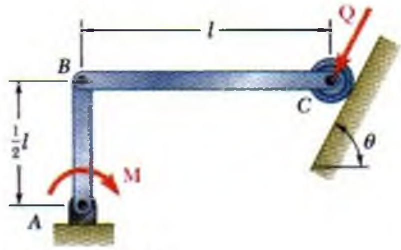


Figura P10.107

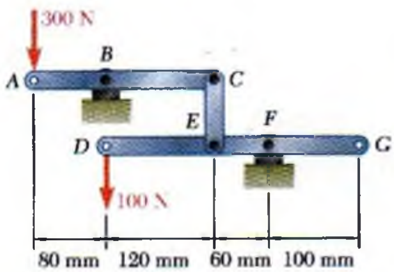


Figura P10.108

10.108 Determine la fuerza vertical **P** que debe aplicarse en *G* para mantener el equilibrio del mecanismo que muestra la figura.

10.109 Para la armadura mostrada en la figura, determine el movimiento vertical del nudo *D* si la longitud del elemento *BF* se incrementa en 75 mm. (*Sugerencia*: Aplique una carga vertical en el nudo *D* y, empleando los métodos del capítulo 6, determine la fuerza ejercida por el elemento *BF* sobre los nudos *B* y *F*. Después, aplique el método del trabajo virtual para un desplazamiento virtual equivalente al incremento habido en la longitud del elemento *BF*. Este método debe usarse únicamente cuando se tienen cambios pequeños en la longitud de los elementos.)

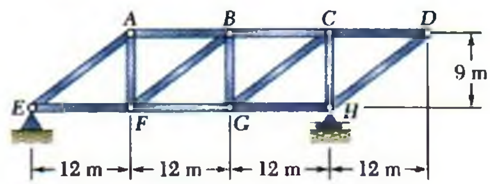


Figura *P10.109* y P10.110

10.110 Para la armadura que muestra la figura, determine el movimiento horizontal del nudo *D* si la longitud del elemento *BF* se incrementa en 75 mm. (Vea la sugerencia del problema 10.109.)

10.111 Dos barras uniformes, *AB* y *CD*, están unidas a los engranes de radio idéntico mostrados en la figura. Si $m_{AB} = 3.5$ kg y $m_{CD} = 1.75$ kg, determine las posiciones de equilibrio del sistema, y establezca en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

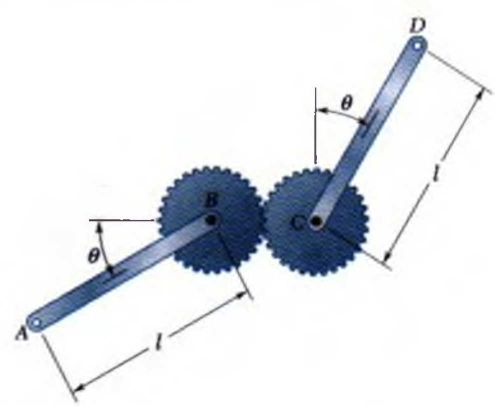


Figura *P10.111*

10.112 Una barra delgada AB de masa m está unida a dos bloques A y B, los cuales pueden moverse libremente en las guías mostradas en la figura. Si el resorte se encuentra sin estirar cuando AB está en posición horizontal, determine tres valores de θ correspondientes a la posición de equilibrio cuando $m = 125$ kg, $l = 320$ mm y $k = 15$ kN/m. En cada caso establezca si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

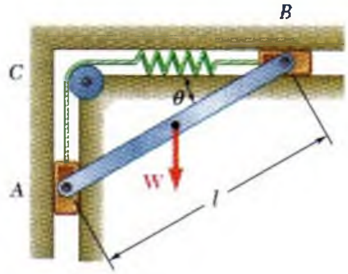


Figura P10.112

Problemas de computadora

10.C1 Si para el sistema mostrado en la figura $a = 20$ in., $b = 6$ in., $L = 20$ in. y $P = 25$ lb, utilice un programa de cómputo y grafique la fuerza presente en el elemento BD como una función de θ para valores de θ situados entre 30 y 150°. Determine el rango de valores de θ donde el valor absoluto de la fuerza presente en el elemento BD es menor a 100 lb.

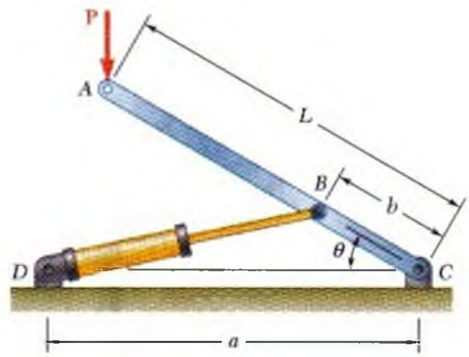


Figura P10.C1

10.C2 Los collarines A y B están conectados por medio del alambre AB y se pueden deslizar libremente en las barras que muestra la figura, donde la barra DE pertenece al plano xy. Si la longitud del alambre mide 500 mm y la masa de cada collarín es de 2.5 kg., *a*) aplique el principio del trabajo virtual para expresar, en términos de la distancia x, la magnitud de la fuerza **P** requerida para mantener al sistema en equilibrio, *b*) grafique P como una función de x para 100 mm $\leq x \leq$ 400 mm.

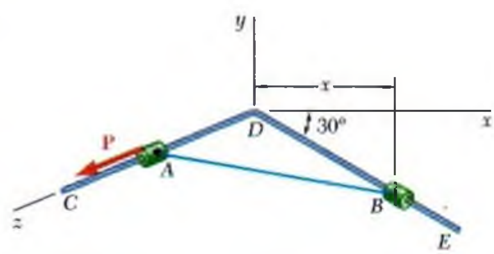


Figura P10.C2

10.C3 Para mantener en equilibrio al sistema motriz que muestra la figura cuando se aplica una fuerza **P** sobre el pistón, es necesario aplicar un par **M** sobre la manivela AB. *a*) Si $b = 48$ mm y $l = 150$ mm, utilice un programa computacional y grafique la relación M/P como una función de θ para valores de θ desde 0 hasta 180°. *b*) Determine el valor de θ para el cual la relación M/P es máxima y el valor correspondiente de dicha relación.

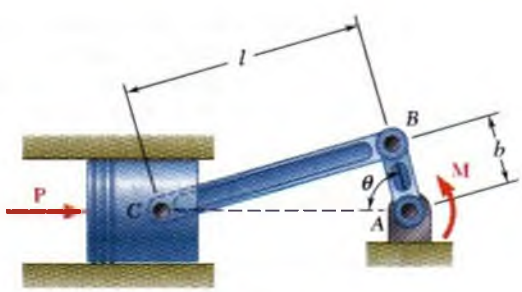


Figura P10.C3

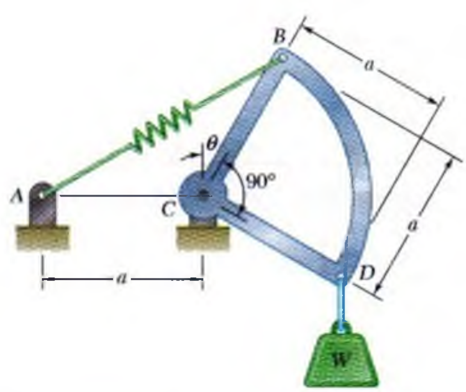


Figura P10.C4

10.C4 En la figura se muestra un resorte AB de constante k, el cual se encuentra sin estirar cuando $\theta = 0$. *a*) Sin tomar en cuenta el peso del elemento BCD, exprese la energía potencial y su derivada $dV/d\theta$ en términos de a, k, W y θ. *b*) Mediante un programa computacional y con $W = 600$ N, $a = 200$ mm y $k = 15$ kN/m, grafique la energía potencial y $dV/d\theta$ como

funciones de θ para valores de θ desde 0 hasta 165°. *c*) Determine los valores de θ para los cuales el sistema está en equilibrio, y establezca en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

10.C5 Una carga vertical **W** se aplica en B al mecanismo que muestra la figura. La constante del resorte es k, y éste se encuentra sin estirar cuando AB y BC están en posición horizontal. Para $l = 11$ in. y $k = 12.5$ lb/in. grafique W como una función de θ para valores de θ desde 0 hasta 80°.

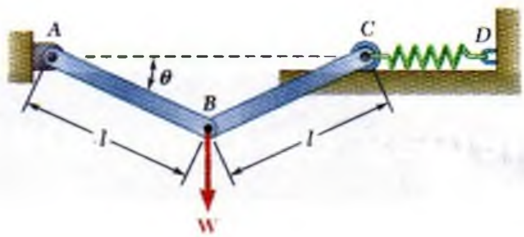


Figura P10.C5

10.C6 En la barra ABC, el pistón se controla mediante el cilindro hidráulico BD mostrado en la figura. Mediante un programa computacional, grafique la magnitud de la fuerza ejercida por el cilindro hidráulico sobre el pasador B como una función de θ para valores de θ desde 5 hasta 120°.

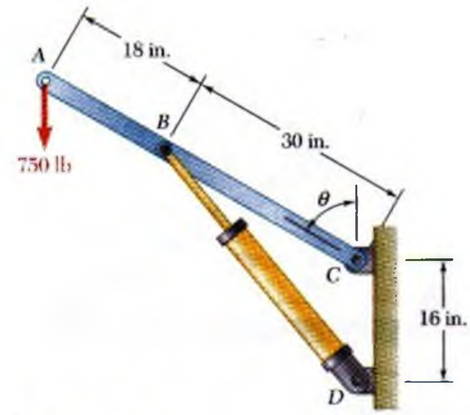


Figura P10.C6

***10.C7** Un bloque de 8 kg se cuelga del punto medio C del cable AB, el cual está unido a dos resortes como indica la figura. Si los resortes se encuentran sin estirar cuando $y = 0$, grafique la distancia y correspondiente a la posición de equilibrio como una función de la constante k_2 del resorte para 400 N/m $\leq k_2 \leq$ 600 N/m.

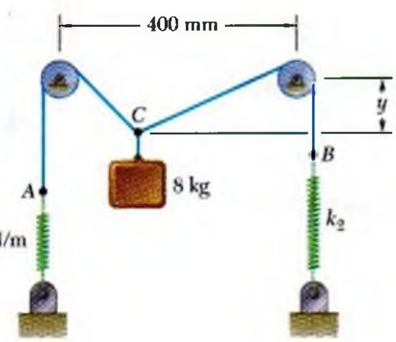


Figura P10.C7

10.C8 Una barra delgada AB de peso W está unida a dos bloques A y B, los cuales pueden moverse libremente sobre las guías mostradas en la figura. La constante del resorte es k, y éste se encuentra sin estirar cuando AB está en posición horizontal. Con $l = 20$ in. y $k = 1$ lb/in., use un programa computacional para determinar los tres valores del ángulo θ correspondientes a la posición de equilibrio para valores de W que vayan desde 1 hasta 12 lb en incrementos de 1 lb.

10.C9 Una carga vertical **W** se aplica en C sobre el mecanismo que muestra la figura. Si $k = 5$ kN/m, el resorte se encuentra sin estirar cuando θ, y sin tomar en cuenta el peso del mecanismo, use un programa de cómputo y grafique $\theta = 0$ como una función de W para valores de W que vayan desde 40 hasta 480 N.

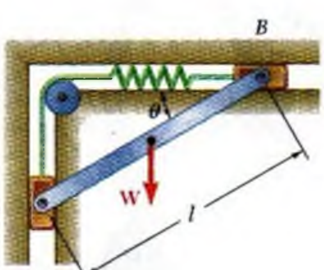


Figura P10.C8

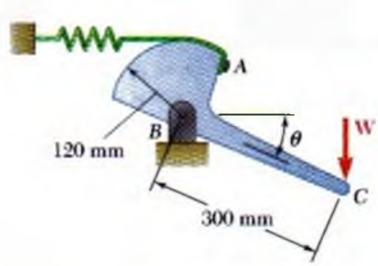


Figura P10.C9

A P É N D I C E

Fundamentos para la certificación en ingeniería en Estados Unidos

Es necesario que los ingenieros obtengan una licencia cuando su trabajo afecta en forma directa la salud, la seguridad o el bienestar público. Se intenta asegurar que los ingenieros alcancen un mínimo de calificación, la cual incluye competencia, habilidad, experiencia y carácter. El proceso de certificación incluye un examen inicial, llamado *Fundamentals of Engineering Examination*, sobre la experiencia profesional, y un segundo examen denominado *Principles and Practice of Engineering*. Quienes aprueban estos exámenes obtienen la certificación de Ingeniero profesional. Los exámenes se desarrollan bajo los auspicios del *National Council of Examiners for Engineering and Surveying*.

El primer examen, *Fundamentals of Engineering Examination*, se puede presentar justo antes o después de la graduación de un programa de estudios de cuatro años. El examen analiza los contenidos de un programa normal de licenciatura en ingeniería, lo que incluye la estática. Los temas que aborda dicho examen se cubren en este libro. La siguiente es una lista de las principales áreas temáticas, con referencia a las secciones del libro donde aparecen. También se incluyen problemas que pueden resolverse para repasar el material.

Sistemas de fuerzas concurrentes (2.2-2.9; 2.12-2.14)
Problemas: 2.34, 2.35, 2.40, 2.79, 2.85, 2.90, 2.99

Vectores fuerza (3.4-3.11)
Problemas: 3.16, 3.18, 3.23, 3.28, 3.37, 3.39

Equilibrio en dos dimensiones (2.11; 4.1-4.7)
Problemas: 4.3, 4.10, 4.13, 4.21, 4.35, 4.37, 4.67, 4.76

Equilibrio en tres dimensiones (2.15; 4.8-4.9)
Problemas: 4.102, 4.104, 4.111, 4.116, 4.120, 4.132, 4.148

Centroide de un área (5.2-5.7)
Problemas: 5.1, 5.3, 5.17, 5.32, 5.53, 5.91, 5.98, 5.99, 5.130, 5.133

Análisis de armaduras (6.2-6.7)
Problemas: 6.2, 6.3, 6.7, 6.29, 6.30, 6.42, 6.43, 6.52

Equilibrio de armazones en dos dimensiones (6.9-6.11)
Problemas: 6.76, 6.78, 6.84, 6.95, 6.98

Cortante y momento flector (7.2-7.6)
Problemas: 7.22, 7.30, 7.37, 7.41, 7.45, 7.65, 7.74, 7.76

Ficción (8.2-8.5; 8.10)

Problemas: 8.1, 8.13, 8.15, 8.21, 8.34, 8.101, 8.102, 8.104, 8.105, 8.111

Momentos de inercia (9.2-9.10)

Problemas: 9.1, 9.5, 9.31, 9.33, 9.38, 9.71, 9.75, 9.82, 9.88, 9.94, 9.105

CRÉDITOS DE LAS FOTOGRAFÍAS

CAPÍTULO 1

Portada (arriba, izquierda): © Getty Images; **Portada (arriba, en medio):** © Abiomed, Inc; **(arriba, derecha):** NASA; **Portada (abajo, izquierda):** © Reuters/CORBIS; **Portada (en medio):** © Eric Cassano; **Portada (en medio, derecha):** Cortesía de AT&T; **Portada (abajo, derecha):** NASA/JPL-Caltech/Cornell; **p. 2:** © Bettmann/CORBIS; **p. 4:** NASA; **p. 9:** © Robert Rathe, Cortesía del National Bureau of Standards; **p. 10:** © 1998, Lockheed Martin.

CAPÍTULO 2

Portada: © Image Source/Getty Images; **p. 19:** © Nicolas Russell/Getty Images; **p. 37:** © H. David Seawell/CORBIS; **p. 57:** © Arthur D'Arazien.

CAPÍTULO 3

Portada (fondo): © Profimedia.CZ s.r.o./Alamy; **Portada (recuadro):** © David De Lossy/Getty Images; **p. 107:** © Elliot Eisenberg; **p. 112;** © Steve Hix/Getty Images; **p. 124:** © Steve Raymer/CORBIS; **p. 125:** © Yogi, Inc./CORBIS; **p. 127, p. 128:** © Elliot Eisenberg.

CAPÍTULO 4

Portada: © Jochem D Wijnands/Getty Images; **p. 159 (ambas):** © Elliot Eisenberg; **p. 160 (arriba):** © Lucinda Dowell; **p. 160 (en medio, abajo):** Cortesía de Godden Collection, National Information Service for Earthquake Engineering, University of California, Berkeley; **p. 192 (ambas):** © Elliot Eisenberg.

CAPÍTULO 5

Portada: © Joseph A. Blum, People & Work; **p. 220:** © Christies Images/SuperStock; **p. 238:** © Annie Griffiths Belt/CORBIS; **p. 248:** © Ghislain & Marie David de Lossy/Getty Images; **p. 249:** © Bruce Hands/Stock, Boston; **p. 259:** NASA.

CAPÍTULO 6

Portada: © Ron Watts/CORBIS; **p. 287:** Cortesía de Godden Collection, National Information Service for Earthquake Engineering, University of California, Berkeley; **p. 289:** © Ferdinand Beer; **p. 290:** © Sabina Dowell; **p. 294:** © EyeWire Collection/Getty Images; **p. 332:** Cortesía de Luxo Lamp Corporation.

CAPÍTULO 7

Portada: © AP Photo/Christophe Ena; **p. 357:** © Sabina Dowell; **p. 364:** © Elliot Eisenberg; **p. 385:** © Michael S. Yamashita/CORBIS; **p. 388:** © Brian Yarvin/Photo Researchers; **p. 397:** © Steve Kahn/Getty Images.

CAPÍTULO 8

Portada: © Jeffrey Mazurek; **p. 414:** © Richard Cummins/CORBIS; **p. 418:** © Chuck Savage/CORBIS; **p. 433:** © Ted Spiegel/CORBIS; **p. 453:** © Adam Woolfitt/CORBIS; **p. 454:** © Elliot Eisenberg.

CAPÍTULO 9

Portada: City of Vancouver National Street Works Yard, LEED Gold, Omicron AEC Designers/Builders. © Terri Meyer Boake/University of Waterloo, School of Architecture; **p. 486:** © Ed Eckstein/CORBIS; **p. 515:** Cortesía de Caterpillar Engine Division.

CAPÍTULO 10

Portada: Cortesía de Paxton-Mitchell Co.; **p. 561:** Cortesía de Altec Industries; **p. 565:** Cortesía de De-Sta-Co.

Índice analítico

Respuestas a problemas

En las siguientes páginas se presentan las respuestas a los problemas cuyo número no está en letras cursivas. Las respuestas a los problemas señalados con números en tipo cursivo no se incluyen en el presente listado. Las respuestas a los problemas de computadora se proporcionan en www.mhhe.com/beerjohnston8.

CAPÍTULO 2

2.1 37 lb ∡ 76.0°.
2.2 57 lb ∡ 86.0°.
2.4 5.4 kN ∡ 12.0°.
2.5 *a*) 103.0°. *b*) 276 N.
2.6 *a*) 25.1°. *b*) 266 N.
2.7 *a*) 72.2°. *b*) 1.391 kN.
2.8 *a*) 26.9 lb. *b*) 18.75 lb.
2.10 *a*) 7.48°. *b*) 138.4 N.
2.11 *a*) 108.6 lb. *b*) 163.9 lb.
2.13 *a*) 45.9 lb →. *b*) 65.5 lb.
2.14 *a*) 4.88 N ∡ 6.00°. *b*) 69.8 N.
2.15 37.2 lb ∡ 76.6°.
2.16 56.6 lb ∡ 85.8°.
2.18 1.302 kN ∡ 75.8°.
2.19 41.4 kN ∡ 72.0°.
2.21 (2.4 kN) 1.543 kN, 1.839 kN; (1.85 kN) 1.738 kN, 0.633 kN; (1.40 kN) 1.147 kN, −0.803 kN.
2.22 (5 kips) 3.83 kips, 3.21 kips; (7 kips) −2.39 kips, 6.58 kips; (9 kips) −8.46 kips, 3.08 kips.
2.24 (204 lb) −96.0 lb, 180.0 lb; (212 lb) 112.0 lb, 180.0 lb; (400 lb) −320 lb, −240 lb.
2.25 *a*) 1 674 N. *b*) 1 371 N.
2.26 *a*) 39.2 lb. *b*) 25.2 lb.
2.28 *a*) 339 lb. *b*) 218 lb ↓.
2.29 *a*) 47.9 N. *b*) 16.38 N.
2.31 4.73 kN ∡ 20.6°.
2.32 14.66 kips ∡ 61.4°.
2.34 905 N ∡ 45.0°.
2.35 45.2 lb ∡ 62.3°.
2.37 1019 N ∡ 26.1°.
2.38 1.295 kN ∡ 88.3°.
2.39 *a*) 116.0 lb. *b*) 60.0 lb.
2.40 *a*) 40.3°. *b*) 1.130 kN.
2.41 *a*) 56.3°. *b*) 1 021 N.
2.43 *a*) 169.7 lb. *b*) 348 lb.
2.44 *a*) 2.20 kN. *b*) 2.43 kN.
2.46 *a*) 38.6 lb. *b*) 44.3 lb.
2.47 *a*) 405 N. *b*) 830 N.
2.49 T_C = 5.87 kips; T_D = 9.14 kips.
2.51 F_C = 1.433 kN; F_D = 1.678 kN.
2.52 F_B = 2.99 kN; F_D = 1.060 kN.
2.53 *a*) 786 N. *b*) 3.26 kN.
2.54 *a*) 3.12 kN. *b*) 20.3 N.
2.55 *a*) 169.6 lb. *b*) 265 lb.
2.57 *a*) 62.8 N. *b*) 758 mm.
2.58 *a*) 19.85 lb. *b*) 62.3 lb.
2.59 *a*) 50.0°. *b*) 35.0 lb.
2.60 *a*) 1 216 N. *b*) 77.5°.
2.61 *a*) 1 510 N. *b*) 57.5°.
2.62 4.97 m.
2.65 16.81 in.
2.66 *a*) 90.0°. *b*) 305 N.
2.67 170.5 lb ∡ 7.50°.
2.69 *b*) 916 N. *d*) 687 N.
2.70 *a*) 2.30 kN. *b*) 3.53 kN.
2.72 27.4° < α < 223°.
2.73 *a*) +557 lb, −611 lb, +468 lb. *b*) 54.1°, 130.0°, 60.5°.
2.75 *a*) +706 N, +450 N, −329 N. *b*) 38.3°, 60.0°, 111.5°.
2.76 *a*) −611 N, +1 785 N, +222 N. *b*) 108.7°, 20.0°, 83.3°.
2.78 *a*) +141.3 lb, −90.0 lb, +65.9 lb. *b*) 38.3°, 120.0°, 68.5°.
2.79 *a*) −90.1 N, +190.5 N, −63.1 N. *b*) 114.2°, 30.0°, 106.7°.
2.80 *a*) 439 N. *b*) 65.8°, 30.0°, 106.7°.
2.81 F = 225 N; θ_x = 73.2°, θ_y = 110.8°, θ_z = 152.7°.
2.83 *a*) 132.5°. *b*) F_x = 53.9 lb, F_z = 7.99 lb; F = 74.0 lb.
2.84 *a*) 153.7°. *b*) F_x = −15.37 lb, F_y = 7.85 lb; F = 39.0 lb.
2.85 *a*) F_y = 75.6 N, F_z = 224 N. *b*) θ_x = 71.3°, θ_z = 26.1°.
2.87 +30.0 lb, −35.0 lb, −30.0 lb.
2.88 +28.8 lb, −36.0 lb, +38.4 lb.
2.90 +200 N, +1000 N, +740 N.
2.91 −200 N, +370 N, −160.0 N.
2.93 4.28 kips; θ_x = 93.7°, θ_y = 31.3°, θ_z = 121.1°.
2.95 1 122 N; θ_x = 147.7°, θ_y = 61.6°, θ_z = 104.2°.
2.96 1 122 N; θ_x = 150.1°, θ_y = 60.1°, θ_z = 91.6°.
2.97 *a*) 1492 lb. *b*) 2 040 lb; θ_x = 90.0°, θ_y = 139.2°, θ_z = 49.2°.
2.99 *a*) 360 N. *b*) 424 N.
2.100 T_{AB} = 3.25 kN; T_{AD} = 1.775 kN.
2.102 9.71 kN.
2.103 1 031 N ↑.
2.105 55.9 lb.
2.106 F_{BA} = 23.5 lb; F_{CA} = 14.77 lb; F_{DA} = 26.6 lb.
2.107 6.66 kN ↑.
2.108 8.81 kN ↑.
2.109 T_{AB} = 86.2 lb; T_{AC} = 27.7 lb; T_{AD} = 237 lb.
2.112 0 ≤ P ≤ 0.386 lb.
2.113 T_{DA} = 62.9 N; T_{DB} = T_{DC} = 56.7 N.
2.114 T_{DA} = 62.9 N; T_{DB} = T_{DC} = 57.8 N.
2.115 T_{AB} = 4.33 kN; T_{AC} = 2.36 kN; T_{AD} = 2.37 kN.
2.116 F_{AB} = 1 742 N; T_{AC} = 1 517 N; T_{AD} = 403 N.
2.118 0 ≤ P ≤ 0.1600 lb.
2.120 T_{AB} = 81.3 lb; T_{AC} = 22.2 lb.
2.121 T_{BE} = 1.310 N; T_{CF} = 4.38 N; T_{DG} = 4.89 N.
2.122 T_{BE} = 4.84 N; T_{CF} = 1.157 N; T_{DG} = 4.58 N.
2.123 T_{ADB} = 81.9 lb; W = 143.4 lb.
2.124 T_{ADB} = 68.6 lb; T_{DC} = 14.23 lb.
2.126 *a*) 221 N. *b*) 715 N. *c*) 2 060 N.
2.127 *a*) 2.27 kN. *b*) 1.963 kN.
2.129 *a*) 45.6°. *b*) 27.1 lb.
2.131 *a*) 549 N. *b*) 315 N.
2.132 *a*) 5.23 kN. *b*) 0.503 kN.

2.134 149.1 lb ⦩ 32.3° o 274 lb ⦨ 32.3°.
2.135 *a*) 576 N. *b*) 67.5°, 30.0°, 108.7°.
2.136 *a*) $F_y = -359$ lb, $F_z = -437$ lb. *b*) $\theta_x = 70.5°$, $\theta_y = 126.7°$.
2.137 758 lb; $\theta_x = 65.0°$, $\theta_y = 33.0°$, $\theta_z = 69.9°$.
2.139 177.2 lb.

CAPÍTULO 3

3.1 13.02 N · m ↻.
3.2 13.02 N · m ↻.
3.3 16.03 lb · in. ↺.
3.5 49.9° o 59.4°.
3.6 *a*) 386 N · m ↺. *b*) 160.1 N ∠ 56.0°.
3.7 *a*) 386 N · m ↺. *b*) 193.2 N ↑. *c*) 189.5 N ∠ 78.7°.
3.9 *a*) 7 600 lb · in. ↺. *b*) 7 600 lb · in. ↺.
3.10 250 lb.
3.12 140.0 N · m ↺.
3.14 12.54 N · m ↻.
3.16 126.0 mm.
3.17 *a*) $(-4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 10\mathbf{k})/\sqrt{165}$.
b) $(-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k})/\sqrt{17}$.
3.19 *a*) $-(18.00$ N · m$)\mathbf{i} - (15.75$ N · m$)\mathbf{j} - (40.5$ N · m$)\mathbf{k}$.
b) $(6.38$ N · m$)\mathbf{i} + (1.500$ N · m$)\mathbf{j} + (11.63$ N · m$)\mathbf{k}$.
c) 0.
3.21 $(886$ N · m$)\mathbf{i} + (259$ N · m$)\mathbf{j} - (670$ N · m$)\mathbf{k}$.
3.23 $(572$ lb · ft$)\mathbf{i} - (153.2$ lb · ft$)\mathbf{j} + (1\,532$ lb · ft$)\mathbf{k}$.
3.24 *a*) $(1\,200$ N · m$)\mathbf{i} - (1\,500$ N · m$)\mathbf{j} - (900$ N · m$)\mathbf{k}$.
b) $-(1\,200$ N · m$)\mathbf{i} + (1\,500$ N · m$)\mathbf{j} - (600$ N · m$)\mathbf{k}$.
3.25 $(19.49$ lb · ft$)\mathbf{i} - (99.0$ lb · ft$)\mathbf{j} - (2.12$ lb · ft$)\mathbf{k}$.
3.27 1.946 m.
3.28 29.7 ft.
3.30 1.491 m.
3.31 8.07 in.
3.32 0.645 m.
3.33 1.141 m.
3.35 $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = -23$; $\mathbf{P} \cdot \mathbf{S} = -74$; $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} = 37$.
3.37 63.6°.
3.39 *a*) 134.1°. *b*) −76.6 lb.
3.40 *a*) 65.0°. *b*) 75.3 lb.
3.42 *a*) 84.0°. *b*) 26.2 N.
3.43 *a*) 230 in.^{3} *b*) 32.0 in.^{3}
3.44 13.00.
3.45 $M_x = -1\,598$ N · m; $M_y = 959$ N · m; $M_z = 0$.
3.46 $M_x = -1\,283$ N · m; $M_y = 770$ N · m; $M_z = 1\,824$ N · m.
3.47 15.00 lb.
3.49 $P = 186.8$ N; $\phi = 9.87°$; $\theta = 48.1°$.
3.50 28.0 N · m.
3.52 14.75 ft.
3.53 −180.0 N · m.
3.54 −222 N · m.
3.55 −24.9 kN · m.
3.56 −35.9 kN · m.
3.57 $aP/\sqrt{2}$.
3.58 *b*) $a/\sqrt{2}$.
3.60 −225 lb · ft.
3.62 215 mm.
3.64 8.26 ft.
3.65 9.26 ft.
3.67 1.741 m.
3.68 *a*) 24.0 N · m ↺. *b*) 35.6°. *c*) 1.000 m.
3.69 *a*) 26.7 N. *b*) 50.0 N. *c*) 23.5 N.
3.70 *a*) 426 lb · in. ↻. *b*) 9.72 in.
3.71 *a*) 86.2 lb · in. ↺. *b*) ∠ 53.1°. *c*) 4.03 lb.
3.72 $M = 19.50$ N · m; $\theta_x = 67.4°$, $\theta_y = 90.0°$, $\theta_z = 22.6°$.
3.74 $M = 76.6$ N · m; $\theta_x = 12.20°$, $\theta_y = 90.0°$, $\theta_z = 77.8°$.
3.75 $M = 103.1$ N · m; $\theta_x = 43.4°$, $\theta_y = 52.3°$, $\theta_z = 108.3°$.
3.76 $M = 3.50$ kip · in.; $\theta_x = 33.1°$, $\theta_y = 64.8°$, $\theta_z = 69.9°$.
3.79 *a*) $\mathbf{F}_B = 135.0$ N ↓; $\mathbf{M}_B = 16.88$ N · m ↺.
b) $\mathbf{F}_B = 225$ N ←; $\mathbf{F}_C = 225$ N →.
3.81 $\mathbf{F}_A = 1.750$ kN ∠ 65.0°; $\mathbf{F}_C = 1.050$ kN ∠ 65.0°.
3.82 $\mathbf{F}_B = 22.5$ lb ⦩ 30.0°; $\mathbf{F}_C = 31.5$ lb ⦩ 30.0°.
3.83 *a*) $\mathbf{F}_C = 54.0$ lb ⦩ 30.0°; $\mathbf{M}_C = 332$ lb · in. ↺.
b) $\mathbf{F}_B = 30.3$ lb ⦩ 63.0°; $\mathbf{F}_C = 33.0$ lb ←.
3.84 *a*) $\mathbf{F} = 200$ lb ↓; $d = 9.00$ ft.
b) $\mathbf{F} = 200$ lb ↓; $d = 0$.
3.86 $\mathbf{F} = -(60.8$ N$)\mathbf{i} - (89.7$ N$)\mathbf{k}$; 3.59 m a la derecha de *A*.
3.87 *a*) $\mathbf{F}_A = 22.0$ lb ∠ 20.0°; $\mathbf{M}_A = 26.0$ lb · in. ↺.
b) $\mathbf{F}_A = 22.0$ lb ∠ 20.0°; 1.259 in. abajo de *A*.
3.88 *a*) 120.0 N; $y = 19.98$ mm. *b*) −16.26° o −85.0°.
3.90 $\mathbf{F} = -(250$ kN$)\mathbf{j}$; $\mathbf{M} = (15.00$ kN · m$)\mathbf{i} + (7.50$ kN · m$)\mathbf{k}$.
3.91 $\mathbf{F} = (6.00$ lb$)\mathbf{i} - (48.0$ lb$)\mathbf{j} + (24.0$ lb$)\mathbf{k}$;
$\mathbf{M} = (540$ lb · ft$)\mathbf{i} - (135.0$ lb · ft$)\mathbf{k}$.
3.93 $\mathbf{F} = -(2.00$ kN$)\mathbf{i} - (9.50$ kN$)\mathbf{j} + (4.00$ kN$)\mathbf{k}$;
$\mathbf{M} = (19.00$ kN · m$)\mathbf{i} - (12.00$ kN · m$)\mathbf{j} - (19.00$ kN · m$)\mathbf{k}$.
3.94 $\mathbf{F} = -(190.5$ N$)\mathbf{j} - (110.0$ N$)\mathbf{k}$;
$\mathbf{M} = (75.7$ N · m$)\mathbf{i} + (22.0$ N · m$)\mathbf{j} - (38.1$ N · m$)\mathbf{k}$.
3.95 $\mathbf{F} = (54.0$ lb$)\mathbf{i} - (18.00$ lb$)\mathbf{j} + (27.0$ lb$)\mathbf{k}$;
$\mathbf{M} = (707$ lb · in.$)\mathbf{i} + (778$ lb · in.$)\mathbf{j} - (336$ lb · in.$)\mathbf{k}$.
3.96 *a*) $-(2.40$ N$)\mathbf{j}$. *b*) $x = -16.89$ mm, $z = -24.5$ mm.
3.98 *a*) *Carga a*: $\mathbf{R} = 1\,000$ N ↓; $\mathbf{M} = 6.00$ kN · m ↺.
Carga b: $\mathbf{R} = 1\,000$ N ↓; $\mathbf{M} = 6.60$ kN · m ↺.
Carga c: $\mathbf{R} = 1\,000$ N ↓; $\mathbf{M} = 6.60$ kN · m ↻.
Carga d: $\mathbf{R} = 1\,000$ N ↓; $\mathbf{M} = 6.60$ kN · m ↺.
Carga e: $\mathbf{R} = 900$ N ↓; $\mathbf{M} = 6.60$ kN · m ↺.
Carga f: $\mathbf{R} = 1\,000$ N ↓; $\mathbf{M} = 5.80$ kN · m ↺.
Carga g: $\mathbf{R} = 900$ N ↓; $\mathbf{M} = 6.60$ kN · m ↺.
Carga h: $\mathbf{R} = 1\,000$ N ↓; $\mathbf{M} = 6.60$ kN · m ↺.
b) *Cargas b, d y h*.
3.99 *Carga f*.
3.100 *a*) $\mathbf{R} = 600$ N ↓; 1.500 m. *b*) $\mathbf{R} = 300$ N ↓; 1.333 m.
c) $\mathbf{R} = 500$ N ↓; 1.600 m.
3.101 Sistema fuerza-par en *E*.
3.103 *a*) 7.82 ft. *b*) 4.48 ft.
3.105 *a*) 158.2 N ⦪ 86.0°. *b*) 302 mm a la derecha de *F*.
3.106 *a*) 72.2°. *b*) 127.6 N ⦨ 87.4°.
3.107 *a*) $\mathbf{M} = 115.2$ lb · in. ↺; $\alpha = 39.3°$. *b*) 56.1 lb ⦨ 45.0°.
3.109 *a*) $\mathbf{R} = 3.72$ kips ⦨ 55.2°; 0.0406 in. a la izquierda de *EF*.
b) 55.9°.
3.111 350 N ⦪ 21.4°; 92.6 mm a la izquierda de *B* y 27.4 mm a la derecha de *F*.
3.112 *a*) 7.35 N ∠ 55.6°. *b*) 478 mm a la izquierda de *B*.
c) 34.7 mm arriba y a la izquierda de *A*.
3.113 *a*) 211 mm. *b*) 211 mm.
3.114 *a*) $\mathbf{R} = F$ ⦪ $\tan^{-1}(b^2/2hx)$;
$\mathbf{M} = \dfrac{(2h^2 - b^2)x - 2(h/b)^2 x^3}{\sqrt{b^4 + 4h^2x^2}} F$ ↺. *b*) 0.354 ft.
3.115 $\mathbf{R} = -(300$ N$)\mathbf{i} - (240$ N$)\mathbf{j} + (25.0$ N$)\mathbf{k}$;
$\mathbf{M} = -(3.00$ N · m$)\mathbf{i} + (13.50$ N · m$)\mathbf{j} + (9.00$ N · m$)\mathbf{k}$.
3.117 $\mathbf{A} = (2.00$ N$)\mathbf{i} - (169.1$ N$)\mathbf{j} + (12.00$ N$)\mathbf{k}$;
$\mathbf{B} = -(12.00$ N$)\mathbf{i} + (169.1$ N$)\mathbf{j} - (6.00$ N$)\mathbf{k}$.
3.118 *a*) $\mathbf{B} = (2.32$ lb$)\mathbf{i}$; $\mathbf{C} = (1.580$ lb$)\mathbf{i} - (3.30$ lb$)\mathbf{j} - (1.110$ lb$)\mathbf{k}$.
b) $R_y = -3.30$ lb; $M_x = 2.55$ lb · ft.
3.119 *a*) 53.1°. *b*) $\mathbf{R} = (40.0$ N$)\mathbf{j} + (5.00$ N$)\mathbf{k}$;
$\mathbf{M} = -(24.0$ N · m$)\mathbf{i} + (45.0$ N · m$)\mathbf{k}$.
3.120 *a*) $\mathbf{R} = (43.3$ N$)\mathbf{j}$;
$\mathbf{M} = (6.88$ N · m$)\mathbf{i} + (5.63$ N · m$)\mathbf{j} + (9.74$ N · m$)\mathbf{k}$.
b) En sentido contrario al de las manecillas del reloj.

3.122 **R** = −(8.00 lb)**i** + (56.0 lb)**j** − (20.0 lb)**k**;
M = −(81.0 lb · ft)**i** + (123.0 lb · ft)**j** + (444 lb · ft)**k**.
3.123 280 kN; x = 0.750 m, z = −0.1856 m.
3.124 F_B = 80.0 kN; F_F = 60.0 kN.
3.125 680 kips; x = 91.1 ft, z = 43.2 ft.
3.126 a = 58.4 ft; b = 52.4 ft.
3.129 *a*) $2P$; $\theta_x = 0$, $\theta_y = -90.0°$, $\theta_z = 90.0°$. *b*) $-0.750a$.
c) $y = 3.00a$, $z = 2.50a$.
3.131 *a*) −(21.0 N)**j**. *b*) 0.571 m. *c*) El eje de la llave de torsión es paralelo al eje y y en $x = 0$, z = 41.7 mm.
3.133 *a*) **R** = −(35.0 lb)**i** − (12.00 lb)**k**. *b*) 5.11 in.
c) y = 5.75 in., z = 4.57 in.
3.135 *a*) $3P(2\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - \mathbf{k})/25$. *b*) $-0.0988a$.
c) $x = 2.00a$, $z = -1.990a$.
3.137 **R** = (4.00 lb)**i** + (6.00 lb)**j** − (2.00 lb)**k**; p = 1.226 ft;
y = −3.68 ft, z = −1.031 ft.
3.138 $\mathbf{F}_A = -(M/b)\mathbf{i} + R[1 + (a/b)]\mathbf{j}$; $\mathbf{F}_B = (M/b)\mathbf{i} - (a/b)R\mathbf{j}$.
3.142 *a*) 80.0 N · m ↻. *b*) 205 N. *c*) 177.8 N ⦣ 20.0°.
3.144 *a*) −(1 840 lb · ft)**i** − (368 lb · ft)**k**.
b) −(1 840 lb · ft)**i** + (2 160 lb · ft)**j** + (2 740 lb · ft)**k**.
3.145 38.9°.
3.146 4.00 ft.
3.148 *a*) **F** = 1 000 N ⦤ 20.0°; **M** = 1 724 N · m ↻.
b) **F** = 1 000 N ⦤ 20.0°; **M** = 958 N · m ↻.
3.150 **F** = (2.00 lb)**i** + (38.0 lb)**j** − (24.0 lb)**k**;
M = (792 lb · in.)**i** + (708 lb · in.)**j** + (1 187 lb · in.)**k**.
3.151 **R** = 362 N ⦤ 81.9°; M = 327 N · m.
3.152 **R** = −(7.00 lb)**i** − (8.00 lb)**j** − (4.00 lb)**k**;
M = −(12.00 lb · in.)**i** + (10.50 lb · in.)**j** + (7.50 lb · in.)**k**.

CAPÍTULO 4

4.1 *a*) 271 lb ↓. *b*) 570 lb ↑.
4.2 *a*) 2.70 kips ↑. *b*) 3.80 kips ↑.
4.3 *a*) 34.0 kN ↑. *b*) 4.96 kN ↑.
4.4 *a*) 81.1 kN. *b*) 134.1 kN ↑.
4.7 *a*) **A** = 10.05 kN ↑; **B** = 15.35 kN ↑.
b) **A** = 8.92 kN ↑; **B** = 16.48 kN ↑.
4.8 *a*) 0. *b*) **A** = 10.68 kN ↑; **B** = 14.72 kN ↑.
4.9 28.0 lb ≤ T_C ≤ 36.0 lb.
4.10 1.250 kN ≤ Q ≤ 27.5 kN.
4.12 4.64 lb ≤ W_A ≤ 531 lb.
4.13 25.0 mm ≤ a ≤ 125.0 mm.
4.15 *a*) 150.0 lb. *b*) 292 lb ⦣ 77.5°.
4.16 *a*) 8.00 lb ⦣ 60.0°. *b*) 8.05 lb ⦦ 6.62°.
4.18 *a*) **A** = 165.0 N ↓; **B** = 165.0 N ↑.
b) **A** = 275 N →; **B** = 275 N ←.
c) **A** = 141.5 N ⦤ 60.0°; **B** = 141.5 N ⦥ 60.0°.
4.19 *a*) 300 N. *b*) 449 N ⦦ 32.3°.
4.21 *a*) 7.70 lb/in. *b*) 11.05 lb ⦥ 13.60°.
4.23 *a*) **A** = 258 N ⦣ 22.8°; **B** = 187.5 N ←.
b) **A** = 253 N ⦤ 20.2°; **B** = 265 N ⦥ 45.0°.
4.24 *a*) **A** = 238 N →; **B** = 213 N ⦥ 28.1°.
b) **A** = 336 N ⦣ 45.0°; **B** = 233 N ⦦ 36.3°.
4.26 *a*) **A** = 27.1 lb ⦣ 58.4°; **E** = 3.57 lb ⦤ 60.0°.
b) **A** = 26.6 lb ⦣ 3.97°; **E** = 21.0 lb ⦥ 60.0°.
4.27 *a*) 594 N. *b*) 646 N ⦣ 24.6°.
4.28 *a*) 384 N. *b*) 409 N ⦣ 22.4°.
4.29 T = 195.0 N; **C** = 216 N ⦦ 33.7°.
4.30 T = 32.1 lb; **A** = 36.4 lb ⦤ 81.0°.
4.31 T = 101.0 lb; **A** = 76.0 lb ⦤ 86.9°.
4.33 *a*) 26.6°. *b*) **B** = $P\sqrt{5}/2$ ⦤ 26.6°;
C = $P\sqrt{5}/2$ ⦦ 26.6°.
4.34 *a*) 45.0°. *b*) **B** = $P\sqrt{2}$ ⦤ 45.0°; **C** = P ←.
4.35 $T = 0.566P$; **C** = $0.364P$ →.
4.37 *a*) 600 N. *b*) **A** = 4.00 kN ←; **B** = 4.00 kN →.
4.38 *a*) **A** = 953 N ⦥ 80.0°; **B** = 435 N ⦥ 55.0°.
b) 415 N →.
4.39 *a*) 4.24 lb.
b) $\mathbf{N}_A$ = 5.80 lb ⦥ 45.0°; $\mathbf{N}_D$ = 5.80 lb ⦣ 45.0°.
4.40 *a*) 0. *b*) 3.00 lb.
c) $\mathbf{N}_A$ = 3.67 lb ⦥ 45.0°; $\mathbf{N}_D$ = 3.67 lb ⦣ 45.0°.
4.41 **A** = **D** = 0; **B** = 868 N →; **C** = 126.1 N ←.
4.42 **A** = **C** = 0; **B** = 422 N ←; **D** = 45.2 N ←.
4.45 *a*) **A** = 98.1 N ↑; $\mathbf{M}_A$ = 44.1 N · m ↺.
b) **A** = 138.7 N ⦣ 45.0°; $\mathbf{M}_A$ = 44.1 N · m ↺.
c) **A** = 196.2 N ↑; $\mathbf{M}_A$ = 88.3 N · m ↺.
4.46 **C** = 16.97 lb ⦣ 45.0°; $\mathbf{M}_C$ = 2.40 lb · in. ↺.
4.48 *a*) **A** = 3.00 lb ↑; $\mathbf{M}_A$ = 28.0 lb · in. ↺.
b) **A** = 1.800 lb ↑; $\mathbf{M}_A$ = 8.80 lb · in. ↺.
4.50 *a*) **E** = 39.6 kN ↑; $\mathbf{M}_E$ = 64.8 kN · m ↻.
b) **E** = 21.6 kN ↑; $\mathbf{M}_E$ = 91.8 kN · m ↻.
4.51 *a*) 50.4 kN. *b*) M_E = 51.8 kN · m.
4.52 $T_{máx}$ = 1.999 kN; $T_{mín}$ = 1.560 kN.
4.53 *a*) $\text{sen}^{-1}(2M/mgl)$. *b*) 20.1°.
4.54 *a*) 30.0°. *b*) −15.00°.
4.56 32.0°.
4.57 *a*) $2\ \text{sen}^{-1}[kl/\sqrt{2}(kl - P)]$. *b*) 141.1°.
4.59 *a*) $\tan^{-1}(P/kl)$. *b*) 63.4°.
4.60 *a*) $\tan\theta - \text{sen}\,\theta = W/2kl$. *b*) 50.6°.
4.61 (1) Completamente restringido; determinado; equilibrio; **A** = 116.6 N ⦣ 59.0°. **B** = 60.0 N ←. (2) Impropiamente restringido; no determinado; sin equilibrio. (3) Parcialmente restringido; determinado; equilibrio; **A** = **C** = 50 N ↑. (4) Completamente restringido; determinado; equilibrio; **A** = 50 N ↑, **B** = 78.1 N ⦥ 39.8°, **C** = 60 N →. (5) Completamente restringido; no determinado; equilibrio; $\mathbf{A}_y$ = 50 N ↑. (6) Completamente restringido; no determinado; equilibrio; $\mathbf{A}_x$ = 60 N →, $\mathbf{B}_x$ = 60 N ←. (7) Completamente restringido; determinado; equilibrio; **A** = **C** = 50 N ↑. (8) Impropiamente restringido; no determinado; sin equilibrio.
4.63 P = 120.0 N; **A** = 150.0 N ⦥ 36.9°.
4.64 a ≥ 57.7 mm.
4.65 *a*) 7.70 lb/in. *b*) 11.05 lb ⦥ 13.60°.
4.67 *a*) **A** = 150.0 lb ↓; **C** = 167.7 lb ⦥ 63.4°.
b) **A** = 194.5 lb ↓; **C** = 253 lb ⦥ 77.9°.
4.69 $\mathbf{F}_{barreta}$ = 1.018 kN ↑; **B** = 1.027 kN ⦥ 82.7°.
4.70 76.9 mm.
4.71 $\mathbf{F}_{trabajador}$ = 314 N ⦣ 76.3°; **B** = 227 N ⦥ 70.9°.
4.73 43.0 lb ⦥ 80.8°.
4.74 44.1 lb ⦣ 80.9°.
4.76 77.5 N ⦣ 30.0°.
4.77 *a*) 44.0 lb ⦥ 65.3°. *b*) 46.6 lb ↑. *c*) 88.5 lb.
4.78 *a*) 2.61 kips ⦥ 75.0°. *b*) 2.36 kips ⦤ 73.4°.
4.79 *a*) 440 N. *b*) 550 N ⦦ 36.9°.
4.80 T = 122.4 lb; **C** = 194.7 lb ⦤ 33.7°.
4.81 *a*) 10.29 lb ⦤ 45.0°. *b*) 87.6 lb ⦥ 85.2°.
4.82 *a*) 15.26 lb ⦤ 30.0°. *b*) 88.6 lb ⦥ 81.4°.
4.84 *a*) 95.4 lb. *b*) 142.9 lb ⦥ 60.5°.
4.86 *a*) $2.77R$.
b) **A** = $1.303mg$ ⦣ 60.7°; **B** = $0.652mg$ ⦦ 12.15°.
4.87 *a*) 19.90 lb ⦥ 39.3°. *b*) 99.6 lb ⦣ 72.0°.
4.89 34.5°.
4.90 $\tan\theta = 2\tan\beta$.
4.91 *a*) 43.0°. *b*) **A** = 45.7 N ←; **B** = 108.2 N ⦣ 65.0°.

4.92 $\text{sen}^{-1}(a/L)^{1/3}$.

4.93 15.04°.

4.95 *a)* 18.43°. *b)* $mg/5$.

4.96 $\mathbf{A} = (120.0\ \text{N})\mathbf{j} + (133.3\ \text{N})\mathbf{k}$; $\mathbf{D} = (60.0\ \text{N})\mathbf{j} + (166.7\ \text{N})\mathbf{k}$.

4.97 $\mathbf{C} = (192.6\ \text{lb})\mathbf{j} - (168.4\ \text{lb})\mathbf{k}$; $\mathbf{D} = -(626\ \text{lb})\mathbf{j} + (95.4\ \text{lb})\mathbf{k}$.

4.98 $\mathbf{C} = (37.9\ \text{lb})\mathbf{j} - (96.0\ \text{lb})\mathbf{k}$; $\mathbf{D} = -(833\ \text{lb})\mathbf{j} + (192.0\ \text{lb})\mathbf{k}$.

4.100 *a)* 150.0 N. *b)* $\mathbf{C} = -(12.08\ \text{N})\mathbf{j} - (120.0\ \text{N})\mathbf{k}$;
$\mathbf{D} = (52.3\ \text{N})\mathbf{j} - (180.0\ \text{N})\mathbf{k}$.

4.102 $\mathbf{N}_A = 371\ \text{N} \downarrow$; $\mathbf{N}_B = 618\ \text{N} \downarrow$; $\mathbf{N}_C = 679\ \text{N} \downarrow$.

4.103 34.0 kg; $x = 0.600$ m, $z = 1.200$ m.

4.104 $T_A = 5.00$ lb; $T_C = 3.18$ lb; $T_D = 21.8$ lb.

4.106 *a)* $\mathbf{A}_y = 0.656\ \text{lb} \uparrow$; $\mathbf{B}_y = \mathbf{C}_y = 0.1569\ \text{lb} \uparrow$. *b)* 62.0°.

4.107 $T_A = W/3$; $T_B = 2W(\sqrt{3} - 1)/3\sqrt{3}$; $T_C = 2W/3\sqrt{3}$.

4.108 *a)* $T_A = T_B = W/3$; $T_C = 4W/3$.
b) $x = L(2 - \sqrt{3})/3$, $z = L[1 - (1/2\sqrt{3})]$.

4.109 *a)* 450 mm. *b)* $R_A = 48.2$ N; $R_B = R_C = 43.4$ N.

4.111 *a)* 13.50 lb $\uparrow$. *b)* 0. *c)* 13.50 lb $\uparrow$.

4.112 $T_{BD} = T_{BE} = 176.8$ lb; $\mathbf{C} = -(50.0\ \text{lb})\mathbf{j} + (217\ \text{lb})\mathbf{k}$.

4.114 *a)* $T_{BE} = 857$ N; $T_{BF} = 455$ N.
b) $\mathbf{A} = (73.9\ \text{N})\mathbf{i} + (878\ \text{N})\mathbf{j} - (127.9\ \text{N})\mathbf{k}$.

4.115 *a)* 29.7°. *b)* 586 N.
c) $\mathbf{A} = (72.0\ \text{N})\mathbf{i} + (842\ \text{N})\mathbf{j} - (126.0\ \text{N})\mathbf{k}$.

4.116 $T_{AD} = 2\,160$ N; $T_{BE} = 2\,990$ N;
$\mathbf{C} = (4\,480\ \text{N})\mathbf{i} - (213\ \text{N})\mathbf{j} + (320\ \text{N})\mathbf{k}$.

4.117 $T_{AD} = 1\,890$ N; $T_{BE} = 2\,610$ N;
$\mathbf{C} = (3\,920\ \text{N})\mathbf{i} - (76.7\ \text{N})\mathbf{j} + (280\ \text{N})\mathbf{k}$.

4.118 $T_{EG} = 440$ lb; $T_{ICFH} = 515$ lb;
$\mathbf{D} = (1\,153\ \text{lb})\mathbf{i} - (132.2\ \text{lb})\mathbf{j} - (9.09\ \text{lb})\mathbf{k}$.

4.120 *a)* 116.6 lb.
b) $\mathbf{A} = -(72.7\ \text{lb})\mathbf{j} - (38.1\ \text{lb})\mathbf{k}$; $\mathbf{B} = (37.5\ \text{lb})\mathbf{j}$.

4.121 *a)* 93.5 lb. *b)* $\mathbf{E} = (26.2\ \text{lb})\mathbf{i} - (38.1\ \text{lb})\mathbf{k}$;
$\mathbf{F} = (28.8\ \text{lb})\mathbf{i} + (44.0\ \text{lb})\mathbf{j} + (120.6\ \text{lb})\mathbf{k}$.

4.122 *a)* 97.1 N. *b)* $\mathbf{A} = -(23.5\ \text{N})\mathbf{i} + (63.8\ \text{N})\mathbf{j} - (7.85\ \text{N})\mathbf{k}$;
$\mathbf{B} = (9.81\ \text{N})\mathbf{j} + (66.7\ \text{N})\mathbf{k}$.

4.123 *a)* 233 N. *b)* $\mathbf{A} = (183.9\ \text{N})\mathbf{i} + (63.8\ \text{N})\mathbf{j} + (139.0\ \text{N})\mathbf{k}$;
$\mathbf{B} = (9.81\ \text{N})\mathbf{j} - (16.35\ \text{N})\mathbf{k}$.

4.125 *a)* 97.9 N. *b)* $\mathbf{A} = (50.4\ \text{N})\mathbf{j} - (4.75\ \text{N})\mathbf{k}$;
$\mathbf{B} = -(5.34\ \text{N})\mathbf{i} - (77.8\ \text{N})\mathbf{j} + (22.6\ \text{N})\mathbf{k}$.

4.126 $F_{CE} = 202$ lb; $\mathbf{A} = -(56.3\ \text{lb})\mathbf{i}$;
$\mathbf{B} = -(56.2\ \text{lb})\mathbf{i} + (150.0\ \text{lb})\mathbf{j} - (75.0\ \text{lb})\mathbf{k}$.

4.128 *a)* 5.60 lb. *b)* $\mathbf{D} = (1.500\ \text{lb})\mathbf{k}$;
$\mathbf{M}_D = (1.320\ \text{lb} \cdot \text{in.})\mathbf{i} + (10.08\ \text{lb} \cdot \text{in.})\mathbf{j} + (0.896\ \text{lb} \cdot \text{in.})\mathbf{k}$.

4.130 *a)* $F_{CF} = 44.4$ N; $F_{DE} = 18.47$ N.
b) $\mathbf{B} = (81.3\ \text{N})\mathbf{j} - (8.21\ \text{N})\mathbf{k}$;
$\mathbf{M}_B = (1.149\ \text{N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (0.657\ \text{N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$.

4.131 *a)* 39.4 N. *b)* $\mathbf{B} = -(7.63\ \text{N})\mathbf{i} + (34.3\ \text{N})\mathbf{j} + (17.80\ \text{N})\mathbf{k}$;
$\mathbf{M}_B = -(3.56\ \text{N} \cdot \text{m})\mathbf{j} - (22.3\ \text{N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$.

4.132 $T_{BD} = 780$ lb; $T_{BE} = T_{CF} = 650$ lb;
$\mathbf{A} = (1\,920\ \text{lb})\mathbf{i} - (300\ \text{lb})\mathbf{k}$.

4.134 $T_{DI} = 164.8$ N; $T_{EH} = 933$ N; $T_{FG} = 187.8$ N;
$\mathbf{A} = (1\,094\ \text{N})\mathbf{i} + (98.7\ \text{N})\mathbf{j} - (21.3\ \text{N})\mathbf{k}$.

4.135 $T_{DI} = 180.6$ N; $T_{EH} = 960$ N; $T_{FG} = 100.9$ N;
$\mathbf{A} = (1\,067\ \text{N})\mathbf{i} + (110.4\ \text{N})\mathbf{j} - (11.45\ \text{N})\mathbf{k}$.

4.136 $\mathbf{A} = -(20.0\ \text{lb})\mathbf{j} + (40.0\ \text{lb})\mathbf{k}$; $\mathbf{B} = -(30.0\ \text{lb})\mathbf{i} - (16.00\ \text{lb})\mathbf{j}$;
$\mathbf{C} = (30.0\ \text{lb})\mathbf{i} + (36.0\ \text{lb})\mathbf{j}$.

4.138 $\mathbf{B} = (104.0\ \text{N})\mathbf{k}$; $\mathbf{C} = (36.0\ \text{N})\mathbf{j} - (36.0\ \text{N})\mathbf{k}$;
$\mathbf{D} = -(36.0\ \text{N})\mathbf{j} + (12.00\ \text{N})\mathbf{k}$.

4.140 *a)* 7.24 N. *b)* $\mathbf{A} = -(4.48\ \text{N})\mathbf{i} + (20.2\ \text{N})\mathbf{j} - (1.379\ \text{N})\mathbf{k}$;
$\mathbf{N}_B = (3.68\ \text{N})\mathbf{j} + (2.76\ \text{N})\mathbf{k}$.

4.141 *a)* $(3.20\ \text{lb})\mathbf{i} + (4.27\ \text{lb})\mathbf{j}$.
b) $\mathbf{A} = -(3.20\ \text{lb})\mathbf{i} + (5.73\ \text{lb})\mathbf{j} - (3.00\ \text{lb})\mathbf{k}$; $\mathbf{B} = (3.00\ \text{lb})\mathbf{k}$.

4.142 127.6 N.

4.143 125.8 N.

4.144 100.7 lb.

4.145 182.4 lb.

4.146 *a)* $x = 6.00$ ft, $y = 12.00$ ft. *b)* 26.8 lb.

4.147 *a)* $x = 0$, $y = 24.0$ ft. *b)* 28.3 lb.

4.148 37.8 N.

4.150 42.0 lb.

4.152 300 mm $\leq d \leq$ 800 mm.

4.153 932 N.

4.155 $\mathbf{C} = 457\ \text{lb} \measuredangle 88.1°$; $\mathbf{M}_C = 769\ \text{lb} \cdot \text{in.} \curvearrowright$.

4.157 *a)* 183.1 lb. *b)* 177.5 lb $\measuredangle$ 32.3°.

4.158 75.0 mm.

4.159 $\mathbf{A} = (112.3\ \text{N})\mathbf{i} + (41.7\ \text{N})\mathbf{j}$; $\mathbf{B} = (112.3\ \text{N})\mathbf{i} + (125.1\ \text{N})\mathbf{j}$;
$\mathbf{C} = -(225\ \text{N})\mathbf{i}$.

4.161 *a)* 100.1 lb. *b)* $\mathbf{A} = (33.3\ \text{lb})\mathbf{i} + (109.6\ \text{lb})\mathbf{j} + (41.1\ \text{lb})\mathbf{k}$;
$\mathbf{B} = (32.9\ \text{lb})\mathbf{j} + (53.9\ \text{lb})\mathbf{k}$.

4.162 $T_{BG} = 400$ lb; $T_{DH} = 300$ lb; $T_{FJ} = 0$;
$\mathbf{A} = (500\ \text{lb})\mathbf{i} - (240\ \text{lb})\mathbf{k}$.

CAPÍTULO 5

5.1 $\bar{X} = 140.0$ mm, $\bar{Y} = 165.0$ mm.

5.2 $\bar{X} = 8.22$ in., $\bar{Y} = 4.00$ in.

5.3 $\bar{X} = 105.0$ mm, $\bar{Y} = 90.0$ mm.

5.5 $\bar{X} = 18.02$ mm, $\bar{Y} = 84.9$ mm.

5.6 $\bar{X} = 8.32$ in., $\bar{Y} = 3.61$ in.

5.8 $\bar{X} = 68.2$ mm, $\bar{Y} = 4.55$ mm.

5.9 3.02.

5.10 $\dfrac{r_1 + r_2}{\pi - 2\alpha} \cos \alpha$.

5.11 $\bar{X} = 8.56$ in., $\bar{Y} = 0$.

5.13 $\bar{X} = -3.17$ in., $\bar{Y} = 0.668$ in.

5.14 $\bar{X} = 90.0$ mm, $\bar{Y} = 26.8$ mm.

5.16 $\bar{X} = 80.4$ mm, $\bar{Y} = 82.9$ mm.

5.17 $(Q_x)_1 = 174.1\ \text{in}^3$; $(Q_x)_2 = -174.1\ \text{in}^3$.

5.18 $(Q_x)_1 = 42.3 \times 10^3\ \text{mm}^3$; $(Q_x)_2 = -42.3 \times 10^3\ \text{mm}^3$.

5.21 $\bar{X} = 116.7$ mm, $\bar{Y} = 166.7$ mm.

5.22 $\bar{X} = 8.71$ in., $\bar{Y} = 4.32$ in.

5.23 $\bar{X} = 54.9$ mm, $\bar{Y} = 71.8$ mm.

5.24 $\bar{X} = 60.1$ mm, $\bar{Y} = -3.16$ mm.

5.25 *a)* 0.350 lb. *b)* 1.458 lb $\measuredangle$ 83.1°.

5.26 63.6°.

5.27 319 mm.

5.28 *a)* $1.427r$. *b)* $2.11r$.

5.31 $\bar{x} = 2a/3$, $\bar{y} = 2h/3$.

5.32 $\bar{x} = 2a/5$, $\bar{y} = 3h/7$.

5.35 $\bar{x} = 2a/3(\pi - 2)$, $\bar{y} = 2b/3(\pi - 2)$.

5.36 $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \dfrac{2}{3} R \dfrac{3 - \text{sen}^2 \alpha}{2\alpha + \text{sen}\, 2\alpha} \text{sen}\, \alpha$.

5.37 $\bar{x} = a/4$, $\bar{y} = 3b/10$.

5.38 $\bar{x} = 39a/50$, $\bar{y} = -39b/175$.

5.39 $\bar{x} = 2L/5$, $\bar{y} = 12h/25$.

5.40 $\bar{x} = 18a/19$, $\bar{y} = 148b/95$.

5.42 $-2r\sqrt{2}/3\pi$.

5.43 $2a/5$.

5.45 $\bar{x} = 0.363L$, $\bar{y} = 0.1653L$.

5.46 $\bar{x} = 0.549R$, $\bar{y} = 0$.

5.47 *a)* $V = 1.949\ \text{ft}^3$; $A = 10.56\ \text{ft}^2$. *b)* $V = 5.25\ \text{ft}^3$;
$A = 25.1\ \text{ft}^2$.

5.49 *a)* $V = 155.5 \times 10^6\ \text{mm}^3$; $A = 1.885 \times 10^6\ \text{mm}^2$.
b) $V = 245 \times 10^6\ \text{mm}^3$; $A = 3.20 \times 10^6\ \text{mm}^2$.

5.50 *a)* $\pi^2 a^2 b$. *b)* $2\pi^2 a^2 b$. *c)* $2\pi a^2 b/3$.

5.51 $V = 2.10\ \text{in}^3$; $A = 16.83\ \text{in}^2$.

5.53 $720\ \text{mm}^3$.

5.55 $V = 255 \times 10^3\ \text{mm}^3$; $A = 37.5 \times 10^3\ \text{mm}^2$.

5.57 5.13 kips.

5.58 648 gal.
5.59 30.5 g.
5.61 *a)* $R = 1\,764$ N; 3.80 m a la derecha de *A*. *b)* $\mathbf{A} = 1\,764$ N $\uparrow$; $\mathbf{M}_A = 6.70$ kN · m $\circlearrowleft$.
5.62 *a)* $R = 720$ lb; 11.25 ft a la derecha de *A*. *b)* $\mathbf{A} = 270$ lb $\uparrow$; $\mathbf{B} = 450$ lb $\uparrow$.
5.63 $\mathbf{A} = 1.280$ kN $\uparrow$; $\mathbf{B} = 4.48$ kN $\uparrow$.
5.64 $\mathbf{A} = 6.00$ kN $\uparrow$; $\mathbf{B} = 4.80$ kN $\uparrow$.
5.66 $\mathbf{A} = 90.0$ lb $\uparrow$; $\mathbf{M}_A = 675$ lb · ft $\circlearrowleft$.
5.67 $\mathbf{A} = 7.20$ kN $\uparrow$; $\mathbf{B} = 3.60$ kN $\uparrow$.
5.69 $\mathbf{B} = 7.04$ kN $\uparrow$; $\mathbf{C} = 15.46$ kN $\uparrow$.
5.71 *a)* 1.172 m. *b)* $\mathbf{A} = 3.53$ kN $\uparrow$; $\mathbf{B} = 7.06$ kN $\uparrow$.
5.73 $w_A = 556$ lb/ft; $R_B = 7.25$ kips.
5.74 *a)* 1.527 kips $\downarrow$. *b)* 1.630 kips/ft.
5.75 *a)* $\mathbf{H} = 17.97$ kips $\rightarrow$; $\mathbf{V} = 120.3$ kips $\uparrow$. *b)* 15.63 ft a la derecha de *A*. *c)* $\mathbf{R} = 18.06$ kips $\measuredangle$ 5.71°.
5.76 *a)* $\mathbf{H} = 176.6$ kN $\rightarrow$; $\mathbf{V} = 1\,350$ kN $\uparrow$. *b)* 5.09 m a la derecha de *A*. *c)* $\mathbf{R} = 236$ kN $\measuredangle$ 41.6°.
5.78 100.0 mm.
5.79 $\mathbf{B} = 1\,200$ lb $\rightarrow$; $\mathbf{A} = 1\,190$ lb $\rightarrow$.
5.80 4.75%.
5.82 *a)* 2.35 kN $\leftarrow$. *b)* 1.782 kN $\downarrow$. *c)* 5.31 kN $\uparrow$.
5.83 1.337 kN $\leftarrow$.
5.84 $\mathbf{A} = 44.6$ kips $\measuredangle$ 65.2°; $\mathbf{B} = 43.8$ kips $\uparrow$.
5.85 27.3 in.
5.87 $\mathbf{A} = 4\,020$ N $\measuredangle$ 44.1°; $\mathbf{D} = 124.1$ N $\rightarrow$.
5.88 0.782 m.
5.90 *a)* $-1.118R$. *b)* 0.884.
5.91 $7h/16$.
5.92 $-3a/4\pi$.
5.93 *a)* $0.548L$. *b)* $2\sqrt{3}$.
5.94 -1.312 mm.
5.95 51.4 mm.
5.98 3.21 in.
5.99 0.976 in.
5.100 $\overline{X} = 360$ mm, $\overline{Y} = 266$ mm, $\overline{Z} = -60.7$ mm.
5.101 $\overline{X} = 2.41$ in., $\overline{Y} = 3.41$ in., $\overline{Z} = 3.79$ in.
5.102 $\overline{X} = 150.0$ mm, $\overline{Y} = 200$ mm, $\overline{Z} = 40.2$ mm.
5.103 $\overline{X} = 136.2$ mm, $\overline{Y} = 197.8$ mm, $\overline{Z} = 180.0$ mm.
5.104 $\overline{X} = 9.00$ in., $\overline{Y} = -20.4$ in., $\overline{Z} = 12.81$ in.
5.106 $\overline{X} = 340$ mm, $\overline{Y} = 314$ mm, $\overline{Z} = 283$ mm.
5.108 $\overline{X} = 205$ mm, $\overline{Y} = 255$ mm, $\overline{Z} = 75.0$ mm.
5.109 $\overline{X} = 116.7$ mm, $\overline{Y} = 103.0$ mm, $\overline{Z} = 78.7$ mm.
5.111 $\overline{X} = 3.20$ ft, $\overline{Y} = 4.01$ ft, $\overline{Z} = 3.00$ ft.
5.113 5.35 mm.
5.114 50 mm.
5.115 3.44 in. arriba de la cara inferior de la base.
5.116 $\bar{x}_1 = 21a/88$; $\bar{x}_2 = 27a/40$.
5.117 $\bar{x}_1 = 21h/88$; $\bar{x}_2 = 27h/40$.
5.119 $\bar{x} = 5a/16$, $\bar{y} = \bar{z} = 0$.
5.121 $\bar{x} = a$, $\bar{y} = 77b/100$, $\bar{z} = 0$.
5.122 $\bar{x} = a[1 - (4/\pi^2)]/2$, $\bar{y} = \bar{z} = 0$.
5.123 $\bar{x} = \bar{z} = 0$, $\bar{y} = h(2 + \pi)/16$.
5.128 $b(\frac{1}{2}y_0 - \frac{1}{4}y_1 - \frac{1}{3}y_2)/(y_0 - \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2)$.
5.129 $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 5h/16$, $\bar{z} = -a/4$.
5.130 $\overline{X} = 1.421$ mm, $\overline{Y} = 12.42$ mm.
5.131 $\overline{X} = 5.95$ in., $\overline{Y} = 14.41$ in.
5.133 12.00 in.
5.134 $\overline{X} = 2a/5$, $\bar{y} = 4h/7$.
5.136 15.26 gal.
5.138 $\mathbf{A} = 3.33$ kN $\uparrow$; $\mathbf{M}_A = 6.33$ kN · m $\circlearrowleft$.
5.139 8.32 ft.
5.141 $\overline{X} = 20.4$ mm, $\overline{Y} = -4.55$ mm, $\overline{Z} = 29.0$ mm.

CAPÍTULO 6

6.1 $F_{AB} = 1\,500$ lb *T*; $F_{AC} = 800$ lb *T*; $F_{BC} = 1\,700$ lb *C*.
6.2 $F_{AB} = 3.39$ kN *C*; $F_{AC} = 2.60$ kN *T*; $F_{BC} = 3.00$ kN *C*.
6.3 $F_{AB} = 1\,080$ lb *T*; $F_{AC} = 1\,800$ lb *C*; $F_{BC} = 1\,170$ lb *C*.
6.5 $F_{AB} = F_{AE} = 6.71$ kN *T*; $F_{AC} = F_{AD} = 10.00$ kN *C*; $F_{BC} = F_{DE} = 6.00$ kN *C*; $F_{CD} = 2.00$ kN *T*.
6.6 $F_{AB} = 21.9$ kN *C*; $F_{AD} = 40.6$ kN *T*; $F_{BC} = 18.50$ kN *C*; $F_{BD} = 30.4$ kN *C*; $F_{CD} = 18.50$ kN *T*.
6.7 $F_{AB} = 4.00$ kN *T*; $F_{AD} = 15.00$ kN *T*; $F_{BD} = 9.00$ kN *C*; $F_{BE} = 5.00$ kN *T*; $F_{CD} = 16.00$ kN *C*; $F_{DE} = 4.00$ kN *C*.
6.9 $F_{AB} = F_{BC} = F_{CD} = 24.0$ kips *T*; $F_{AE} = 38.4$ kips *T*; $F_{AF} = 30.0$ kips *C*; $F_{BF} = F_{BG} = F_{CG} = F_{CH} = 0$; $F_{DH} = F_{FG} = F_{GH} = 26.0$ kips *C*; $F_{EF} = 24.0$ kips *C*.
6.10 $F_{AB} = F_{FH} = 5.00$ kips *C*; $F_{AC} = F_{CE} = F_{EG} = F_{GH} = 4.00$ kips *T*; $F_{BC} = F_{FG} = 0$; $F_{BD} = F_{DF} = 3.98$ kips *C*; $F_{BE} = F_{EF} = 0.238$ kip *C*; $F_{DE} = 0.286$ kip *T*.
6.12 $F_{AB} = F_{EG} = 17.50$ kN *C*; $F_{AC} = F_{FG} = 15.08$ kN *T*; $F_{BC} = F_{EF} = 2.26$ kN *C*; $F_{BD} = F_{DE} = 15.50$ kN *C*; $F_{CD} = F_{DF} = 9.00$ kN *T*; $F_{CF} = 7.00$ kN *T*.
6.13 $F_{AB} = 15.00$ kN *C*; $F_{AC} = 12.92$ kN *T*; $F_{BC} = 2.26$ kN *C*; $F_{BD} = 13.00$ kN *C*; $F_{CD} = 8.00$ kN *T*; $F_{CF} = 5.60$ kN *T*; $F_{DE} = 10.00$ kN *C*; $F_{DF} = 4.00$ kN *T*; $F_{EF} = 0$; $F_{EG} = 10.00$ kN *C*; $F_{FG} = 8.62$ kN *T*.
6.15 $F_{AB} = 6.01$ kN *C*; $F_{AC} = 3.33$ kN *T*; $F_{BC} = 0.601$ kN *C*; $F_{BD} = 5.41$ kN *C*; $F_{CD} = 0.850$ kN *T*; $F_{CG} = 0.583$ kN *C*; $F_{CI} = 3.47$ kN *T*; $F_{DE} = 9.28$ kN *C*; $F_{DF} = 6.00$ kN *T*; $F_{EF} = 0$.
6.16 $F_{CG} = 0.583$ kN *C*; $F_{CI} = 3.47$ kN *T*; $F_{EF} = 0$; $F_{EG} = 9.28$ kN *C*; $F_{FG} = 6.00$ kN *T*; $F_{GH} = 6.25$ kN *C*; $F_{GI} = 0.500$ kN *T*; $F_{HI} = 0.601$ kN *C*; $F_{HJ} = 6.85$ kN *C*; $F_{IJ} = 3.80$ kN *T*.
6.17 $F_{AB} = 3.61$ kips *C*; $F_{AC} = 4.11$ kips *T*; $F_{BC} = 0.768$ kip *C*; $F_{BD} = 3.84$ kips *C*; $F_{CD} = 1.371$ kips *T*; $F_{CE} = 2.74$ kips *T*; $F_{DE} = 1.536$ kips *C*.
6.18 $F_{DF} = 4.06$ kips *C*; $F_{DG} = 1.371$ kips *T*; $F_{EG} = 2.74$ kips *T*; $F_{FG} = 0.768$ kip *C*; $F_{FH} = 4.29$ kips *C*; $F_{GH} = 4.11$ kips *T*.
6.19 $F_{AB} = 10.06$ kN *C*; $F_{AC} = 9.00$ kN *T*; $F_{BC} = 2.81$ kN *C*; $F_{BD} = 14.64$ kN *C*; $F_{BE} = 4.16$ kN *T*; $F_{CE} = 9.43$ kN *T*; $F_{DE} = 2.05$ kN *C*; $F_{DF} = 18.45$ kN *C*; $F_{DG} = 3.43$ kN *T*; $F_{EG} = 13.72$ kN *T*.
6.23 $F_{AB} = 8.97$ kN *C*; $F_{AC} = 8.28$ kN *T*; $F_{BC} = 3.45$ kN *C*; $F_{BD} = 14.04$ kN *C*; $F_{BE} = 4.68$ kN *T*; $F_{CE} = 8.97$ kN *T*; $F_{CF} = F_{EF} = 0$; $F_{DE} = 5.61$ kN *T*; $F_{DG} = 8.60$ kN *C*; $F_{DH} = 7.10$ kN *C*; $F_{EH} = 13.14$ kN *T*.
6.25 $F_{AB} = 430$ lb *C*; $F_{AC} = 255$ lb *T*; $F_{BC} = 1\,319$ lb *T*; $F_{BD} = 1\,700$ lb *C*; $F_{CD} = 986$ lb *T*; $F_{CE} = 744$ lb *T*; $F_{DE} = 1\,050$ lb *T*; $F_{DF} = 1\,750$ lb *C*; $F_{EF} = 1\,565$ lb *T*; $F_{EG} = 0$; $F_{FG} = 350$ lb *C*.
6.26 $F_{AB} = F_{BD} = 8.20$ kips *T*; $F_{AC} = 8.00$ kips *C*; $F_{BC} = 0.600$ kip *C*; $F_{CD} = 1.342$ kips *T*; $F_{CE} = 9.20$ kips *C*; $F_{DE} = 0.330$ kip *C*; $F_{DG} = 9.43$ kips *T*; $F_{EF} = 9.99$ kips *C*; $F_{EG} = 0.858$ kip *T*; $F_{FG} = 7.99$ kips *C*; $F_{FH} = 6.00$ kips *C*.
6.27 Las armaduras de los problemas 6.14, 6.15 y 6.23 son armaduras simples.
6.28 Las armaduras de los problemas 6.21, 6.25 y 6.29 son armaduras simples.
6.29 *BE*, *EI*, *FG*, *GH*, *HI*, *IJ*.
6.30 *AI*, *DI*, *EI*, *FK*, *GK*.
6.31 *BC*, *BE*, *DE*, *FH*, *HI*, *IJ*, *OQ*, *QR*.
6.33 *BC*, *LM*.

6.35 *a)* *BF*, *BG*, *CG*, *CH*. *b)* *BE*, *EI*, *FG*, *GH*, *HI*, *IJ*.

6.36 F_{AB} = 975 N *C*; F_{AC} = 5.00 N *T*; F_{AD} = 5.93 kN *C*; F_{BC} = 611 N *C*; F_{BD} = 4.94 kN *T*; F_{CD} = 1.335 kN *T*.

6.37 F_{AB} = 1.395 kN *C*; F_{AC} = 415 N *C*; F_{AD} = 4.24 kN *C*; F_{BC} = 672 N *T*; F_{BD} = 4.94 kN *T*; F_{CD} = 534 N *C*.

6.38 F_{AB} = 335 lb *C*; F_{AC} = 0; F_{AD} = 375 lb *T*; F_{AE} = 75.0 lb *T*; F_{BC} = 100.0 lb *T*; F_{BD} = 150.0 lb *C*; F_{CD} = 141.4 lb *C*; F_{CE} = 50.0 lb *C*; F_{DE} = 25.0 lb *C*.

6.39 $F_{AB} = F_{AD} = F_{BC} = 0$; F_{AC} = 1700 N *C*; F_{AE} = 2 130 N *T*; F_{BD} = 1 275 N *T*; $F_{BE} = F_{CD}$ = 1 125 N *C*; F_{DE} = 600 N *C*.

6.40 *b)* F_{AE} = 252 lb *T*; F_{BE} = 373 lb *C*; $F_{DE} = F_{EF} = 0$; F_{EG} = 365 lb *T*; F_{EH} = 240 lb *C*.

6.41 *b)* F_{BG} = 348 lb *C*; $F_{CG} = F_{DG} = F_{FG} = 0$; F_{EG} = 365 lb *T*; F_{GH} = 275 lb *C*.

6.42 F_{CF} = 3.25 kips *T*; F_{EF} = 0.1398 kip *T*; F_{EG} = 3.38 kips *C*.

6.43 F_{FI} = 2.75 kips *T*; F_{HI} = 1.258 kips *C*; F_{HJ} = 1.625 kips *C*.

6.44 F_{BD} = 2.14 kN *C*; F_{BE} = 429 N *C*; F_{CE} = 2.47 kN *T*.

6.46 F_{CE} = 14.35 kN *T*; F_{DE} = 11.41 kN *T*; F_{DF} = 25.6 kN *C*.

6.48 F_{DF} = 13.00 kN *C*; F_{DG} = 4.22 kN *C*; F_{EG} = 16.22 kN *T*.

6.49 F_{GI} = 16.22 kN *T*; F_{HI} = 1.000 kN *T*; F_{HJ} = 17.33 kN *C*.

6.50 F_{BD} = 29.8 kN *C*; F_{CD} = 6.25 kN *T*; F_{CE} = 22.5 kN *T*.

6.51 F_{EG} = 16.88 kN *T*; F_{FG} = 8.01 kN *T*; F_{FH} = 22.3 kN *C*.

6.52 F_{CE} = 10.00 kips *C*; F_{DE} = 4.00 kips *C*; F_{EF} = 3.00 kips *T*.

6.53 F_{GI} = 4.00 kips *C*; F_{HI} = 15.00 kips *T*; F_{IJ} = 3.00 kips *T*.

6.55 F_{IK} = 0.707 kip *C*; F_{JL} = 0; F_{JM} = 6.35 kips *T*.

6.57 F_{GI} = 7.18 kips *T*; F_{HJ} = 8.03 kips *C*; F_{IJ} = 4.46 kips *C*.

6.58 F_{CE} = 7.34 kN *C*; F_{CF} = 3.58 kN *T*; F_{DF} = 2.35 kN *T*.

6.60 F_{DG} = 1.800 kips *C*; F_{FH} = 1.800 kips *T*.

6.62 F_{HK} = 53.9 kN *C*; F_{IK} = 57.3 kN *C*.

6.63 F_{EG} = 44.1 kN *T*; F_{FI} = 26.2 kN *C*.

6.64 F_{BD} = 15.31 kN *C*; F_{CD} = 2.42 kN *T*; F_{CE} = 13.26 kN *T*.

6.65 F_{BD} = 10.51 kN *C*; F_{BE} = 1.211 kN *T*; F_{CE} = 9.49 kN *T*.

6.67 F_{BE} = 10.00 kips *T*; F_{DE} = 0; F_{EF} = 5.00 kips *T*.

6.68 F_{CE} = 15.00 kN *T*; F_{DE} = 25.0 kN *T*; F_{DF} = 30.0 kN *C*.

6.70 *a)* Parcialmente restringida.
b) Parcialmente restringida.
c) Completamente restringida, estáticamente determinada.

6.71 *a)* Completamente restringida, estáticamente determinada.
b) Parcialmente restringida.
c) Impropiamente restringida.

6.73 *a)* Impropiamente restringida.
b) Parcialmente restringida.
c) Impropiamente restringida.

6.74 *a)* Completamente restringida, estáticamente determinada.
b) Parcialmente restringida.
c) Completamente restringida, estáticamente no determinada.

6.76 $\mathbf{A}_x$ = 120.0 lb →, $\mathbf{A}_y$ = 30.0 lb ↑; $\mathbf{B}_x$ = 120.0 lb ←, $\mathbf{B}_y$ = 80.0 lb ↓; **C** = 30.0 lb ↓; **D** = 80.0 lb ↑.

6.78 $\mathbf{C}_y$ = 1 824 N ↓; $\mathbf{D}_x$ = 1 824 N ←, $\mathbf{D}_y$ = 480 N ↓; $\mathbf{E}_x$ = 1 824 N →, $\mathbf{E}_y$ = 1 824 N ↑.

6.79 $\mathbf{C}_y$ = 1 600 N ↑; $\mathbf{D}_x$ = 1 600 N →, $\mathbf{D}_y$ = 0; $\mathbf{E}_x$ = 1 600 N ←, $\mathbf{E}_y$ = 1 600 N ↓.

6.80 *a)* 7.32 lb *C*. *b)* **A** = 6.26 lb ∠ 16.69°.

6.82 $\mathbf{A}_x$ = 356 N →; $\mathbf{B}_x$ = 229 N ←, $\mathbf{B}_y$ = 127.3 N ↑; $\mathbf{C}_x$ = 127.3 N ←, $\mathbf{C}_y$ = 178.2 N ↑; $\mathbf{D}_y$ = 305 N ↓.

6.83 $\mathbf{A}_x$ = 300 N →; $\mathbf{B}_x$ = 300 N ←, $\mathbf{B}_y$ = 0; $\mathbf{C}_x$ = 0, $\mathbf{C}_y$ = 300 N ↑; $\mathbf{D}_y$ = 300 N ↓.

6.84 *a)* $\mathbf{A}_x$ = 14.40 lb ←, $\mathbf{A}_y$ = 9.60 lb ↑; $\mathbf{E}_x$ = 14.40 lb →, $\mathbf{E}_y$ = 14.40 lb ↑. *b)* $\mathbf{A}_x$ = 6.40 lb ←, $\mathbf{A}_y$ = 1.600 lb ↑; $\mathbf{E}_x$ = 6.40 lb →, $\mathbf{E}_y$ = 22.4 lb ↑.

6.85 *a)* $\mathbf{A}_x$ = 120.0 N ←, $\mathbf{A}_y$ = 200 N ↑; $\mathbf{E}_x$ = 120.0 N →, $\mathbf{E}_y$ = 120.0 N ↑. *b)* $\mathbf{A}_x$ = 96.0 N ←, $\mathbf{A}_y$ = 96.0 N ↑; $\mathbf{E}_x$ = 96.0 N →, $\mathbf{E}_y$ = 224 N ↑.

6.86 *a)* $\mathbf{A}_x$ = 19.20 lb →, $\mathbf{A}_y$ = 19.20 lb ↑; $\mathbf{E}_x$ = 19.20 lb ←, $\mathbf{E}_y$ = 19.20 lb ↓. *b)* $\mathbf{A}_x$ = 51.2 lb →, $\mathbf{A}_y$ = 12.80 lb ↓; $\mathbf{E}_x$ = 51.2 lb ←, $\mathbf{E}_y$ = 12.80 lb ↑.

6.88 *a)* **A** = 78.0 lb ⦫ 22.6°; **C** = 144.0 lb →; **G** = 72.0 lb ←; **I** = 30.0 lb ↑. *b)* **A** = 78.0 lb ⦫ 22.6°; **C** = 72.0 lb →; **G** = 0; **I** = 30.0 lb ↑.

6.89 *a)* $\mathbf{B}_x$ = 200 N →, $\mathbf{B}_y$ = 40.0 N ↓; $\mathbf{F}_x$ = 200 N ←, $\mathbf{F}_y$ = 160.0 N ↑. *b)* $\mathbf{B}_x$ = 320 N →, $\mathbf{B}_y$ = 40.0 N ↓; $\mathbf{F}_x$ = 320 N ←, $\mathbf{F}_y$ = 160.0 N ↑. *c)* $\mathbf{B}_x$ = 320 N →, $\mathbf{B}_y$ = 40.0 N ↓; $\mathbf{F}_x$ = 320 N ←, $\mathbf{F}_y$ = 160.0 N ↑.

6.92 $\mathbf{A}_x$ = 400 lb →, $\mathbf{A}_y$ = 183.3 lb ↑; $\mathbf{E}_x$ = 400 lb ←, $\mathbf{E}_y$ = 257 lb ↑.

6.93 $\mathbf{A}_x$ = 308 lb →, $\mathbf{A}_y$ = 84.3 lb ↑; $\mathbf{E}_x$ = 308 lb ←, $\mathbf{E}_y$ = 356 lb ↑.

6.94 $\mathbf{A}_x$ = 17.00 N ←, $\mathbf{A}_y$ = 94.1 N ↑; $\mathbf{E}_x$ = 17.00 N →, $\mathbf{E}_y$ = 75.9 N ↑.

6.95 $\mathbf{A}_x$ = 45.0 N ←, $\mathbf{A}_y$ = 30.0 N ↓; $\mathbf{B}_x$ = 45.0 N →, $\mathbf{B}_y$ = 270 N ↑.

6.96 *a)* **A** = 15.76 kips ↑; **B** = 26.2 kips ↑. *b)* **C** = 34.6 kips ←; **D** = 34.7 kips ⦬ 4.10°.

6.97 *a)* **A** = 2.52 kips ↑; **B** = 31.5 kips ↑. *b)* **C** = 4.93 kips ←; **D** = 13.87 kips ⦬ 69.2°.

6.98 $\mathbf{A}_x$ = 10.80 kN ←, $\mathbf{A}_y$ = 7.00 kN ↑; $\mathbf{B}_x$ = 16.20 kN ←, $\mathbf{B}_y$ = 0.500 kN ↓; $\mathbf{D}_x$ = 27.0 kN →, $\mathbf{D}_y$ = 6.50 kN ↓.

6.100 $\mathbf{B}_x$ = 530 lb →, $\mathbf{B}_y$ = 385 lb ↓; $\mathbf{C}_x$ = 299 lb ←, $\mathbf{C}_y$ = 385 lb ↑.

6.101 $\mathbf{B}_x$ = 60.6 lb ←, $\mathbf{B}_y$ = 41.7 lb ↓; $\mathbf{C}_x$ = 60.6 lb →, $\mathbf{C}_y$ = 29.7 lb ↑.

6.103 *a)* *A′* y *B′*. *b)* 215 N.

6.104 *a)* $\mathbf{A}_x$ = 27.5 kips →, $\mathbf{A}_y$ = 16.25 kips ↑. *b)* $\mathbf{B}_x$ = 27.5 kips ←, $\mathbf{B}_y$ = 2.25 kips ↓.

6.105 *a)* $\mathbf{A}_x$ = 28.8 kips →, $\mathbf{A}_y$ = 19.38 kips ↑. *b)* $\mathbf{B}_x$ = 28.8 kips ←, $\mathbf{B}_y$ = 1.625 kips ↑.

6.106 *a)* 1009 lb ∠ 18.18°. *b)* 357 lb *T*.

6.108 $a \geq 0.600$ m.

6.109 F_{CF} = 9.00 kN *C*; F_{DG} = 6.00 kN *T*.

6.110 F_{BF} = 7.20 kN *T*; F_{DG} = 3.00 kN *C*.

6.111 F_{BG} = 6.00 kN *T*; F_{CH} = 3.00 kN *C*.

6.113 **A** = $3P/13$ ↑; **D** = $P/13$ ↑; **F** = $9P/13$ ↑.

6.114 **A** = $P/15$ ↑; **D** = $2P/15$ ↑; **E** = $8P/15$ ↑; **H** = $4P/15$ ↑.

6.115 *a)* El armazón no es rígido. *b)* Pueden encontrarse reacciones para un valor arbitrario de B_x; el armazón es rígido. *c)* **A** = $2.09P$ ⦪ 16.70°; **B** = $2.04P$ ∠ 11.31°; el armazón es rígido.

6.116 *a)* **A** = $2.06P$ ∠ 14.04°; **B** = $2.06P$ ⦪ 14.04°; el armazón es rígido. *b)* El armazón no es rígido. *c)* **A** = $1.250P$ ⦪ 36.9°; **B** = $1.031P$ ∠ 14.04°; el armazón es rígido.

6.117 *a)* **A** = $2.24P$ ∠ 26.6°; **B** = $2P$ →; el armazón es rígido. *b)* El armazón no es rígido. *c)* **A** = P ↑; **B** = P ↓; **C** = P ↑; el armazón es rígido.

6.118 *a)* 2.86 kN ↓. *b)* 2.70 kN ⦫ 68.5°.

6.119 *a)* 420 N. *b)* 2.83 kN ⦫ 68.5°.

6.122 *a)* 456 N ←. *b)* 505 N *T*.

6.123 113.7 lb ⦬ 16.17°.

6.124 101.0 lb ⦬ 18.89°.

6.125 995 lb · in. ↻.

6.127 *a)* 3.87 N · m ↻. *b)* 5.11 N · m ↻.

6.128 *a)* 248 N ←. *b)* 187.9 N ←.

6.129 9.38 N · m ↻.

6.130 46.3 N · m ↻.
6.131 9.13 N · m ↺.
6.132 7.50 N · m ↺.
6.133 2.77 kips · in. ↻.
6.136 **D** = 30.0 kN ←; **F** = 37.5 kN ∠ 36.9°.
6.137 **G** = 7.42 kN ↓; **H** = 3.12 kN ∠ 70.3°.
6.139 720 lb.
6.140 2.22 kN.
6.141 156.6 N.
6.142 783 lb.
6.143 11.46 lb ∠ 30.0°.
6.144 43.1 lb ∠ 60.0°.
6.146 8.82 kN.
6.147 6.48 kips ∠ 62.1°.
6.148 *a*) 0. *b*) $\mathbf{C}_x$ = 7.20 kips ←, $\mathbf{C}_y$ = 1.500 kips ↓.
6.150 *a*) 7.68 kN *C*. *b*) 21.7 kN *C*.
6.151 *a*) 36.0 mm. *b*) 60.0 N · m ↻.
6.152 *a*) (112.5 lb · in.)**i**. *b*) **G** = 0, $\mathbf{M}_C$ = (410 lb · in.)**i**;
H = 0, $\mathbf{M}_H$ = −(117.0 lb · in.)**i**.
6.154 *a*) 43.3 N · m. *b*) **B** = −(50.0 N)**k**; **D** = (83.3 N)**k**;
E = −(33.3 N)**k**.
6.155 $\mathbf{E}_x$ = 2 040 lb →, $\mathbf{E}_y$ = 3 160 lb ↑; $\mathbf{F}_x$ = 540 lb →,
$\mathbf{F}_y$ = 2 410 lb ↓; $\mathbf{H}_x$ = 2 580 lb ←, $\mathbf{H}_y$ = 750 lb ↓.
6.156 $F_{AB} = F_{BD} = 0$; F_{AC} = 3.00 kips *T*; F_{AD} = 5.00 kips *C*;
F_{CD} = 4.00 kips *T*; F_{CE} = 9.00 kips *T*; F_{CF} = 10.00 kips *T*;
F_{DF} = 6.00 kips *T*; F_{EF} = 8.00 kips *T*.
6.157 F_{FG} = 1.750 kips *T*; F_{FH} = 2.52 kips *C*;
F_{GH} = 0.838 kip *T*; $F_{GI} = F_{IK} = F_{KL}$ = 1.677 kips *T*;
$F_{HI} = F_{IJ} = F_{JK} = 0$; $F_{HJ} = F_{JL}$ = 2.12 kips *C*.
6.158 F_{AB} = 61.9 kN *C*; F_{AC} = 56.5 kN *C*; F_{AD} = 30.2 kN *T*;
F_{AE} = 19.01 kN *T*; F_{BD} = 43.0 kN *T*; F_{BF} = 56.0 kN *C*;
F_{CE} = 82.0 kN *T*; F_{CG} = 84.0 kN *C*; F_{DE} = 44.0 kN *T*;
F_{DF} = 67.1 kN *T*; F_{EG} = 0.
6.160 F_{AB} = 36.4 kN *T*; F_{AG} = 20.0 kN *T*; F_{FG} = 51.6 kN *C*.
6.162 $\mathbf{A}_x$ = 4.50 kips ←, $\mathbf{A}_y$ = 5.00 kips ↓; **B** = 2.25 kips →;
$\mathbf{C}_x$ = 2.25 kips →, $\mathbf{C}_y$ = 5.00 kips ↑.
6.163 $\mathbf{B}_x$ = 175.0 lb ←, $\mathbf{B}_y$ = 50.0 lb ↓;
$\mathbf{E}_x$ = 175.0 lb →, $\mathbf{E}_y$ = 125.0 lb ↑.
6.165 *a*) 220 N →. *b*) 254 N *T*. *c*) 280 N ∠ 38.3°.
6.166 1 680 N.

CAPÍTULO 7

7.1 (En *EJ*) **F** = 0; **V** = 1200 N ←; **M** = 180.0 N · m ↻.
7.3 (En *CJ*) **F** = 127.3 N ←; **V** = 178.2 N ↑;
M = 11.46 N · m ↻.
7.5 (En *AJ*) **F** = 124.8 lb →; **V** = 52.0 lb ↓; **M** = 520 lb · in. ↺.
7.6 (En *CK*) **F** = 125.2 lb ↙; **V** = 24.0 lb ↖; **M** = 312 lb · in. ↻.
7.7 (En *BJ*) **F** = 0; **V** = 0; **M** = 2.41 N · m ↻.
7.8 (En *BJ*) **F** = 0; **V** = 44.1 N ↑; **M** = 4.22 N · m ↺.
7.9 (En *BJ*) **F** = 4.39 lb ∠ 60.0°; **V** = 16.39 lb ∠ 30.0°;
M = 30.4 lb · in. ↻.
7.11 (En *CJ*) **F** = 1.482 lb ↗; **V** = 103.1 lb ↘; **M** = 435 lb · in. ↻.
7.13 (En *AJ*) **F** = 6 260 N ∠ 19.80°; **V** = 339 N ∠ 70.2°;
M = 346 N · m ↻.
7.14 $M_{máx} = PL/4$; $a = L/2$.
7.15 (En *BJ*) **F** = 250 N ↘; **V** = 120.0 N ↗; **M** = 120.0 N · m ↺.
7.16 (En *AK*) **F** = 560 N ←; **V** = 90.0 N ↓; **M** = 72.0 N · m ↻.
7.17 (En *DJ*) **F** = 1 036 N ∠ 67.4°; **V** = 17.31 N ∠ 22.6°;
M = 22.5 N · m ↻.
7.18 (En *AK*) **F** = 463 N ∠ 53.1°; **V** = 41.1 N ∠ 36.9°;
M = 61.7 N · m ↺.
7.19 (En *CJ*) **F** = 152.8 lb ↘; **V** = 19.58 lb ↙;
M = 170.3 lb · in. ↺.
7.21 *a*) (En *AJ*) **F** = $P/2$ ↓; **V** = 0; **M** = 0.
b) (En *AJ*) **F** = $11P/14$ ↓; **V** = $2P/7$ ←; **M** = $2Pa/7$ ↻.
c) (En *AJ*) **F** = $5P/2$ ↓; **V** = $2P$ ←; **M** = $2Pa$ ↻.
7.23 (En *AJ*) **M** = $0.0774Wr$ ↻.
7.24 (En *AJ*) **M** = $0.01085Wr$ ↻.
7.25 θ = 27.7°; (En *AJ*) $\mathbf{M}_{máx}$ = $0.0777Wr$ ↻.
7.26 θ = 66.6°; (En *AJ*) $\mathbf{M}_{máx}$ = $0.0362Wr$ ↺.
7.29 *b*) M_0/L; $M_0/2$.
7.30 *b*) P; Pa.
7.31 *b*) $w_0L/2$; $w_0L^2/6$.
7.32 *b*) P; $1.5Pa$.
7.34 *b*) 12.63 kips; 29.8 kips · ft.
7.36 *b*) 3.50 kN; 4.50 kN · m.
7.37 *b*) 5.56 kN; 6.59 kN · m.
7.39 *b*) 175.0 lb; 900 lb · in.
7.40 *b*) 33.0 kips; 99.0 kips · ft.
7.41 *b*) 6.00 kN; 6.00 kN · m.
7.43 *b*) 4.00 kN; 4.00 kN · m.
7.45 7.00 kN; 7.50 kN · m.
7.47 *b*) 495 lb; 648 lb · ft.
7.48 *b*) 585 lb; 783 lb · ft.
7.49 360 N; 140.0 N · m.
7.51 *a*) 0.311 m. *b*) 232 N · m.
7.52 *a*) 1.434 ft. *b*) 470 lb · ft.
7.53 *a*) 411 N. *b*) 1 029 N · m.
7.54 *a*) 1.063 m. *b*) 8.50 kN · m.
7.56 *a*) 9.25 ft. *b*) 373 lb · ft.
7.57 *a*) $0.414\,wL$; $0.858\,wL^2$. *b*) $wL/4$; $wL^2/4$.
7.58 *b*) M_0/L; $M_0/2$.
7.60 *b*) $w_0L/2$; $w_0L^2/6$.
7.61 *b*) P; $1.5Pa$.
7.62 *b*) 12.63 kips; 29.8 kips · ft.
7.64 *b*) 780 N; 210 N · m.
7.65 *b*) 9.90 kips; 26.2 kips · ft.
7.66 *b*) 5.56 kN; 6.59 kN · m.
7.68 *b*) 175.0 lb; 900 lb · in.
7.69 *b*) 33.0 kips; 99.0 kips · ft.
7.70 *b*) 124.0 N; 75.4 N · m.
7.72 *b*) 1.985 kN · m, 1.260 m desde *A*.
7.74 *a*) 70.0 kips · ft. *b*) 114.3 kip · ft.
7.75 14.40 kips · ft, 6.00 ft desde *A*.
7.76 *b*) 52.0 kN · m, 3.00 m desde *A*.
7.78 *b*) 50.0 kips · ft, 10.00 ft desde *A*.
7.79 *b*) 26.9 kips · ft, 7.33 ft desde *A*.
7.80 *a*) $V = (w_0/L)(-2x^2 + Lx)$;
$M = (w_0/6L)(-4x^3 + 3Lx^2)$. *c*) $w_0L^2/6$, en $x = L$.
7.81 *a*) Para $0 \le x \le 2a$: $V = (w_0/2a)(3a^2 - x^2)$,
$M = (w_0/6a)(-9a^3 + 9a^2x - x^3)$. *c*) $1.5w_0a^2$,
en $x = 0$.
7.82 *b*) $1.359w_0a^2$, en $x = 2.10a$.
7.85 *a*) **P** = 175.0 N ↓; **Q** = 175.0 N ↓.
b) V_C = 800 N; M_D = −75.0 N · m.
7.86 *a*) **P** = 600 N ↓; **Q** = 400 N ↓.
b) $M_{máx}$ = 3.40 kN · m, 1.875 m desde *C*.
7.87 *a*) **P** = 1 113 N ↓; **Q** = 277 N ↓.
b) $M_{máx}$ = 3.68 kN · m, 2.22 m desde *C*.
7.88 *a*) 1.125 m. *b*) $\mathbf{A}_x$ = 4.00 kN ←, $\mathbf{A}_y$ = 2.25 kN ↑.
c) 5.00 kN.
7.89 *a*) 2.26 m. *b*) 1.508 m.
7.91 5.00 ft.
7.92 *a*) 4.65 kN ∠ 23.8°. *b*) d_B = 1.112 m;
d_D = 1.641 m.
7.93 *a*) 1.385 m.
b) **A** = 8.45 kN ∠ 39.7°; **E** = 6.61 kN ∠ 10.46°.

7.94 *a*) 1229 lb. *b*) 11.00 ft.
7.96 *a*) 29.0 lb. *b*) 4.06 ft.
7.97 a = 4.33 ft; b = 10.67 ft.
7.98 *a*) **A** = 2.08 kN ⦪ 22.6°. *b*) 107.0 kg.
c) T_{AB} = 2.08 kN; T_{BC} = 1.000 kN; T_{CD} = 0.650 kN.
7.101 *a*) 33.1 kg. *b*) 99.5 N.
7.102 *a*) 1775 N. *b*) 60.1 m.
7.103 *a*) 4.50 m. *b*) $(T_{AB})_{máx}$ = 410 N; $(T_{BC})_{máx}$ = 400 N.
7.104 *a*) 56 400 kips. *b*) 4 284 ft.
7.105 *a*) 50 200 kips. *b*) 3 575 ft.
7.106 *a*) 11.25 in. *b*) 1.433°.
7.108 3.75 ft.
7.110 *a*) 58 900 kips. *b*) 29.2°.
7.111 *a*) 30.0 in. desde *A*. *b*) 1.746 lb.
7.112 *a*) 1.713 m. *b*) 6.19 m.
7.113 *a*) 2.22 m. *b*) 5.36 kN.
7.115 2.26 m.
7.116 d_B = 1.112 m; d_D = 1.641 m.
7.120 $y = h[1 - \cos(\pi x/L)]$; $T_0 = w_0L^2/h\pi^2$;
$T_{max} = (w_0L/\pi)\sqrt{(L^2/h^2\pi^2) + 1}$.
7.122 *a*) 2.92 m. *b*) 5.23 N.
7.123 *a*) 29.7 ft. *b*) 61.5 lb.
7.124 *a*) 412 ft. *b*) 875 lb.
7.127 *a*) 7.94 m. *b*) 24.0 m.
7.128 *a*) 0.530 m. *b*) 114.7 N.
7.129 *a*) 30.2 m. *b*) 56.6 kg.
7.131 *a*) 4.22 ft. *b*) 80.3°.
7.132 5.23 m.
7.133 8.05 ft y 17.97 ft.
7.135 *a*) 18.78 m. *b*) 3.53 kg/m.
7.136 27.3 lb →.
7.137 40.7 lb →.
7.138 *a*) a = 26.8 m; b = 20.4 m. *b*) 35.3 m.
7.139 *a*) a = 20.1 m; b = 15.29 m. *b*) 26.5 m.
7.140 *a*) 3.15 m. *b*) 231 N.
7.141 *a*) 20.7 ft a la izquierda de *B*. *b*) 9.55 lb.
7.143 *a*) $1.326T_m/w$. *b*) 12.72 km.
7.146 *a*) 0.338. *b*) θ_B = 56.5°; $T_{máx} = 0.755wL$.
7.147 (En *AJ*) **F** = 48.7 lb ⦩ 60.0°; **V** = 64.3 lb ⦨ 30.0°;
M = 309 lb · in. ↺.
7.148 (En *EJ*) **F** = 50.0 lb ↖; **V** = 30.0 lb ↙;
M = 90.0 lb · ft ↺.
7.150 *b*) 8.00 kips; 33.0 kips · ft.
7.151 *b*) 18.00 kN; 48.5 kN · m.
7.153 *a*) 22.5 kN · m, 1.500 m desde *A*.
b) 30.2 kN · m, 1.350 m desde *A*.
7.154 *a*) $V = (w_0/6L)(3x^2 - 6Lx + 2L^2)$;
$M = (w_0/6L)(x^3 - 3Lx^2 + 2L^2x)$.
c) $0.0642w_0L^2$, en $x = 0.423L$.
7.156 *a*) 3.35 kN ⦪ 17.35°. *b*) 3.88 kN ⦨ 34.5°.
7.157 *a*) 24.0 ft a la izquierda de *B*. *b*) 3 450 lb.

CAPÍTULO 8

8.1 *a*) 31.1 lb. *b*) 127.0 lb.
8.3 Equilibrio; **F** = 4.04 N ↙.
8.4 El bloque se mueve; **F** = 19.00 N ↙.
8.5 7.56 N ≤ P ≤ 59.2 N.
8.6 28.9°.
8.7 *a*) 81.7 N. *b*) 19.29°.
8.9 *a*) 0 ≤ θ ≤ 55.7°. *b*) 167.9° ≤ θ ≤ 180.0°.
8.12 *a*) 361 N ←. *b*) 196.2 N ←.
8.13 49.1°.
8.14 23.4°.
8.15 *a*) 58.1°. *b*) 166.4 N.
8.17 *a*) 0.360*Wr*. *b*) 0.422*Wr*.
8.18 *a*) 390 lb. *b*) 510 lb.
8.20 *a*) 17.53°. *b*) 0.252*W*.
8.21 0.539.
8.23 *a*) 4.62° y 48.2°. *b*) 0.526*W* y 0.374*W*.
8.24 3.46 ≤ L/a ≤ 13.63.
8.25 2.62 kN ↓.
8.26 0.1865.
8.27 0.1905.
8.28 0.283.
8.30 *a*) 0.526. *b*) 0.277.
8.32 21.8° ≤ θ ≤ 62.9°.
8.34 1.817 kg ≤ m ≤ 10.01 kg.
8.35 66.1 kg ≤ m ≤ 364 kg.
8.36 $2Pl/(\tan\theta - \mu_s)$.
8.37 0.1400.
8.40 *a*) 24.3 lb · in. ↺. *b*) 19.22 lb · in. ↺.
8.41 7.72 lb.
8.42 *a*) 0.322 kg. *b*) 3.60 kg.
8.43 0.1757.
8.45 236 lb ≤ P ≤ 289 lb.
8.46 441 lb.
8.47 480 lb.
8.50 *a*) 72.3 kN →. *b*) 27.0 kN ←.
8.51 *a*) 99.3 kN ←. *b*) 45.3 kN →.
8.52 *a*) 367 lb. *b*) 367 lb.
8.54 8.89 kN.
8.55 38.6°.
8.56 117.5 lb.
8.57 6.60 N.
8.58 *a*) La cuña es forzada hacia arriba y hacia fuera entre las placas.
b) La cuña se volverá autobloqueante en θ = 4.20°.
8.60 714 N ⦩ 20.0°.
8.61 0.203.
8.62 *a*) 205 lb →. *b*) El movimiento de la placa en *B* es inminente.
8.63 *a*) 204 lb ←. *b*) La plancha no se mueve.
8.64 0.385.
8.65 0.332.
8.69 737 lb · ft.
8.72 *a*) Tornillo *A*. *b*) 1.535 N · m.
8.73 3.07 N · m.
8.74 134.1 lb · in.
8.75 15.35 kN.
8.76 123.8 lb.
8.78 79.9 lb.
8.80 *a*) 0.344. *b*) 120.2 N.
8.81 T_{AB} = 290 N; T_{CD} = 310 N; T_{EF} = 331 N.
8.82 T_{AB} = 310 N; T_{CD} = 290 N; T_{EF} = 272 N.
8.83 *a*) 1.177 kips. *b*) 1.349°.
8.84 253 N.
8.85 250 N.
8.88 *a*) 5.96 lb. *b*) 3.99 lb.
8.89 99.3 mm.
8.90 1.768 lb.
8.91 1.596 N · m.
8.95 1.326 lb.
8.97 1.200 mm.
8.98 42.7 N.
8.99 *a*) 56.0 lb. *b*) 54.0 lb.
8.100 216 mm.
8.101 *a*) 0.329. *b*) 2.67 turns.

8.104 286 N $\leq P \leq$ 4840 N.
8.105 24.3 lb $\leq P \leq$ 411 lb.
8.106 *a)* 500 lb. *b)* 0.212.
8.107 421 lb · in.
8.109 *a)* 47.9 N. *b)* 1.900.
8.110 *a)* T_A = 42.0 N; T_B = 98.0 N. *b)* 0.270.
8.111 *a)* T_A = 55.7 N; T_B = 104.3 N. *b)* 10.93 N · m ↓.
8.112 101.1 N · m.
8.114 0.361.
8.115 *a)* 432 N · m. *b)* 0.219.
8.116 *a)* 1.940 kg. *b)* 63.7 kg. *c)* 20.2 kg.
8.117 203 kg.
8.118 *a)* 3.69 lb $\leq W_A \leq$ 69.3 lb. *b)* 5.61 lb $\leq W_A \leq$ 45.6 lb.
8.120 *a)* 4.55 lb $\leq W_A \leq$ 56.2 lb. *b)* 6.92 lb $\leq W_A \leq$ 37.0 lb.
8.122 5.97 N.
8.123 9.56 N.
8.124 *a)* 538 N · m ↓. *b)* 1.142 kN ↓.
8.126 0.350.
8.130 857 lb · in.
8.131 32.1 lb.
8.132 El bloque se mueve; **F** = 193.2 N ↗.
8.133 *a)* 50.5°. *b)* 66.5°.
8.135 0.1835.
8.136 0.750.
8.137 *a)* $W \leq$ 4.07 N y $W \geq$ 86.4 N. *b)* $W \geq$ 246 N.
8.139 2.46 kips ←.
8.141 0.0787.
8.142 397 lb · in.

CAPÍTULO 9

9.1 $a^3(b_1 + 3b_2)/12$.
9.2 $5a^3b/33$.
9.3 $a^3b/21$.
9.5 $a(b_1 + b_2)(b_1^2 + b_2^2)/12$.
9.6 $5ab^3/17$.
9.7 $31ab^3/30$.
9.9 $\pi ab^3/8$.
9.11 $0.1107ab^3$.
9.12 $\pi a^3b/8$.
9.14 $0.273a^3b$.
9.16 $59ab^3/30$; $1.086b$.
9.18 $9a^3b/14$; $0.621a$.
9.19 $0.217ab^3$; $0.642b$.
9.20 $1.482a^3b$; $1.676a$.
9.21 *a)* $4a^4/3$; $a\sqrt{2/3}$. *b)* $17a^4/6$; $a\sqrt{17/12}$.
9.22 $11ab(a^2 + 3b^2)/6$; $\sqrt{11(a^2 + 3b^2)/30}$.
9.24 $0.415r^4$; $0.822r$.
9.25 *a)* $3\pi(R_2^4 - R_1^4)/8$. *b)* $I_x = I_y = 3\pi(R_2^4 - R_1^4)/16$.
9.26 *b)* −10.56%; −0.772%; −0.0488%.
9.27 $3\pi a^4/64$; $a\sqrt{6}/4$.
9.31 614×10^3 mm^4; 19.01 mm.
9.32 449 in.^{4}; 2.65 in.
9.33 1.894×10^6 mm^4; 33.4 mm.
9.34 909 in.^{4}; 3.77 in.
9.37 3 000 mm^2; 325×10^3 mm^4.
9.38 24.6×10^6 mm^4.
9.39 1.500 in.; 40.0 in.^{4}
9.41 $\bar{I}_x$ = 65.0 in.^{4}; $\bar{I}_y$ = 6.43 in.^{4}
9.42 $\bar{I}_x = 6.51 \times 10^6$ mm^4; $\bar{I}_y = 5.12 \times 10^6$ mm^4.
9.44 $\bar{I}_x = 2.52 \times 10^6$ mm^4; $\bar{I}_y = 1.056 \times 10^6$ mm^4.
9.45 *a)* 11.57×10^6 mm^4. *b)* 7.81×10^6 mm^4.
9.46 *a)* 60.2×10^6 mm^4. *b)* 60.1×10^6 mm^4.
9.48 *a)* 13.09×10^3 in.^{4} *b)* 8.56×10^3 in.^{4}
9.49 $\bar{I}_x$ = 44.5 in.^{4}, $\bar{I}_y$ = 27.7 in.^{4}; $\bar{k}_x$ = 2.16 in., $\bar{k}_y$ = 1.707 in.
9.50 $\bar{I}_x = 195.9 \times 10^6$ mm^4, $\bar{I}_y = 190.7 \times 10^6$ mm^4; $\bar{k}_x$ = 114.0 mm, $\bar{k}_y$ = 112.5 mm.
9.52 12.29 mm.
9.53 $\bar{I}_x = 37.7 \times 10^6$ mm^4; $\bar{I}_y = 3.86 \times 10^6$ mm^4.
9.55 b = 91.2 mm; $\bar{I}_x = 11.34 \times 10^6$ mm^4, $\bar{I}_y = 34.0 \times 10^6$ mm^4.
9.56 *a)* 14.48 in. *b)* $\bar{I}_x$ = 81.7 in^4, $\bar{I}_y$ = 263 in^4.
9.57 $h/2$.
9.59 $h(a + 3b)/(2a + 4b)$.
9.61 $F_A = F_B$ = 918 N; $F_C = F_D$ = 944 N.
9.62 7.39 ft.
9.63 225 mm.
9.64 $5a/4$.
9.68 $3a^2b^2/16$.
9.69 $b^2h^2/8$.
9.70 $0.1419a^2b^2$.
9.71 300×10^3 mm^4.
9.72 501 in^4.
9.73 138.2×10^6 mm^4.
9.74 -159.6×10^3 mm^4.
9.75 1.573×10^6 mm^4.
9.78 2.81 in.^{4}
9.80 $\bar{I}_{x'} = 3.31 \times 10^3$ in.^{4}; $\bar{I}_{y'} = 2.31 \times 10^3$ in.^{4}; $\bar{I}_{x'y'} = 1.947 \times 10^3$ in.^{4}
9.82 $\bar{I}_{x'} = 4.61 \times 10^6$ mm^4; $\bar{I}_{y'} = 3.82 \times 10^6$ mm^4; $\bar{I}_{x'y'} = -3.83 \times 10^6$ mm^4.
9.83 $\bar{I}_{x'} = 149.9 \times 10^3$ mm^4; $\bar{I}_{y'} = 469 \times 10^3$ mm^4; $\bar{I}_{x'y'} = 143.5 \times 10^3$ mm^4.
9.84 $\bar{I}_{x'}$ = 5.30 in.^{4}; $\bar{I}_{y'}$ = 6.73 in.^{4}; $\bar{I}_{x'y'}$ = 4.38 in.^{4}
9.86 7.22°; 4 820 in.^{4}, 802 in.^{4}
9.88 12.06°; 8.06×10^6 mm^4, 0.365×10^6 mm^4.
9.89 −24.0°; 524×10^3 mm^4, 94.9×10^3 mm^4.
9.90 −19.64°; 10.45 in.^{4}, 1.577 in.^{4}
9.92 $\bar{I}_{x'} = 3.31 \times 10^3$ in.^{4}; $\bar{I}_{y'} = 2.31 \times 10^3$ in.^{4}; $\bar{I}_{x'y'} = 1.947 \times 10^3$ in.^{4}
9.94 $\bar{I}_{x'} = 4.61 \times 10^6$ mm^4; $\bar{I}_{y'} = 3.82 \times 10^6$ mm^4; $\bar{I}_{x'y'} = -3.83 \times 10^6$ mm^4.
9.95 $\bar{I}_{x'} = 149.9 \times 10^3$ mm^4; $\bar{I}_{y'} = 469 \times 10^3$ mm^4; $\bar{I}_{x'y'} = 143.5 \times 10^3$ mm^4.
9.96 $\bar{I}_{x'}$ = 5.30 in.^{4}; $\bar{I}_{y'}$ = 6.73 in.^{4}; $\bar{I}_{x'y'}$ = 4.38 in.^{4}
9.97 20.2°; $1.754a^4$, $0.209a^4$.
9.98 7.22°; 4 820 in.^{4}, 802 in.^{4}
9.100 29.7°; 405×10^6 mm^4, 83.9×10^6 mm^4.
9.101 −24.0°; 524×10^3 mm^4, 94.9×10^3 mm^4.
9.103 2.95°; 10.67×10^6 mm^4, 4.84×10^6 mm^4.
9.104 −30.1°; 5 530 in.^{4}, 1 757 in.^{4}
9.105 *a)* -215×10^3 mm^4. *b)* −28.1°. *c)* 568×10^3 mm^4.
9.106 19.64°; 10.45 in.^{4}, 1.577 in.^{4}
9.107 −24.0°; 8.33×10^6 mm^4, 1.509×10^6 mm^4.
9.108 *a)* −7.50°. *b)* 646 in.^{4}, 274 in.^{4}
9.112 $\pm 159.4 \times 10^3$ mm^4.
9.113 *a)* $0.0699ma^2$. *b)* $0.320ma^2$.
9.114 *a)* $m(r_1^2 + r_2^2)/4$. *b)* $m(r_1^2 + r_2^2)/2$.
9.116 *a)* $5mb^2/6$. *b)* $m(28a^2 + 13b^2)/48$.
9.117 *a)* $I_{AA'} = mb^2/24$; $I_{BB'} = mh^2/18$. *b)* $m(3b^2 + 4h^2)/72$.
9.118 $I_{DD'} = m(b^2 + 24d^2)/24$; $I_{EE'} = m(h^2 + 18d^2)/18$.
9.119 *a)* $5ma^2/18$. *b)* $3.61ma^2$.
9.121 $5mb^2/18$.
9.122 $m(93r_2^2 + 32L^2)/140$.
9.124 $m(b^2 + 3h^2)/5$.
9.125 $m(a^2 + b^2)/5$.
9.126 $m(a^2 + 3h^2)/6$; $\sqrt{(a^2 + 3h^2)/6}$.
9.127 $I_x = I_y = ma^2/4$; $I_z = ma^2/2$.

9.129 2.04×10^{-3} lb · ft · s^2; 1.744 in.
9.131 $2mr^2/3$; $0.816r$.
9.132 *a)* $\rho\pi h(a_2^4 + 2a_2^2 a_1^2 - 3a_1^4)/2$. *b)* $a_2/\sqrt{3}$. *c)* $2\rho\pi h a_2^4/3$.
9.133 281×10^{-3} kg · m^2.
9.134 *a)* 1.044 in. *b)* 2.42 in.
9.136 *a)* 46.0 mm. *b)* 8.54×10^{-3} kg · m^2; 45.4 mm.
9.137 $I_x = 34.4 \times 10^{-6}$ lb · ft · s^2; $I_y = 232 \times 10^{-6}$ lb · ft · s^2; $I_z = 221 \times 10^{-6}$ lb · ft · s^2.
9.139 $I_x = 5.14 \times 10^{-3}$ kg · m^2; $I_y = 7.54 \times 10^{-3}$ kg · m^2; $I_z = 3.47 \times 10^{-3}$ kg · m^2.
9.141 $I_x = 91.0 \times 10^{-3}$ lb · ft · s^2; $I_y = 221 \times 10^{-3}$ lb · ft · s^2; $I_z = 186.7 \times 10^{-3}$ lb · ft · s^2.
9.142 $I_x = 19.31 \times 10^{-3}$ kg · m^2; $I_y = 1.253$ kg · m^2; $I_z = 1.238$ kg · m^2.
9.143 *a)* 34.1×10^{-3} lb · ft · s^2. *b)* 50.1×10^{-3} lb · ft · s^2. *c)* 34.9×10^{-3} lb · ft · s^2.
9.144 21.2 kg · m^2.
9.145 3.98 kg · m^2.
9.146 2.88×10^{-3} lb · ft · s^2.
9.148 $I_x = I_z = 6.85 \times 10^{-3}$ kg · m^2; $I_y = 12.63 \times 10^{-3}$ kg · m^2.
9.149 $I_x = 23.2 \times 10^{-3}$ kg · m^2; $I_y = 21.4 \times 10^{-3}$ kg · m^2; $I_z = 17.99 \times 10^{-3}$ kg · m^2.
9.151 $I_{xy} = 0.488 \times 10^{-3}$ lb · ft · s^2; $I_{yz} = 1.184 \times 10^{-3}$ lb · ft · s^2; $I_{zx} = 2.70 \times 10^{-3}$ lb · ft · s^2.
9.152 $I_{xy} = 757 \times 10^{-6}$ lb · ft · s^2; $I_{yz} = 826 \times 10^{-6}$ lb · ft · s^2; $I_{zx} = 1.225 \times 10^{-3}$ lb · ft · s^2.
9.154 $I_{xy} = -691 \times 10^{-6}$ kg · m^2; $I_{yz} = 203 \times 10^{-6}$ kg · m^2; $I_{zx} = -848 \times 10^{-6}$ kg · m^2.
9.155 $I_{xy} = 786 \times 10^{-6}$ kg · m^2; $I_{yz} = 64.5 \times 10^{-6}$ kg · m^2; $I_{zx} = -71.6 \times 10^{-6}$ kg · m^2.
9.157 $I_{xy} = -0.1931$ kg · m^2; $I_{yz} = 0.310$ kg · m^2; $I_{zx} = 2.26$ kg · m^2.
9.159 $I_{xy} = 12.75wa^3/g$; $I_{yz} = 7wa^3/g$; $I_{zx} = 1.5wa^3(\pi + 4)/g$.
9.161 $I_{xy} = 115.2 \times 10^{-6}$ lb · ft · s^2; $I_{yz} = 246 \times 10^{-6}$ lb · ft · s^2; $I_{zx} = 154.3 \times 10^{-6}$ lb · ft · s^2.
9.162 $I_{xy} = -0.576$ kg · m^2; $I_{yz} = I_{zx} = 0$.
9.164 *a)* $mac/20$. *b)* $I_{xy} = mab/20$; $I_{yz} = mbc/20$.
9.165 $ma^2(10h^2 + 3a^2)/12(h^2 + a^2)$.
9.166 $3.22ma^2$.
9.167 44.3×10^{-3} lb · ft · s^2.
9.169 $5Wa^2/18g$.
9.170 $5\rho t a^4/12$.
9.171 6.74 kg · m^2.
9.173 25.3×10^{-3} kg · m^2.
9.174 10.97×10^{-3} kg · m^2.
9.175 *a)* $b/a = 2.00$; $c/a = 2.00$. *b)* $b/a = 1.000$; $c/a = 0.500$.
9.176 *a)* 2.00. *b)* $\sqrt{2/3}$.
9.177 *a)* $1/\sqrt{3}$. *b)* $\sqrt{7/12}$.
9.179 *a)* $ma^2/6$. *b)* $I_{x'} = ma^2/6$; $I_{y'} = I_{z'} = 11ma^2/12$.
9.181 *a)* $K_1 = 0.363ma^2$; $K_2 = 1.583ma^2$; $K_3 = 1.720ma^2$. *b)* $(\theta_x)_1 = (\theta_z)_1 = 49.7°$, $(\theta_y)_1 = 113.7°$; $(\theta_x)_2 = 45.0°$, $(\theta_y)_2 = 90.0°$, $(\theta_z)_2 = 135.0°$; $(\theta_x)_3 = (\theta_z)_3 = 73.5°$, $(\theta_y)_3 = 23.7°$.
9.182 *a)* $K_1 = 34.9 \times 10^{-3}$ lb · ft · s^2; $K_2 = 34.0 \times 10^{-3}$ lb · ft · s^2; $K_3 = 50.2 \times 10^{-3}$ lb · ft · s^2. *b)* $(\theta_x)_1 = (\theta_y)_1 = 90.0°$, $(\theta_z)_1 = 0$; $(\theta_x)_2 = 3.43°$, $(\theta_y)_2 = 86.6°$, $(\theta_z)_2 = 90.0°$; $(\theta_x)_3 = 93.4°$, $(\theta_y)_3 = 3.41°$, $(\theta_z)_3 = 90.0°$.
9.183 *a)* $K_1 = 1.180 \times 10^{-3}$ lb · ft · s^2; $K_2 = 10.72 \times 10^{-3}$ lb · ft · s^2; $K_3 = 11.70 \times 10^{-3}$ lb · ft · s^2. *b)* $(\theta_x)_1 = 72.5°$, $(\theta_y)_1 = 83.0°$, $(\theta_z)_1 = 18.89°$; $(\theta_x)_2 = 19.38°$, $(\theta_y)_2 = 83.7°$, $(\theta_z)_2 = 108.3°$; $(\theta_x)_3 = 98.2°$, $(\theta_y)_3 = 9.46°$, $(\theta_z)_3 = 94.7°$.
9.184 *a)* $K_1 = 0.1639Wa^2/g$; $K_2 = 1.054Wa^2/g$; $K_3 = 1.115Wa^2/g$. *b)* $(\theta_x)_1 = 36.7°$, $(\theta_y)_1 = 71.6°$, $(\theta_z)_1 = 59.5°$; $(\theta_x)_2 = 74.9°$, $(\theta_y)_2 = 54.5°$, $(\theta_z)_2 = 140.5°$; $(\theta_x)_3 = 57.5°$, $(\theta_y)_3 = 138.8°$, $(\theta_z)_3 = 112.4°$.
9.185 *a)* $K_1 = 0.203\rho t a^4$; $K_2 = 0.698\rho t a^4$; $K_3 = 0.765\rho t a^4$. *b)* $(\theta_x)_1 = 40.2°$, $(\theta_y)_1 = 50.0°$, $(\theta_z)_1 = 86.7°$; $(\theta_x)_2 = 56.2°$, $(\theta_y)_2 = 134.5°$, $(\theta_z)_2 = 63.4°$; $(\theta_x)_3 = 70.8°$, $(\theta_y)_3 = 108.0°$, $(\theta_z)_3 = 153.2°$.
9.186 *a)* $K_1 = 10.02 \times 10^{-3}$ lb · ft · s^2; $K_2 = 18.62 \times 10^{-3}$ lb · ft · s^2; $K_3 = 22.9 \times 10^{-3}$ lb · ft · s^2. *b)* $(\theta_x)_1 = 35.2°$, $(\theta_y)_1 = (\theta_z)_1 = 65.9°$; $(\theta_x)_2 = 90.0°$, $(\theta_y)_2 = 45.0°$, $(\theta_z)_2 = 135.0°$; $(\theta_x)_3 = 54.7°$, $(\theta_y)_3 = (\theta_z)_3 = 125.3°$.
9.187 $a^3b/30$.
9.189 7.36×10^6 mm^4; 32.0 mm.
9.191 *a)* 122.4×10^6 mm^4. *b)* 64.4×10^6 mm^4.
9.192 $\bar{I}_x = 396$ in.^{4}, $\bar{I}_y = 190.5$ in.^{4}; $\bar{k}_x = 4.58$ in., $\bar{k}_y = 3.17$ in.
9.193 $\bar{I}_x = 9.34$ in.^{4}; $\bar{I}_y = 131.2$ in.^{4}
9.195 -11.00 in.^{4}
9.196 $-20.0°$; 39.6 in.^{4}, 5.37 in.^{4}
9.197 $m(3a^2 + 4L^2)/12$.

CAPÍTULO 10

10.1 180.0 N ↓.
10.2 28.0 lb ↓.
10.3 18.00 N · m ↻.
10.5 132.0 lb →.
10.6 *a)* 54.0 N; 60.0 mm →. *b)* 126.0 N; 140.0 mm →.
10.7 *a)* 36.0 N; 40.0 mm →. *b)* 54.0 N; 60.0 mm →.
10.9 $2P$ sen $\theta/\cos(\theta/2)$.
10.10 $(3P/2)\tan\theta$.
10.13 7.96 kN.
10.14 5.47°.
10.15 $3Pa/2$.
10.18 *a)* Pl sen 2θ. *b)* $3Pl\cos\theta$. *c)* Pl sen θ.
10.19 *a)* 126.9 lb · ft ↺. *b)* 81.4 lb · ft ↺.
10.20 *a)* 369 lb →. *b)* 477 lb →.
10.21 34.6 N ⦨ 30.0°.
10.22 96.5 N · m ↺.
10.23 36.4°.
10.24 57.5°.
10.25 39.2°.
10.28 39.1°.
10.29 90.9 N.
10.31 330 mm.
10.33 40.2°.
10.34 32.8 lb.
10.35 60.4°.
10.37 10.77°.
10.38 16.41°.
10.39 61.2°.
10.40 78.7°; 324°; 379°.
10.41 99.3 lb ⦩ 44.7°.
10.43 15.27°.
10.45 3.21 kips ↗.
10.47 $\eta = 1/(1 + \mu\cot\alpha)$.
10.48 $Pl/[2(\tan\theta - \mu_s)]$.
10.49 $M_{máx} = 250$ N · m; $M_{mín} = 100.0$ N · m.
10.50 $Q_{máx} = P(3\tan\theta + \mu_s)/2$; $Q_{mín} = P(3\tan\theta - \mu_s)/2$.
10.51 37.6 N; 31.6 N.
10.52 $\eta = \tan\theta/\tan(\theta + \phi_s)$.
10.55 1.451 in. (más corto).

10.56 0.527 in. (más largo).
10.57 12.50 mm ↓.
10.58 9.38 mm →.
10.60 330 mm.
10.61 15.03° y 36.9°.
10.62 40.2°.
10.65 10.77°.
10.69 $\theta = 45.0°$, estable; $\theta = -135.0°$, inestable.
10.70 $\theta = 31.0°$, estable; $\theta = -149.0°$, inestable.
10.73 $\theta = 61.2°$, estable.
10.74 $\theta = 78.7°$, estable; $\theta = 324°$, inestable; $\theta = 379°$, estable.
10.75 $W = 2.47$ lb, estable.
10.76 $\theta = 109.3°$, estable.
10.77 14.66 in.
10.79 *a*) $\cos(\theta/2) - \text{sen}(\theta/2) = [1 - (Wl/ka^2)] \cos\theta$.
b) 34.2°, estable; 90.0°, inestable; 145.8°, estable.
10.81 $\theta = 12.92°$, estable; $\theta = 77.1°$, inestable.
10.82 *a*) $(1 - \cos\theta) \tan\theta = 2mg/kl$. *b*) 52.0°, estable.
10.83 49.1°.
10.85 62.2°.
10.86 9.15 in.
10.88 46.6°.
10.89 $k > 6.94$ lb/in.
10.90 12.25 in.
10.91 $P < ka$.
10.92 $P < 2kL/9$.
10.95 m_2c^2/ab.
10.96 $Q > 432$ N.
10.97 $P < 0.382kl$.
10.99 $P < 0.219ka$.
10.101 *a*) 75.0 N ↑. *b*) 225 N ↓.
10.102 17.90 kips ↗.
10.104 27.0 lb · ft ↺.
10.105 $PL/2 \tan\theta$.
10.107 85.2 lb · ft ↺.